江苏省仪征中学2023-2024学年第一学期周末练习14

高一数学

一、单选题：本题共**8**小题，每小题**5**分，共**40**分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知集合$A=\left\{x\in Z\left|−1\leq x\leq 2\right.\right\},B=\left\{x\left|0\leq x\leq 3\right.\right\}$，则$A⋂B=$(    )

A. $\{x\left|−1\leq x\leq 3\}\right.$ B. $\{x\left|0\leq x\leq 2\}\right.$ C. $\left\{0,1,2\right\}$ D. $\left\{−1,0,1,2\right\}$

2.对于全集$U$，命题甲“所有集合$A$都满足$A∪∁\_{U}A=U$”，命题乙为命题甲的否定，则命题甲、乙真假判断正确的是(    )

A. 甲、乙都是真命题 B. 甲、乙都不是真命题
C. 甲为真命题，乙为假命题 D. 甲为假命题，乙为真命题

3.已知函数$f(x)=(3m−2)x^{m+2}(m\in R)$是幂函数，则函数$g(x)=log\_{a}(x−m)+1(a>0$，且$a\ne 1)$的图象所过定点$P$的坐标是(    )

A. $(2,1)$ B. $(0,2)$ C. $(1,2)$ D. $(−1,2)$

4.为了提高资源利用率，全国掀起了垃圾分类的热潮，垃圾分类已经成为了新时代的要求$.$假设某地$2020$年全年用于垃圾分类的资金为$500$万元，在此基础上，每年投入的资金比上一年增长$20\%$，则该市用于垃圾分类的资金开始不低于$1600$万元的年份是$($参考数据：$lg2≈0.301$，$lg3≈0.477)$(    )

A. $2025$年 B. $2026$年 C. $2027$年 D. $2028$年

5.将函数$y=cos(2x−\frac{π}{3})$的图象向左平移$φ(φ>0)$个单位长度后，所得图象关于原点对称，则$φ$的最小值为(    )

A. $\frac{π}{6}$ B. $\frac{π}{3}$ C. $\frac{5π}{12}$ D. $\frac{5π}{6}$

6.定义在$R$上的函数$f(x)$满足：$f(x+2)$是偶函数，且函数$y=f(x)$的图象与函数$y=\frac{1}{(x−2)^{2}}$的图象共有$n$个交点：$(x\_{1},y\_{1})$，$(x\_{2},y\_{2})$，$…$，$(x\_{n},y\_{n})$，则$x\_{1}+x\_{2}+…+x\_{n}=$(    )

A. $0$ B. $n$ C. $2n$ D. $4n$

7.已知$a=2^{cosα},b=log\_{2}tanα,c=sin^{2}α,α\in (0,\frac{π}{4})$，则(    )

A. $a>b>c$ B. $a>c>b$ C. $b>c>a$ D. $c>a>b$

8.已知函数$f(x)=x^{3}−x^{2}⋅sin(πx)+\frac{x}{4}$的零点分别为$x\_{1},x\_{2},…,x\_{n}\left(n\in N^{∗}\right)$，则$x\_{1}^{2}+x\_{2}^{2}+\cdots +x\_{n}^{2}=$(    )

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $0$ D. $2$

二、多选题：本题共**4**小题，共**20**分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。

9.函数$f(x)=2^{x}+\frac{a}{2^{x}}(a\in R)$的图象可能为(    )

A.  B. 
C.  D. 

10.已知实数$m$，$n$满足$2^{m}>2^{n}$，则下列不等式恒成立的是(    )

A. $cosm<cosn$ B. 若$m>0$，$n>0$，则$log\_{\frac{1}{3}}m<log\_{\frac{1}{3}}n$
C. $e^{3m+2}>e^{3n+2}$ D. 若$m>0$，$n>0$，则$\sqrt[ ]{m}>\sqrt[ ]{n}$

11.已知函数$f(x)=\left\{\begin{matrix}log\_{3}(x−1),x>1\\\left(\frac{1}{3}\right)^{x},x\leq 1\end{matrix}\right.$，下列结论正确的是(    )

A. 若$f\left(a\right)=1$，则$a=4$； B. $f\left(f\left(\frac{2021}{2020}\right)\right)=2020$；
C. 若$f\left(a\right)\geq 3$，则$a\leq −1$或$a\geq 28$ D. 若方程$f\left(x\right)=k$有两个不同的实数根，则$k>\frac{1}{3}$

12.水车在古代是进行灌溉的工具，是人类的一项古老的发明，也是人类利用自然和改造自然的象征$.$如图，一个半径为$6$米的水车逆时针匀速转动，水轮圆心$O$距离水面$3$米$.$已知水轮每分钟转动$1$圈，如果当水轮上一点$P$从水中浮现时$($图中点$P\_{0})$开始计时，经过$t$秒后，水车旋转到$P$点，则下列说法正确的是(    )

A. 在转动一圈内，点$P$的高度在水面$3$米以上的持续时间为$30$秒
B. 当$t=[0,15]$时，点$P$距水面的最大距离为$6$米
C. 当$t=10$秒时，$PP\_{0}=6$
D. 若$P$第二次到达最高点大约需要时间为$80$秒

三、填空题：本题共**4**小题，每小题**5**分，共**20**分。

13.$f(x)=tan(\frac{π}{2}x+\frac{π}{3})$的单调递增区间是          ．

14.若对任意的$θ\in (0,\frac{π}{3})$，不等式$\frac{1}{sin^{2}θ}+\frac{4}{cos^{2}θ}\geq |2x−1|$恒成立，则实数$x$的取值范围为          ．

15.数学中处处存在着美，机械学家莱洛沷现的莱洛三角形就给人以对称的美感．莱洛三角形的画法：先画等边三角形$ABC$，再分别以点$A$，$B$，$C$为圆心，线段$AB$长为半径画圆弧，便得到莱洛三角形．若线段$AB$长为$2$，则莱洛三角形的面积是          ．

