

江苏省仪征中学 2022—2023 学年度第二学期高一期末数学模拟试卷 2

一、单选题

1. 若 i 为虚数单位，复数 z 满足 $z(1+i) = |3+4i|$ ，则 z 的虚部为 ()
 A. $\frac{5}{2}i$ B. $\frac{5}{2}$ C. $-\frac{5}{2}i$ D. $-\frac{5}{2}$
2. 若数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均数为 $\bar{x}$ ，方差为 s^2 ，则 $5x_1+2, 5x_2+2, \dots, 5x_n+2$ 的平均数和方差分别为 ()
 A. $\bar{x}, s^2$ B. $5\bar{x}+2, s^2$ C. $5\bar{x}+2, 25s^2$ D. $\bar{x}, 25s^2$
3. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (1, 0)$, $\vec{c} = (3, 4)$. 若 $(\vec{a} + \lambda\vec{b}) \parallel \vec{c} (\lambda \in \mathbb{R})$ ，则实数 $\lambda =$ ()
 A. 2 B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$
4. 函数 $y = \ln x - 6 + 2x$ 的零点一定位于的区间是 ()
 A. (0, 1) B. (1, 2) C. (2, 3) D. (3, 4)
5. 设 α 是空间中的一个平面， l, m, n 是三条不同的直线，则 ()
 A. 若 $m \subset \alpha, n \subset \alpha, l \perp m, l \perp n$ ，则 $l \perp \alpha$
 B. 若 $l \parallel m, m \parallel n, l \perp \alpha$ ，则 $n \perp \alpha$
 C. 若 $l \parallel m, m \perp \alpha, n \perp \alpha$ ，则 $l \perp n$
 D. 若 $m \subset \alpha, n \perp \alpha, l \perp n$ ，则 $l \parallel m$
6. 某射击爱好者射击一次命中目标的概率为 p ，已知他连续射击三次，每次射击的结果相互独立，则他至少有一次命中目标的概率为 $\frac{37}{64}$ ，则 p 的值为 ()
 A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ D. $\frac{\sqrt{37}}{8}$
7. 设锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，若 $A = \frac{\pi}{3}, a = \sqrt{3}$ ，则 $b^2 + c^2 + bc$ 的取值范围为 ()
 A. (1, 9] B. (3, 9] C. (5, 9] D. (7, 9]
8. 已知函数 $f(x) = \sin \omega x (\sin \omega x + \sqrt{3} \cos \omega x) (\omega > 0)$ ，若函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y = 1$ 在 $(0, \pi)$ 上有 3 个不同的交点，则 ω 的取值范围是 ()
 A. $(\frac{7}{6}, \frac{3}{2}]$ B. $(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}]$ C. $(\frac{6}{5}, \frac{3}{2}]$ D. $(\frac{6}{5}, \frac{4}{3}]$

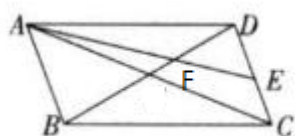
二、多选题

9. 袋子中有 5 个大小质地完全相同的球，分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5，从中有放回地依次随机摸出 2 个球，甲表示事件“第一次取出的球的数字是 1”，乙表示事件“第一次取出的球的数字是偶数”，丙表示事件“两次取出的球的数字都是偶数”，丁表示事件“两次取出的球的数字之和为 6”，则
 A. 甲与乙是对立事件 B. 甲与乙是互斥事件
 C. 丙与丁相互独立 D. 甲与丁相互独立

10. 下列说法正确的是()

- A. 方向为北偏西 60° 的向量与方向为东偏南 30° 的向量是共线向量
 B. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别 a, b, c , 若 $a\cos A = b\cos B$, 则 $\triangle ABC$ 一定是等腰直角三角形
 C. 若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} > 0$, 则 $\triangle ABC$ 是锐角三角形
 D. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $B = \frac{\pi}{3}$, $a = 2\sqrt{3}$, 若 $\triangle ABC$ 有两解, 则 b 的取值范围是 $(3, 2\sqrt{3})$

11. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, $|\overrightarrow{AD}| = 2|\overrightarrow{AB}| = 2$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 1$, E 为 CD 的中点, AE 与 DB 相交于 F , 则下列说法一定正确的是()



- A. $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$
 B. $\overrightarrow{BF}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量为 $\vec{0}$
 C. $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AB} = 1$
 D. 若 $\alpha = \frac{1}{2}\angle DEF$, 则 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

12. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 棱长为1, 点 P 为线段 A_1C 上的动点(包含线段端点), 则下列结论正确的是()

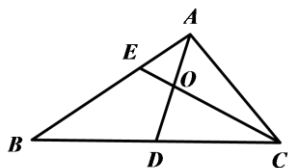
- A. 当 $\overrightarrow{A_1C} = 3\overrightarrow{A_1P}$ 时, $D_1P \parallel$ 平面 BDC_1
 B. 当 P 为 A_1C 中点时, 四棱锥 $P - AA_1D_1D$ 的外接球表面为 $\frac{9}{2}\pi$
 C. $AP + PD_1$ 的最小值为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$
 D. 当 $A_1P = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, 点 P 是 $\triangle AB_1D_1$ 的重心

三、填空题

13. 化简 $4\cos 80^\circ + \sqrt{3}\tan 10^\circ =$ _____.

14. 在对树人中学高一年级学生的身高调查中, 采用样本比例分配的分层随机抽样, 如果不知道样本数据, 只知道抽取了男生20人, 其平均数和方差分别为170和13, 抽取了女生30人, 其平均数和方差分别为160和38.估计总样本的方差为_____.

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, E 在边 AB 上, $AC = 2$, $BE = 2EA$, AD 与 CE 的交点为 O . 若 $|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{2}$, 则 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} =$ _____.



16. 在四棱锥 $P - ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为2的正方形, 侧面 $PAB \perp$ 底面 $ABCD$, 且 $\angle APB = 60^\circ$, 当 $\triangle PAB$ 的面积最大时, 四棱锥 $P - ABCD$ 的高为_____, 四棱锥 $P - ABCD$ 外接球的表面积为_____.

四、解答题

17. 已知复数 $z = (2 - mi)(1 - i) (m \in \mathbb{R})$.

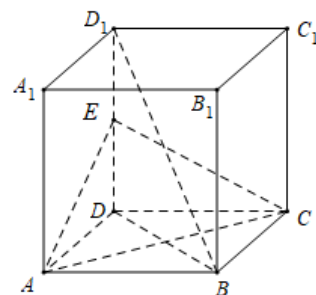
(1) 若 z 是纯虚数, 求 m 的值;

(2) 若 $\bar{z}$ 在复平面上对应的点在第四象限, 求 m 的取值范围.

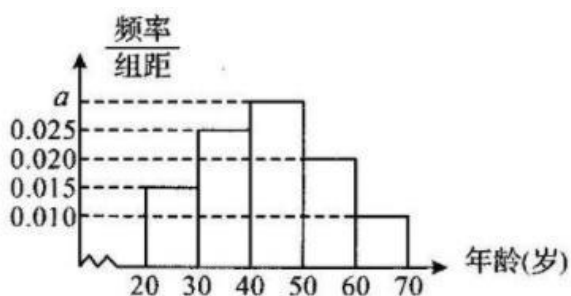
18. 如图, 在直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面四边形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 互相平分, E 为 DD_1 的中点.

(1) 求证: $BD_1 \parallel \text{平面} AEC$;

(2) 若_____, 则平面 $AEC \perp \text{平面} BB_1D_1D$. 试在三个条件 “①四边形 $ABCD$ 是平行四边形; ②四边形 $ABCD$ 是矩形; ③四边形 $ABCD$ 是菱形” 中选取一个, 补充在上面问题的横线上, 使得结论成立, 并证明.



