

江苏省仪征中学 2023—2024 学年第一学期周末练习 12

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合要求）

1. 已知集合 $A = \{x | 0 < x \leq 3\}$, $B = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 A. $(0, 2]$ B. $[-1, 3]$ C. $[-1, 2]$ D. $(0, 3]$
2. 若命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, \sin x > 1$, 则 $\neg p$ 为 ()
 A. $\exists x \in \mathbf{R}, \sin x \leq 1$ B. $\forall x \in \mathbf{R}, \sin x > 1$
 C. $\forall x \notin \mathbf{R}, \sin x \leq 1$ D. $\forall x \in \mathbf{R}, \sin x \leq 1$
3. 若函数 $f(x)$ 满足 $f(3^x) = x$, 则 $f(7) =$ ()
 A. 3^7 B. 7^3 C. $\log_3 7$ D. $\log_7 3$
4. 下列各组函数，既是奇函数，又在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增的为 ()
 A. $y = \sin x, y = \cos x$ B. $y = \sin x, y = \tan x$
 C. $y = \tan x, y = \cos x$ D. $y = \tan x, y = -\sin x$
5. 某企业由于引进新的技术，产值逐年增长，如果从 2023 年起，每年的产值比上一年平均增加 20%，那么至少经过 () 年产值翻两番（即原来的 4 倍）.（参考数据： $\lg 2 = 0.3010, \lg 3 = 0.4771$ ）
 A. 5 B. 8 C. 11 D. 14
6. 对于实数 a, b, c ，下列命题正确 是 ()
 A. 若 $a > b$, 则 $ac^2 > bc^2$ B. 若 $a > b$, 则 $a^2 > b^2$
 C. 若 $a > b$, 则 $a|a| > b|b|$ D. 若 $a > b > c > 0$, 则 $\frac{b}{a-b} < \frac{c}{a-c}$.
7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < 1 \\ -\sin \pi x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ 若 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4)$ ($x_1 < x_2 < x_3 < x_4$), 则 $\frac{e^{x_3+x_4}}{e^{x_1} + e^{x_2}} =$ ()
 A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{e^3}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{e^3}{2}$
8. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，对于任意的 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ ($x_1 \neq x_2$), 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1^2 - x_2^2} < 3$ 成立，且满足 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4}$, 若 $f(\cos \alpha) > -3\sin^2 \alpha$, $\alpha \in [-\pi, \pi]$, 则实数 α 的取值范围是 ()
 A. $\left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ B. $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$
 C. $\left(-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ D. $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分）

9. 下列说法中正确的有 ().
 A. $0.5^{1.2} > 0.5^{1.5}$ B. $0.5^{\frac{2}{3}} > 0.8^{\frac{2}{3}}$ C. $\log_2 \pi > \log_2 3$ D. $\log_5 4 < \log_{0.2} 3$

10. 已知 $x+3y=1(x>0, y>0)$ ，则下列说法中正确的有（ ）

A. xy 的最大值为 $\frac{1}{12}$

B. 2^x+8^y 的最小值为 $2\sqrt{2}$

C. x^2+9y^2 最大值为 $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值为 $4+2\sqrt{3}$

11. 已知函数 $f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ ，则下列说法中正确的有（ ）

A. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{k}{2}\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbb{Z})$ 对称

B. $f(x)$ 的图象可由函数 $y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象上每一个点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变）得到

C. 若 $f(x)$ 在区间 $(-\lambda, \lambda)$ 上单调，则实数 λ 的取值范围为 $\left(0, \frac{\pi}{6}\right]$

D. 若存在 $x_1, x_2 \in \left[-\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$ ，使得 $f(x_1) \cdot f(x_2) = 4$ ，则 $x_1 - 2x_2$ 的最大值为 $\frac{10}{3}\pi$

12. 已知函数 $f(x)=\frac{1-10^x}{1+10^x}$ 和 $g(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$ ，则下列说法中正确的有（ ）

A. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的奇偶性相同

B. $f(x)$ 与 $g(x)$ 在各自定义域上是增函数

C. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称

D. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象关于直线 $y=-x$ 对称

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 已知幂函数 $y=f(x)$ 的图象过点 $(3, \sqrt{3})$ ，则 $f(4)=$ _____.