16.已知定义在$R$上的偶函数$f(x)$，当$x\geq 0$时，函数$f\left(x\right)=\left\{\begin{matrix}cosπx,0\leq x<1\\−x,x\geq 1\end{matrix}\right.$，则满足$f(tan\frac{π}{3})<f(tanx)$的$x$的取值范围是          ．

四、解答题：本题共**6**小题，共**70**分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.$($本小题$10$分$)$计算：

$$(1)(lg25−2lg\frac{1}{2})÷100^{\frac{1}{2}}+(\sqrt[ ]{5}−1)^{0}−(\frac{125}{64})^{−\frac{1}{3}};$$

$(2)sin(\frac{11π}{6})+cos(−\frac{20π}{3})+tan(\frac{29π}{4})$．

18.$($本小题$12$分$)$已知$tanα<0$*，*

$(1)$若$sinα=−\frac{2\sqrt[ ]{5}}{5},$求$\frac{2sin(α+π)+cos(2π−α)}{cos(α−\frac{π}{2})−sin(\frac{3π}{2}+α)}$的值$;$

$(2)$若$sin^{2}α+sinαcosα=−\frac{1}{5},$求$tanα$的值．

19.$($本小题$12$分$)$设全集$U=R$，集合$A=\{x|a−3<x<2a−1\}$，$B=\{x|log\_{2}(x−1)\leq 2\}$，其中$a\in R$．

$(1)$若“$x\in A$”是“$x\in B$”成立的必要不充分条件，求$a$的取值范围；

$(2)$若命题“$∃x\in A$，使得$x\in ∁\_{R}B$”是真命题，求$a$的取值范围．

20.$($本小题$12$分$)$某地一天的时间$x(0⩽x⩽24$，单位：时$)$随气温$y( ^{o}C)$变化的规律可近似看成正弦函数$y=Asin(ωx+φ)+B$的图象，如图所示．



$(1)$根据图中数据，试求$y=Asin(ωx+φ)+B(A>0,ω>0,−π<φ<0)$的表达式；

$(2)$该地居民老张因身体不适在家休养，医生建议其外出进行活动时，室外气温不低于$23^{o}C$，根据$(1)$中模型，老张该日可在哪一时段外出活动，活动时长最长不超过多长时间？

21.$($本小题$12$分$)$已知函数$f\left(x\right)=log\_{a}\left(\sqrt[ ]{x^{2}+1}−mx\right)$在$R$上为奇函数，$a>1$，$m>0$．

$(1)$求实数$m$的值并指出函数$f\left(x\right)$的单调性$($单调性不需要证明$)$；

$(2)$设存在$x\in R$，使$f\left(cos^{2}x+2t−1\right)+f\left(2sinx−t\right)=0$成立，请问是否存在$a$的值？使$g\left(t\right)=a4^{t}−2^{t+1}$最小值为$−\frac{2}{3}$，若存在求出$a$的值．

22.$($本小题$12$分$)$已知函数$f(x)=\frac{a⋅g(x)+2^{x}}{a⋅4^{x}}(a$为常数，且$a\ne 0$，$a\in R)$．
请在下面四个函数：$①g\_{1}(x)=2x$，$②g\_{2}(x)=log\_{2}x$，$③g\_{3}(x)=x^{2}$，$④g\_{4}(x)=8^{x}$中选择一个函数作为$g(x)$，使得$f(x)$具有奇偶性．
$(1)$请写出$g(x)$表达式，并求$a$的值；
$(2)$当$f(x)$为奇函数时，若对任意的$x\in [1,2]$，都有$f(2x)\geq mf(x)$成立，求实数$m$的取值范围；
$(3)$当$f(x)$为偶函数时，请讨论关于$x$的方程$f(2x)=mf(x)$解的个数．

**答案和解析**

1.【答案】$C$

【解析】【分析】

本题考查交集运算问题，属于简单题．
求出$A=\left\{−1,0,1,2\right\}$，再利用交集的定义即可求解．

【解答】

解：$A=\{x\in Z\left|−1\leq x\leq 2\}\right.=\left\{−1,0,1,2\right\}$，又$B=\{x|0⩽x⩽3\}$，

则$A⋂B=\left\{0,1,2\right\}$．

故选*C*．

2.【答案】$C$

【解析】【分析】

根据命题基本概念和集合基本概念分别判断即可．
本题以命题的真假判断为载体，考查了集合的基本概念，属于中档题．

【解答】
解：因为命题乙为命题甲的否定，所以命题乙“存在集合$A$满足$A∪∁\_{U}A\ne U$”．
对于$A$，因为命题与命题的否定只有一个为真，所以$A$错；
对于$B$，因为$A∪∁\_{U}A=U$对任何$U$的子集都成立，所以$B$错；
对于$C$，因为任何集合$A$，$A∪∁\_{U}A=U$都成立，但不存在集合$A$使$A∪∁\_{U}A\ne U$，所以$C$对；
对于$D$，由$C$知，$D$错；
故选：$C$．

3.【答案】$A$

【解析】【分析】

本题主要考查了幂函数的定义，考查了对数型函数过定点坐标，是基础题．
由幂函数的定义可知$3m−2=1$，进而求出$m=1$，所以$g(x)=log\_{a}(x−1)+1$，令$x−1=1$结合$log\_{a}1=0$即可求出结果．

【解答】
解：$∵$函数$f(x)=(3m−2)x^{m+2}(m\in R)$是幂函数，
$∴3m−2=1$，$∴m=1$，
$∴g(x)=log\_{a}(x−1)+1$，
令$x−1=1$得$x=2$，此时$g(2)=log\_{a}1+1=1$，
$∴$函数$g(x)$的图象所过定点$P$的坐标是$(2,1)$，
故选：$A$．