19. 第24届北京冬季奥林匹克运动会于2022年2月4日至2月20日由北京和张家口联合举办, 这是中国历史上第一次举办冬季奥运会, 它掀起了中国人民参与冬季运动的热潮. 某比赛场馆为了顺利完成比赛任务, 招募了100名志愿者, 并分成医疗组和服务组, 根据他们的年龄分布得到如图频率分布直方图.



(1) 试估计100名志愿者的平均年龄及第75百分位数;

(2) 已知医疗组40人, 服务组60人, 如果按分层抽样的方法从医疗组和服务组中共选取5人, 再从这5人中选取3人组成综合组, 求综合组中至少有1人来自医疗组的概率.

20. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 在下列三个条件中任选一个作为已知条件, 解答问题.

① $2\sin A - \sin C - 2\sin B \cos C = 0$; ② $2S = \sqrt{3} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}$ (其中 S 为 $\triangle ABC$ 的面积);

③ $a^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} ac \sin B + c^2 = b^2$. 注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

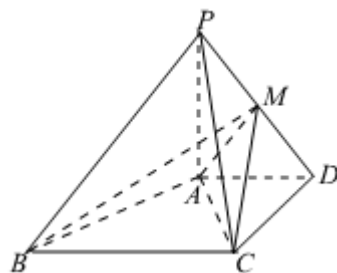
(1) 若 $b = 4, ac = 3$, 求 $a + c$ 的值;

(2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 求 $\frac{a^2 + c^2}{b^2}$ 的取值范围.

21. 如图, 在四棱锥 $P - ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD \perp CD$, 且 $AD = CD = 1, BC = 2, PA = 1$.

(1) 求证: $AB \perp PC$;

(2) 点 M 在线段 PD 上, 二面角 $M - AC - D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 求三棱锥 $M - ACP$ 体积.



22. 已知函数 $f(x) = \sin \omega x - \sqrt{3} \cos \omega x (\omega > 0)$ 的最小正周期为 π .

(1) 求证: 函数 $g(x) = f(x) - x$ 在 $[0, \pi]$ 上至少有两个零点;

(2) 若关于 x 的方程 $f(x)[f(x) - m] + 2m = 0$ 在 $[\frac{7}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi]$ 上恰有三个根,

求实数 m 的取值范围.

高一期末数学模拟试卷2 答案和解析

1. 【答案】D

解：因为 $z(1+i) = |3+4i| = 5$ ，则 $z = \frac{5}{1+i} = \frac{5(1-i)}{2} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}i$ ，

所以复数 z 的虚部为 $-\frac{5}{2}$ 。故选D。

2. 【答案】C

解：∵数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均数是 $\bar{x}$ ，方差是 s^2 ，∴ $\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} = \bar{x}$ ，

$$\therefore \frac{5x_1+2+5x_2+2+\dots+5x_n+2}{n} = 5\bar{x} + 2,$$

∴ $5x_1+2, 5x_2+2, \dots, 5x_n+2$ 的方差是：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n}[(5x_1+2-5\bar{x}-2)^2 + (5x_2+2-5\bar{x}-2)^2 + \dots + (5x_n+2-5\bar{x}-2)^2] \\ &= \frac{25}{n}[(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \dots + (x_n-\bar{x})^2] = 25s^2. \text{ 故选 C.} \end{aligned}$$

3. 【答案】C

解：∵向量 $\vec{a} = (1,2)$ ， $\vec{b} = (1,0)$ ， $\vec{c} = (3,4)$ 。∴ $\vec{a} + \lambda\vec{b} = (1,2) + \lambda(1,0) = (1+\lambda, 2)$ ，

∴ $(\vec{a} + \lambda\vec{b}) \parallel \vec{c} (\lambda \in \mathbb{R})$ ，∴ $4(1+\lambda) - 3 \times 2 = 0$ ，解得 $\lambda = \frac{1}{2}$ 。故选：C。

4. 【答案】C

解：易知函数 $y = \ln x - 6 + 2x$ 是增函数，令 $f(x) = \ln x - 6 + 2x$ ，

又 $f(1) = -4 < 0, f(2) = \ln 2 - 2 < 0, f(3) = \ln 3 > 0$ ，则 $f(2) \cdot f(3) < 0$ ，