14. 折扇（如图 1）是我国传统文化的延续，已有四千年左右的历史. 图 2 为其结构简化图，在扇面 $ABCD$ 中，延长 DA, CB 交于点 O ，已知 $OC=3OB=30\text{cm}$ ，弧 CD 的长度为 60cm ，则该扇面 $ABCD$ 的面积为_____ cm^2 .



图1

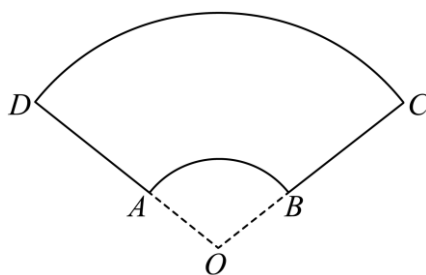


图2

15. 已知函数 $f(x)$ 满足：① $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1)=f(x-1)$ ；② $f(x)$ 的值域为 $[0, 4]$ ，则 $f(x)=$ _____。（写出满足要求的一个函数即可）

16. 已知函数 $f(x)=|x-2|+|x+a|$ ，实数 a 满足： $\forall n \in \mathbb{N}^*, a^2-2a+1-\frac{1}{n^2}<0$ ，则 a 的值为_____，若 $f\left(3m+\frac{1}{2}\right)<f(2m-1)$ ，则实数 m 的取值范围为_____.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17. (1) 已知 $\frac{1}{x^2} - x^{-\frac{1}{2}} = 2$ ，求 $x + \frac{1}{x}$ 的值；

(2) 求值： $9^{\frac{1}{2}} + 2^{\log_2 3} - (\lg 4 + \lg 25)$ ．

18. 给出下列三个条件：①角 α 的终边经过点 $P(3m, -4m)(m \neq 0)$ ；② $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{1}{7}$ ；

③ $3\cos^2 \alpha - 4\sin \alpha \cos \alpha = 3(\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$ ．

请从这三个条件中任选一个，解答下列问题：

(1) 若 α 为第四象限角，求 $\sin \alpha - 2\cos \alpha$ 的值；

(2) 求 $\frac{\sin(\pi - \alpha)}{\sin^2(\pi + \alpha)\cos(-\alpha) + \sin(2\pi - \alpha)\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$ 的值．

19. 已知 $A = \{x \mid x^2 + 2x - a^2 - 2a > 0\}$ ， $B = \left\{y \mid y = 6\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 9, -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}\right\}$ ．

(1) 若 $a = 3$ ，求 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cup B$ ；

(2) 若“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的必要不充分条件，求实数 a 的取值范围．

20. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ， $\left(\omega > 0, |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}\right)$ 的图象经过点 $A\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$ ．

(1) 若 A 到 $f(x)$ 图象对称轴的最近距离为 $\frac{\pi}{2}$ ，求 $f(x)$ 的解析式；

(2) 若 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称，问是否存在实数 ω ，使得 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调？若存在，求出满足要求的所有 ω 的值；若不存在，请说明理由．

21. 已知函数 $f(x) = \log_2(4^x + 1) + ax + m$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 记 $D = [-1, \log_2(4 + \sqrt{15})]$,

① 当 $x \in D$ 时, 求 $f(x)$ 的值域 (用 m 表示);

② 若存在 $r, s, t \in D$, 使得 $f(r) + f(s) = f(t)$, 求实数 m 的范围.

22. 已知函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在区间 D 上都有意义, 若存在 $r > 0$, 对于 $\forall x \in D$, 恒有 $|f(x) - g(x)| \leq r$, 则称函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 D 上为“ r 度接近”.

(1) 若 $f(x) = \sin x, g(x) = \cos^2 x$, 求证: $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上为“1 度接近”.

(2) 若 $f(x) = (x-1)|x-a|$, $g(x) = b$ (其中 a, b 为常数), 且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[4, 8]$ 上为“2 度接近”, 求实数 a, b 的值.