4.【答案】$C$

【解析】【分析】

本题考查了函数模型的应用，涉及了指数不等式的求解，对数运算的运用，解题的关键是正确理解题意，从中抽出合适的数学模型进行研究，属于拔高题．
设经过$n$年后的投入资金为$y$万元，求出$y$与$n$的关系式，然后令$y\geq 1600$，再利用指数不等式的解法以及对数的运算性质求解不等式，即可得到答案．

【解答】解：设经过$n$年后的投入资金为$y$万元，
则$y=500(1+20\%)^{n}$，
令$y\geq 1600$，即$500(1+20\%)^{n}\geq 1600$，
故$\left(\frac{6}{5}\right)^{n}\geq \frac{16}{5}$，
所以$n\geq log\_{\frac{6}{5}}\frac{16}{5}=\frac{lg\frac{16}{5}}{lg\frac{6}{5}}=\frac{lg2^{4}−lg5}{lg6−lg5}=\frac{4lg2−(1−lg2)}{lg2+lg3−(1−lg2)}$
$=\frac{5lg2−1}{2lg2+lg3−1}≈\frac{5×0.301−1}{2×0.301+0.477−1}≈6.39$，
所以$7$年后即$2027$年该市用于垃圾分类的资金开始不低于$1600$万元．
故选：$C$．

5.【答案】$C$

【解析】【分析】

本题考查三角函数的图象变换，利用函数对称性求参数，属于中档题．
根据图象平移可得$y= cos ( 2 x+2φ$ $−\frac{π}{3})$，结合已知条件得$2φ−\frac{π}{3}=\frac{π}{2}+kπ\left(k\in Z\right)$，根据$φ>0$求出$φ$的最小值即可．

【解答】
解：$y= cos ( 2x−\frac{π}{3})$的图象向左平移$φ\left(φ>0\right)$个单位后得：$y= cos ( 2 x+2φ$ $−\frac{π}{3})$，
由平移后所得图象关于原点对称，易知$y= cos ( 2 x+2φ$ $−\frac{π}{3})$为奇函数，
由诱导公式及余弦函数的奇偶性可得：$2φ−\frac{π}{3}=\frac{π}{2}+kπ\left(k\in Z\right)$，解得：$φ=\frac{5π}{12}+\frac{kπ}{2}\left(k\in Z\right)$，
由$φ>0$，易知当$k=0$时，$φ$取得最小值是$\frac{5π}{12}$．
故选*C*．

6.【答案】$C$

【解析】【分析】

本题考查了偶函数的性质，涉及到函数的对称性．
根据偶函数的性质以及初等函数的性质分别得出两个函数图象都关于$x=2$对称，然后根据对称轴建立等式，由此即可求解．

【解答】
解：因为函数$f(x+2)$为偶函数，则函数$f(x)$的图象关于$x=2$对称，
函数$y=\frac{1}{(x−2)^{2}}$是由偶函数$y=\frac{1}{x^{2}}$向右平移$2$个单位得到，
则函数$y=\frac{1}{(x−2)^{2}}$的图象也关于$x=2$对称，且$x\ne 2$，
所以函数$y=f(x)$与函数$y=\frac{1}{(x−2)^{2}}$的图象的$n$个交点一定为偶数个交点，且左右对应的交点关于$x=2$对称，
所以$x\_{1}+x\_{2}+...+x\_{n}=\frac{n}{2}×4=2n$，
故选：$C$．

7.【答案】$B$

【解析】【分析】

本题考查三角函数的图象与性质，利用函数单调性比较大小，属于中档题．
根据三角函数值和指数函数、对数函数的性质比较大小，即可求解．

【解答】

解：因为$α\in \left(0,\frac{π}{4}\right)$，

所以$0<sinα<\frac{\sqrt[ ]{2}}{2}<1$，$\frac{\sqrt[ ]{2}}{2}<cosα<1$，$0<tanα<1$，

所以$a=2^{cosα}>2^{\frac{\sqrt[ ]{2}}{2}}>2^{0}=1$，

$b=log\_{2}tanα<log\_{2}1=0$，

$0<c=sin^{2}α<\frac{1}{2}<1$，

所以$a>c>b$．

故选*B*．

8.【答案】$A$

【解析】解：令 $f(x)=0$，则有 $x^{3}−x^{2}⋅sin(πx)+\frac{x}{4}=0$，即 $x\left[x^{2}−x⋅sin(πx)+\frac{1}{4}\right]=0$，所以有 $f(0)=0$，令 $g(x)=x^{2}−x⋅sin(πx)+\frac{1}{4}$，则 $g(0)\ne 0$，令 $g(x)=0$，则有 $x^{2}+\frac{1}{4}=x⋅sin(πx)$，即有 $\frac{x^{2}+\frac{1}{4}}{x}=sin(πx)$，

因为 $−1\leq sin(πx)\leq 1$，所以 $\left|\frac{x^{2}+\frac{1}{4}}{x}\right|\leq 1$，则 $x^{2}+\frac{1}{4}\leq |x|$，即有 $\left(|x|−\frac{1}{2}\right)^{2}\leq 0$，当 $|x|=\frac{1}{2}$ 时，等号成立，所以当 $x=\pm \frac{1}{2}$ 时， $g(x)=0$，

所以 $f(x)$ 共有$3$个零点，分别为 $0,−\frac{1}{2},\frac{1}{2}$，所以 $x\_{1}^{2}+x\_{2}^{2}+\cdots +x\_{n}^{2}=0^{2}+\left(−\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{1}{2}.$故选：$A$