根据函数的零点存在定理可知，该函数的零点一定在区间 $(2,3)$ 内。故选C。

5. 【答案】B

解：由 α 是空间中的一个平面， l, m, n 是三条不同的直线，知：

在A中，若 $m \subset \alpha, n \subset \alpha, l \perp m, l \perp n$ ，

由线面垂直的判定定理可知，当直线 m, n 相交时才能得到 $l \perp \alpha$ ，

若直线 m, n 平行，则不能推出 $l \perp \alpha$ ，故A错误；

在B中，若 $l \parallel m, m \perp n$ ，则 $l \perp n$ ，又 $l \perp \alpha$ ，则可得 $n \perp \alpha$ ，故B正确；

在C中，若 $m \perp \alpha, n \perp \alpha$ ，则 $m \parallel n$ ，又 $l \parallel m$ ，则 $l \parallel n$ ，故C错误；

在D中，若 $m \subset \alpha, n \perp \alpha, l \perp n$ ，则 l 与 m 相交、平行或异面，故D错误。故选：B。

6. 【答案】A

解：因为射击一次命中目标的概率为 p ，

所以射击一次未命中目标的概率为 $1-p$ ，

因为每次射击结果相互独立，所以三次都未命中的概率为 $(1-p)^3$ ，

因为连续射击三次,至少有一次命中的对立事件为三次都未命中,

所以连续射击三次,至少有一次命中的概率为 $1 - (1 - p)^3 = \frac{37}{64}$,解得 $p = \frac{1}{4}$. 故选 A.

7. 【答案】D

【解析】由正弦定理求出 $b = 2\sin B, c = 2\sin\left(\frac{2\pi}{3} - B\right)$,再由余弦定理可得 $b^2 + c^2 + bc$
 $= 8\sin B \sin\left(\frac{2\pi}{3} - B\right) + 3$,化为 $5 + 4\sin\left(2B - \frac{\pi}{6}\right)$,结合角的范围,利用正弦函数的性质可得结论.因为 $A = \frac{\pi}{3}, a = \sqrt{3}$,

由正弦定理可得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin\left(\frac{2\pi}{3} - B\right)}$,则有 $b = 2\sin B, c = 2\sin\left(\frac{2\pi}{3} - B\right)$,

由 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 为锐角,可得 $\begin{cases} 0 < B < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < \frac{2\pi}{3} - B < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$,

$$\therefore \frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < 2B - \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} < \sin\left(2B - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \Rightarrow 2 < 4\sin\left(2B - \frac{\pi}{6}\right) \leq 4,$$

由余弦定理可得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow 3 = b^2 + c^2 - bc$,

$$\begin{aligned} \text{因此有 } b^2 + c^2 + bc &= 2bc + 3 = 8\sin B \sin\left(\frac{2\pi}{3} - B\right) + 3 = 4\sqrt{3}\sin B \cos B + 4\sin^2 B + 3 \\ &= 2\sqrt{3}\sin 2B - 2\cos 2B + 5 = 5 + 4\sin\left(2B - \frac{\pi}{6}\right) \in (7, 9] \end{aligned}$$

8. 【答案】A

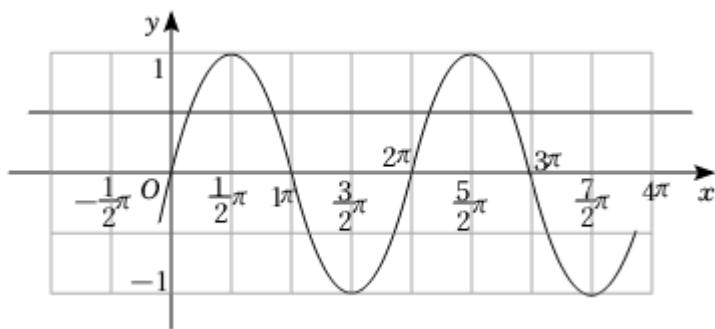
$$\text{解: } f(x) = \sin^2 \omega x + \sqrt{3}\sin \omega x \cos \omega x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x - \frac{1}{2}\cos 2\omega x = \frac{1}{2} + \sin\left(2\omega x - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{由 } f(x) = 1 \text{ 得 } \frac{1}{2} + \sin\left(2\omega x - \frac{\pi}{6}\right) = 1, \text{ 得 } \sin\left(2\omega x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\text{当 } 0 < x < \pi \text{ 时, } 0 < 2\omega x < 2\omega\pi, -\frac{\pi}{6} < 2\omega x - \frac{\pi}{6} < 2\omega\pi - \frac{\pi}{6},$$