9.【答案】$ABD$

【解析】【分析】

本题考查了函数图象的识别，解题的关键是掌握识别图象的方法：可以从定义域、值域、函数值的正负、特殊点、特殊值、函数的性质等方面进行判断，考查了直观想象能力与逻辑推理能力，属于基础题．
分别考虑$a=0$，$a=−1$，$a=1$时，$f(x)$的图象与性质，依次判断即可．

【解答】
解：当$a=0$时，$f(x)=2^{x}$，故选项*A*满足；
当$a=1$时，$f(x)=2^{x}+\frac{1}{2^{x}}$，且$f(0)=2$，$f(−x)=f(x)$，此时函数$f(x)$为偶函数，图象关于$y$轴对称，故选项*B*满足；
当$a=−1$时，$f(x)=2^{x}−\frac{1}{2^{x}}$，$f(0)=0$，且$f(−x)=−f(x)$，此时函数$f(x)$为奇函数，图象关于原点对称，故选项*D*满足；
图象$C$过点$(0,1)$，此时$a=0$，故选项*C*不满足．
故选：$ABD$．

10.【答案】$BCD$

【解析】【分析】
本题考查函数单调性在比较大小中的应用，属于基础题．
根据已知条件得到$m>n$，结合函数的单调性逐项判断即可求解．
【解答】
解：因为$y=2^{x}$为$R$上的增函数，所以$m>n$．
因为函数$y=cos$ $x$在$R$上有增有减，所以$A$中的不等式不恒成立，*A*错误；
因为函数$y=log\_{\frac{1}{3}}x$在$(0,+\infty )$上单调递减，
所以当$m>0$，$n>0$，$m>n$时，$log\_{\frac{1}{3}}m<log\_{\frac{1}{3}}n$，故*B*正确；
因为$y=e^{x}$在$R$上单调递增，所以当$m>n$时，$3m+2>3n+2$，
所以$e^{3m+2}>e^{3n+2}$，故*C*正确；
因为函数$y=\sqrt[ ]{x}$在$(0,+\infty )$上单调递增，
所以当$m>0$，$n>0$，$m>n$时，$\sqrt[ ]{m}>\sqrt[ ]{n}$，故*D*正确．
故选*BCD*．

11.【答案】$BC$

【解析】【分析】

本题考查分段函数的求值和数形结合思想，考查指数函数、对数函数图像与性质，函数与方程的综合应用，考查数形结合的思想，属于中档题．
根据分段函数的性质、指数函数、对数函数图像与性质和数形结合思想逐项判断即可．

【解答】
解：对于$A$：由$f\left(a\right)=1$，得$\left\{\begin{matrix}a>1\\log\_{3} (a−1)=1\end{matrix}\right.$或$\left\{\begin{matrix}a⩽1\\(\frac{1}{3})^{a}=1\end{matrix}\right.$，解得$a=4$或$a=0$，故*A*错误；

对于$B$：$f(\frac{2021}{2020})=log\_{3} (\frac{2021}{2020}−1)=log\_{3} \frac{1}{2020}=−log\_{3} 2020$，
因为$−log\_{3} 2020<0$，所以$f(f(\frac{2021}{2020}))=f(−log\_{3}2020)=(\frac{1}{3})^{−log\_{3} 2020}=3^{log\_{3} 2020}=2020$，
故*B*正确；

对于$C$：由$f(a)⩾3$，得$\left\{\begin{matrix}a>1\\log\_{3} (a−1)⩾3\end{matrix}\right.$或$\left\{\begin{matrix}a⩽1\\(\frac{1}{3})^{a}⩾3\end{matrix}\right.,$
解得$a⩾28$或$a⩽−1$，故*C*正确；

对于$D$：作出$f\left(x\right)$的图象，如下图所示：


又$f(1)=\frac{1}{3}$，结合图象可得$f\left(x\right)=k$有两个不同的实数根，
即$y=f(x)$图象与$y=k$图象有两个交点，所以$k⩾\frac{1}{3}$，故*D*错误．
故选*BC*．

12.【答案】$ACD$

【解析】【分析】

以水轮所在平面为坐标平面，以水面所在直线为$x$轴，以垂直于水面且过点$O$的直线为$y$轴，建立平面直角坐标系，点$P$距离水面的高度$y$关于时间$t$的函数为$y=Asin(ωt+φ)+B$，由已知列式求得$A$与$B$的值，再由周期求得$ω$，再求得$φ$，得到函数解析式，然后逐一核对四个选项得答案．
本题考查三角函数模型的选择及应用，考查$y=Asin(ωx+φ)+B$型函数的图象与性质，正确理解题意是关键，是拔高题．

【解答】
解：以水轮所在平面为坐标平面，以水面所在直线为$x$轴，以垂直于水面且过点$O$的直线为$y$轴，建立如下图所示平面直角坐标系$xAy$，

点$P$距离水面的高度$y$关于时间$t$的函数为$y=Asin(ωt+φ)+B$，设角$φ(−\frac{π}{2}<φ<0)$，
则
则$\left\{\begin{matrix}A+B=9\\−A+B=−3\end{matrix}\right.$，解$A=6$，$B=3$，
又水轮每分钟转动一周，则$ω=\frac{2π}{60}=\frac{π}{30}$，
$$y=6sin(\frac{π}{30}t+φ)+3(−\frac{π}{2}<φ<0)$$

当$t=0$时，$y=0$，代入得$φ=−\frac{π}{6}$，
故$y=6sin(\frac{π}{30}t−\frac{π}{6})+3$．
令$y>3$，即$2kπ<\frac{π}{30}t−\frac{π}{6}<π+2kπ$，解得$5+60k<t<35+60k$，$k\in N$，
故在转动一圈内，点$P$的高度在水面$3$米以上的持续时间为$30$秒，即$A$选项正确．
当$t\in [0,15]$时，$\frac{π}{30}t−\frac{π}{6}\in [−\frac{π}{6},\frac{π}{3}]$，当$\frac{π}{30}t−\frac{π}{6}=\frac{π}{3}$时，即$t=15$时，$y\_{max}=6sin\frac{π}{3}+3=3\sqrt[ ]{3}+3$，
点$p$距水面的的最大距离为$3\sqrt[ ]{3}+3$米，$B$选项错误．
当$t=10$时，水车旋转$10×\frac{π}{30}=\frac{π}{3}$，即$∠POP\_{0}=\frac{π}{3}$，故$PP\_{0}=6$，$C$选项正确．
$y=6sin(\frac{π}{30}t−\frac{π}{6})+3$，当$\frac{π}{30}t−\frac{π}{6}=\frac{π}{2}+2kπ$，即$t=20+60k$，$k\in N$，
故第二次到达最高点的时间为$t=20+60×1=80$，故*D*选项正确．
故选：$ACD$．

13.【答案】$(−\frac{5}{3}+2k,\frac{1}{3}+2k)\left(k\in Z\right)$

【解析】【分析】

本题考查正切型函数的单调性，属于基础题．
利用正切函数的单调性列出不等式直接求解即可．

【解答】

解：$∵f(x)=tan(\frac{π}{2}x+\frac{π}{3})$，
$∴$令$kπ−\frac{π}{2}<\frac{π}{2}x+\frac{π}{3}<kπ+\frac{π}{2}$，$k\in Z$，
解得$−\frac{5}{3}+2k<x<\frac{1}{3}+2k$，$k\in Z$，
所以函数的单调递增区间为$(−\frac{5}{3}+2k,\frac{1}{3}+2k)\left(k\in Z\right)$．

故答案为：$(−\frac{5}{3}+2k,\frac{1}{3}+2k)\left(k\in Z\right)$．

14.【答案】$−4\leq x\leq 5$

【解析】【分析】

略

【解答】
解析$\frac{1}{sin^{2}θ}+\frac{4}{cos^{2}θ}=(\frac{1}{sin^{2}θ}+\frac{4}{cos^{2}θ})⋅$ $(sin^{2}θ+cos^{2}θ) =5+\frac{cos^{2}θ}{sin^{2}θ}+\frac{4sin^{2}θ}{cos^{2}θ}\geq 5+2\sqrt[ ]{\frac{cos^{2} θ}{sin^{2} θ}·\frac{4sin^{2} θ}{cos^{2} θ}}=9$，当且仅当$\frac{cos^{2}θ}{sin^{2}θ}=\frac{4sin^{2}θ}{cos^{2}θ}$，即$sin^{2}θ=\frac{1}{3}$， $cos^{2}θ=\frac{2}{3}$时，$(\frac{1}{sin^{2}θ}+\frac{4}{cos^{2}θ})=9$，所以$∣2x−1∣\leq 9$，所以$−4\leq x\leq 5.$

15.【答案】$2π−2\sqrt[ ]{3}$

【解析】【分析】

本题考查了三角形中的几何计算，属于基础题．
由题设可得$AB=BC=AC=2$，求出一个扇形的面积并乘以$3$，减去三角形面积的$2$倍即可．

【解答】
解：由已知得$\overparen{AB}=\overparen{BC}=\overparen{AC}=\frac{2π}{3}$，
则$AB=BC=AC=2$，故扇形的面积为$\frac{2π}{3}$，
$△ABC$的高为$2×\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}=\sqrt[ ]{3}$，
莱洛三角形的面积扇形面积的$3$倍减去三角形面积的$2$倍，
$∴$所求面积为$3×\frac{2π}{3}−2×\frac{1}{2}×2×\sqrt[ ]{3}=2π−2\sqrt[ ]{3}$．
故答案为：$2π−2\sqrt[ ]{3}$．

16.【答案】$\{x|−\frac{π}{3}+kπ<x<\frac{π}{3}+kπ,k\in Z\}$

【解析】【分析】

本题主要考查了分段函数的单调性，考查了偶函数的性质，同时考查了余弦函数和正切函数的性质，属于中档题．
由题意可知函数$f(x)$在$[0,+\infty )$上单调递减，原不等式可化为$f(\sqrt[ ]{3})<f(tanx)$，再结合函数$f(x)$为$R$上的偶函数，不等式又化为$f(\sqrt[ ]{3})<f(|tanx|)$，利用函数$f(x)$的单调性即可求出结果．

【解答】
解：$∵$当$x\geq 0$时，函数$f\left(x\right)=\left\{\begin{matrix}cosπx,0\leq x<1\\−x,x\geq 1\end{matrix}\right.,$
$∴$函数$f(x)$在$[0,+\infty )$上单调递减，
不等式$f(tan\frac{π}{3})<f(tanx)$可化为$f\left(\sqrt[ ]{3}\right)<f\left(tanx\right)$，
又$∵$函数$f(x)$为定义在$R$上的偶函数，
$∴f(x)=f(|x|)$，
$∴$不等式可化为$f\left(\sqrt[ ]{3}\right)<f\left(\left|tanx\right|\right)$，
$∴|tanx|<\sqrt[ ]{3}$，$∴−\sqrt[ ]{3}<tanx<\sqrt[ ]{3}$，
$∴−\frac{π}{3}+kπ<x<\frac{π}{3}+kπ(k\in Z)$，
即满足$f(tan\frac{π}{3})<f(tanx)$的$x$的取值范围是$\{x|−\frac{π}{3}+kπ<x<\frac{π}{3}+kπ,k\in Z\}$，
故答案为：$\{x|−\frac{π}{3}+kπ<x<\frac{π}{3}+kπ,k\in Z\}$．

17.【答案】解：$(1)$原式$=(lg 25−lg \frac{1}{4})÷(10^{2})^{\frac{1}{2}}+1−\left[(\frac{5}{4})^{3}\right]^{−\frac{1}{3}}$
 $=(lg100)÷10+1−\frac{4}{5}$
$=\frac{2}{5}$．
$$(2)sin(\frac{11}{6}π)+cos(−\frac{20}{3}π)+tan(\frac{29}{4}π)$$

$$=−sin\frac{π}{6}+cos\frac{2π}{3}+tan\frac{π}{4}$$

$$=−\frac{1}{2}+(−\frac{1}{2})+1$$

$=0$．

【解析】$(1)$本题主要考查的是指数与对数的运算性质，属于基础题．
根据指数与对数的运算性质求解即可；
$(2)$本题主要考查的是特殊角的三角函数值与诱导公式，属于基础题．
根据诱导公式化简求解即可．

18.【答案】解：$(1)$原式$=\frac{−2sinα+cosα}{sinα+cosα}$，
又因为$sin^{2}α+cos^{2}α=1$，$sinα=−\frac{2\sqrt[ ]{5}}{5}$，$tanα<0$，
所以$cosα=\frac{\sqrt[ ]{5}}{5}$，
所以原式$=\frac{−2×\frac{−2\sqrt[ ]{5}}{5}+\frac{\sqrt[ ]{5}}{5}}{−\frac{2\sqrt[ ]{5}}{5}+\frac{\sqrt[ ]{5}}{5}}=−5;$
$(2)$因为$sin^{2}α+sin αcos α=−\frac{1}{5}$，
所以$5sin^{2}α+5sinαcosα=−sin^{2}α−cos^{2}α$，
即$6sin^{2}α+5sinαcosα+cos^{2}α=0$，
$(3sinα+cosα)(2sinα+cosα)=0$，
当$3sinα+cosα=0$时，$tanα=−\frac{1}{3}$
当$2sinα+cosα=0$时，$tanα=−\frac{1}{2}$．

【解析】本题考查诱导公式和同角三角函数函数关系进行化简求值，属于基础题．
$(1)$根据诱导公式然后利用$sin^{2}α+cos^{2}α=1$求出$cosα=\frac{\sqrt[ ]{5}}{5}$带入求出结果；
$(2)$直接利用解方程得出$(3sinα+cosα)(2sinα+cosα)=0$进而分情况求出结果．

19.【答案】解：由$log\_{2}(x−1)\leq 2$，得$0<x−1\leq 4$，解得$1<x\leq 5$，$∴B=\{x|1<x\leq 5\}$，
$(1)∵$“$x\in A$”是“$x\in B$”成立的必要不充分条件，
$∴B$是$A$的真子集，
则$\left\{\begin{matrix}2a−1>a−3\\a−3⩽1\\2a−1>5\end{matrix}\right.$，解得$3<a\leq 4$，
则$a$的取值范围为$(3,4]$；
$(2)$由题意得，$A\ne ⌀$且$A∩\left(∁\_{R}B\right)\ne ⌀$，
$∁\_{\_{R}}B=(−\infty ,1]∪(5+\infty )$，
$∴\left\{\begin{matrix}a−3<2a−1\\a−3<1\end{matrix}\right.$或$\left\{\begin{matrix}a−3<2a−1\\2a−1>5\end{matrix}\right.,$
解得$−2<a<4$或$a>3$，
$∴a>−2$，
则$a$的取值范围为$(−2+\infty ).$

【解析】本题考查含参数的集合关系的问题，集合之间的关系，充分必要条件的定义及应用，考查了转化的思想方法，属于中档题．
$(1)$先解出集合$B$，根据“$x\in A$”是“$x\in B$”成立的必要不充分条件得$B$是$A$的真子集，列出不等式组，解不等式组即可；
$(2)$由条件可得$A\ne ⌀$且$A∩\left(∁\_{R}B\right)\ne ⌀$，根据集合关系列出不等式组解出即可．

20.【答案】解：$(1)$由图中数据知$\left\{\begin{matrix}A+B=26\\−A+B=14\end{matrix}\right.⇒\left\{\begin{matrix}A=6,\\B=20.\end{matrix}\right.$
又$\frac{T}{2}=15−3=12=\frac{π}{ω}$，即$ω=\frac{π}{12}$，
当$x=3$时，$y=6sin(\frac{π}{12}×3+φ)+20=14$，
即$sin(\frac{π}{4}+φ)=−1$，$\frac{π}{4}+φ=−\frac{π}{2}+2kπ(k\in Z)$，
且$φ\in (−π,0)$，故$φ=−\frac{3}{4}π$，
即$y=6sin(\frac{π}{12}x−\frac{3}{4}π)+20$，$x\in [0,24]$；
$(2)$令$6sin(\frac{π}{12}x−\frac{3}{4}π)+20\geq 23$，
即$sin(\frac{π}{12}x−\frac{3}{4}π)\geq \frac{1}{2}$，
$\frac{π}{6}+2kπ\leq \frac{π}{12}x−\frac{3}{4}π\leq \frac{5π}{6}+2kπ(k\in Z)$，
$24k+11\leq x\leq 24k+19$，$k\in Z$，
又$x\in [0,24]$，故$x\in [11,19]$，
又$19−11=8$，
即老张可在$11:00∼19:00$外出活动，活动时长最长不超过$8$小时．

【解析】本题考查三角函数模型的应用，属于一般题．
$(1)$利用已知图象，求出$A$，$B$，$ω$和$φ$，即可得表达式，注意定义域；
$(2)$解$6sin(\frac{π}{12}x−\frac{3}{4}π)+20\geq 23$，得$x$的范围，即可得解．

21.【答案】解：$(1)∵f(x)$在$R$上为奇函数，$∴f\left(x\right)+f\left(−x\right)=0$，

即$log\_{a}\left(\sqrt[ ]{x^{2}+1}−mx\right)+log\_{a}\left(\sqrt[ ]{x^{2}+1}+mx\right)=0$，

$∴log\_{a}\left(x^{2}+1−m^{2}x^{2}\right)=0$，则$x^{2}+1−m^{2}x^{2}=\left(1−m^{2}\right)x^{2}+1=1$，
$∴m^{2}=1$，又$m>0$，解得$m=1$，经检验$m=1$满足题意，

则$f\left(x\right)=log\_{a}\left(\sqrt[ ]{x^{2}+1}−x\right)$，

易知函数$y=\sqrt[ ]{x^{2}+1}−x$在$\left(−\infty ,0\right]$上单调递减，且$y>0$，
函数$y=log\_{a}x\left(a>1\right)$在$(0,+\infty )$上单调递增，

$∴f\left(x\right)=log\_{a}\left(\sqrt[ ]{x^{2}+1}−x\right)$在$\left(−\infty ,0\right]$上单调递减，又$f(x)$在$R$上为奇函数，

则$f\left(x\right)$在$\left[0,+\infty \right)$上单调递减，

$∴f\left(x\right)$在$R$上单调递减；

$(2)∵f(x)$在$R$上为奇函数，
则存在$x\in R$，使$f\left(cos^{2}x+2t−1\right)+f\left(2sinx−t\right)=0$成立等价于

$f\left(cos^{2}x+2t−1\right)=f\left(−2sinx+t\right)$，

$∵f\left(x\right)$在$R$上单调递减，则存在$x\in R$使得$cos^{2}x+2t−1=−2sinx+t$成立，

$∴t=−cos^{2}x−2sinx+1=sin^{2}x−2sinx=\left(sinx−1\right)^{2}−1\in \left[−1,3\right]$，

令$u=2^{t},t\in [−1,3]$，则$u\in \left[\frac{1}{2},8\right]$，
由$g\left(t\right)=a4^{t}−2^{t+1}$最小值为$−\frac{2}{3}$，
设$ℎ(u)=au^{2}−2u=a(u−\frac{1}{a})^{2}−\frac{1}{a},u\in [\frac{1}{2},8]$，$a>1$，

$①$当$\frac{1}{a}⩽\frac{1}{2}$，即$a⩾2$时，$ℎ\left(u\right)\_{min}=ℎ(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}a−1=−\frac{2}{3}$，解得$a=\frac{4}{3}($舍$)$；

$②$当$\frac{1}{a}>\frac{1}{2}$，即$1<a<2$时，$ℎ\left(u\right)\_{min}=ℎ(\frac{1}{a})=\frac{1}{a}−\frac{2}{a}=−\frac{2}{3}$，解得$a=\frac{3}{2}$，
故存在$a$的值，且$a=\frac{3}{2}$，使$g\left(t\right)=a4^{t}−2^{t+1}$最小值为$−\frac{2}{3}$．

【解析】本题考查利用函数的奇偶性求参数，复合函数的单调性，正弦函数的性质，二次函数的最值，属于难题．
$(1)$根据函数奇偶性的定义，代入计算即可得到$m$的值，从而得到函数$f\left(x\right)$的解析式，根据复合函数的单调性即可得到其单调区间；

$(2)$根据题意，可得存在$x\in R$使得$cos^{2}x+2t−1=−2sinx+t$成立，分离常数$t$，根据正弦函数的值域可得$t$的范围，令$u=2^{t},t\in [−1,3]$，设$ℎ(u)=au^{2}−2u$，分类讨论$a$的范围，根据二次函数的性质代入计算，即可得到结果．

22.【答案】解：$(1)$若选$①g\_{1}(x)=2x$，则$f(x)=\frac{2ax+2^{x}}{a⋅4^{x}}$，定义域为$R$，
当$f(x)$为奇函数，$f(0)=\frac{1}{ a}\ne 0$，不满足奇函数的性质；
当$f(x)$为偶函数，则$f(−x)=\frac{−2ax+2^{−x}}{a⋅4^{−x}}=\frac{4^{x}(2^{−x}−2ax)}{a}=\frac{2^{x}−2ax⋅4^{x}}{a}$，
由$f(−x)=f(x)$，可得：$\frac{2^{x}−2ax⋅4^{x}}{a}=\frac{2ax+2^{x}}{a⋅4^{x}}$，整理得$2a=\frac{8^{x}−2^{x}}{x+x⋅16^{x}}(x\ne 0)$，
则$a$不是常数，即函数$f(x)=\frac{2ax+2^{x}}{a⋅4^{x}}$不可能为偶函数，不满足条件．
若选$②g\_{2}(x)=log\_{2}x$，则函数的定义域为$(0,+\infty )$，函数为非奇非偶函数，不满足条件．
若选$③g\_{3}(x)=x^{2}$，则$f(x)=\frac{ax^{2}+2^{x}}{a⋅4^{x}}$，定义域为$R$，
当$f(x)$为奇函数，$f(0)=\frac{1}{ a}\ne 0$，不满足奇函数的性质；
当$f(x)$为偶函数，则$f(−x)=f(x)$，
即$\frac{ax^{2}+2^{−x}}{a⋅4^{−x}}=\frac{4^{x}(ax^{2}+2^{−x})}{a}=\frac{2^{x}+ax^{2}⋅4^{x}}{a}=\frac{ax^{2}+2^{x}}{a⋅4^{x}}$，
整理得$a=\frac{2^{x}−8^{x}}{x^{2}(16^{x}−1)}=−\frac{2^{x}(1−4^{x})}{x^{2}(1−4^{2x})}=−\frac{2^{x}}{x^{2}(1+4^{x})}(x\ne 0)$不是常数，不满足条件．
若选$④g\_{4}(x)=8^{x}$，$f(x)=\frac{a⋅8^{x}+2^{x}}{a⋅4^{x}}=2^{x}+\frac{1}{a}·2^{−x}$，$f(−x)=2^{−x}+\frac{1}{a}·2^{x}$，
当$f(x)$为奇函数，$f(x)=−f(−x)⇒a=−1$；
当$f(x)$为偶函数，$f(x)=f(−x)⇒a=1$．
综上：$g(x)=8^{x}$，$a=\pm 1$．
$(2)$当$f(x)$为奇函数时，$f(x)=2^{x}−2^{−x}$，$x\in [1,2]$，则$2^{x}\in [2,4]$，
由于函数$y\_{1}=2^{x}$在$[1,2]$上为增函数，函数$y\_{2}=2^{−x}$在$[1,2]$为减函数，
所以，函数$f(x)=2^{x}−2^{−x}$在$[1,2]$上为增函数，则$f(x)\in [\frac{3}{2},\frac{15}{4}]$，
若对于任意的$x\in [1,2]$，都有$f(2x)\geq mf(x)$成立
$⇔m\leq \{\frac{f(2x)}{f(x)}\}\_{min}=\{\frac{2^{2x}−2^{−2x}}{2^{x}−2^{−x}}\}\_{min}=\{2^{x}+2^{−x}\}\_{min}$，
设$t=2^{x}\in [2,4]$，$φ(t)=t+\frac{1}{t}$，
根据对勾函数的性质可得$φ(t)=t+\frac{1}{t}$在$[2,4]$上单调递增，
所以$φ(t)\_{min}=φ(2)=\frac{5}{2}$，$∴m\leq \frac{5}{2}$．
所以$m$的取值范围是$(−\infty ,\frac{5}{2}]$．
$(3)$当$f(x)$为偶函数时，$f(x)=2^{x}+2^{−x}$，$f(2x)=2^{2x}+2^{−2x}=(2^{x}+2^{−x})^{2}−2$，
令$s=2^{x}+2^{−x}\geq 2\sqrt[ ]{2^{x}⋅2^{−x}}=2$，当且仅当$x=0$时，等号成立，
则方程$f(2x)=mf(x)$，即$s^{2}−2=ms(s\geq 2)$，$m=s−\frac{2}{s}=ℎ(s)$，
又$ℎ(s)=s−\frac{2}{s}$在$[2,+\infty )$单调递增，所以$ℎ(s)\geq 1.$
$①$当$m<1$，此时方程无解$;$
$②$当$m\geq 1$，存在唯一解$s\_{0}\in [2,+\infty )$，
又因为$f(x)=2^{x}+2^{−x}$为偶函数，不妨设$0\leq x\_{1}<x\_{2}$，
$$f(x\_{1})−f(x\_{2})=2^{x\_{1}}+2^{−x\_{1}}−(2^{x\_{2}}+2^{−x\_{2}})$$

$$=(2^{x\_{1}}−2^{x\_{2}})+(\frac{1}{2^{x\_{1}}}−\frac{1}{2^{x\_{2}}})=(2^{x\_{1}}−2^{x\_{2}})+\frac{2^{x\_{2}}−2^{x\_{1}}}{2^{x\_{1}+x\_{2}}}$$

$$=\frac{\left(2^{x\_{1}}−2^{x\_{2}}\right)\left(2^{x\_{1}+x\_{2}}−1\right)}{2^{x\_{1}+x\_{2}}}$$

因为$0\leq x\_{1}<x\_{2}$，则$2^{x\_{1}}−2^{x\_{2}}<0$，$x\_{1}+x\_{2}>0$，所以$2^{x\_{1}+x\_{2}}>1$，所以$f(x\_{1})<f(x\_{2})$，
所以$f(x)$在$[0,+\infty )$单调递增，在$(−\infty ,0)$单调递减，
$(i)$当$m=1$时，$s\_{0}=2$，此时方程有唯一解$x=0;$
$(ii)$当$m>1$时，$s\_{0}>2$，此时方程有两个解$;$
下证必要性：令$F(x)=2^{x}+2^{−x}−s\_{0}$，该函数的定义域为$R$
$F(−x)=2^{−x}+2^{x}−s\_{0}=F(x)$，则$F(x)$为偶函数，$F(x)$在$[0,+\infty )$单调递增，
$F(0)=2−s\_{0}<0$，$F(log\_{2}s\_{0})=2^{log\_{2}s\_{0}}+2^{−log\_{2}s\_{0}}−s\_{0}=2^{−log\_{2}s\_{0}}>0$
所以$F(x)$在$(0,log\_{2}s\_{0})$有一个零点，
又因为函数$F(x)$是偶函数，则函数$F(x)$在$(−log\_{2}s\_{0},0)$也有一个零点，
所以当$m>1$，$s\_{0}>2$时原方程一共有两个解．

【解析】本题主要考查函数奇偶性与单调性的综合，考查方程解的个数的求法，考查分类讨论与转化思想的应用，是个难题．
$(1)$根据所选条件，结合奇函数和偶函数的定义可得出$a$的等式或表达式，可求得对应的实数$a$的值$;$
$(2)$由已知条件可得出$f(x)=2^{x}−2^{−x}$，由参变量分离法得出$m\leq 2^{x}+2^{−x}$，求出函数$y=2^{x}+2^{−x}$在区间$[1,2]$上的最小值，由此可求得实数$m$的取值范围$;$
$(3)$设$s=2^{x}+2^{−x}\geq 2$，由参变量分离法得出$m=s−\frac{2}{s}=ℎ(s)$，分析函数$ℎ(s)$在区间$[2,+\infty )$上的单调性，由此可得出当$m$在不同取值下方程$f(2x)=mf(x)$的解的个数．