$$\text{由 } \sin x = \frac{1}{2}, \text{ 得 } x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ 或 } x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \text{ 是整数,}$$



则右侧第一个根为 $x = \frac{\pi}{6}$, 第二个根为 $x = \frac{5\pi}{6}$, 第三个为 $x = \frac{13\pi}{6}$, 第四个根为 $x = \frac{17\pi}{6}$,

若 $f(x)$ 与 $y = 1$ 在 $(0, \pi)$ 上有 3 个不同的交点,

则 $\frac{13\pi}{6} < 2\omega\pi - \frac{\pi}{6} \leq \frac{17\pi}{6}$, 得 $\frac{7}{3} < 2\omega \leq 3$, 得 $\frac{7}{6} < \omega \leq \frac{3}{2}$, 即 ω 的取值范围是 $(\frac{7}{6}, \frac{3}{2}]$, 故选: A.

9. 【答案】BD

解: 设甲, 乙, 丙, 丁事件分别对应 A, B, C, D ,

$$P(A) = \frac{1}{5}, P(B) = \frac{2}{5}, P(C) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25},$$

丁包含的可能有 $(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)$, 共 5 个,

$$P(D) = \frac{5}{5 \times 5} = \frac{1}{5}, P(CD) = \frac{2}{5 \times 5} = \frac{2}{25}, P(AD) = \frac{1}{5 \times 5} = \frac{1}{25},$$

对于 A, B , 显然甲乙事件不能同时发生, 又 $P(A) + P(B) = \frac{3}{5} \neq 1$, 则 A 错误; B 正确;

对于 C , $P(CD) = \frac{2}{25}$, $P(C) \cdot P(D) = \frac{4}{125}$, 则 $P(CD) \neq P(C)P(D)$, 则 C 错误;

对于 D , $P(AD) = \frac{1}{25}$, $P(A) \cdot P(D) = \frac{1}{25}$, 则 $P(AD) = P(A) \cdot P(D)$, D 正确, 故选 BD .

10. 【答案】AD

解: 对于 A , 因为这两个向量的方向是相反的, 所以是共线向量, 故 A 正确;

对于 B , 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a \cos A = b \cos B$, 由正弦定理可得 $\sin A \cos A = \sin B \cos B$,

$$\therefore \sin 2A = \sin 2B, \therefore 2A = 2B \text{ 或 } 2A + 2B = \pi, \therefore A = B \text{ 或 } A + B = \frac{\pi}{2},$$

则 $\triangle ABC$ 是等腰三角形或直角三角形, B 错误;

对于 C , 由 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| |\vec{AC}| \cos A > 0$, 得 $\cos A > 0$,

又 $0 < A < 180^\circ$, 所以角 A 为锐角, 但角 A 不一定是 $\triangle ABC$ 的最大角,

则 $\triangle ABC$ 不一定为锐角三角形, 故 C 错误;

对于 D , 若 $\triangle ABC$ 有两解, 则 $a \sin B < b < a$, 所以 $3 < b < 2\sqrt{3}$, 故 D 正确.

11. 【答案】ABC

解: 因为在四边形 $ABCD$ 中, $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$, 所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

对于 A , 因为 $\vec{AE} = \vec{AD} + \vec{DE} = \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AB}$,

$$\text{设 } \overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{AE} = \lambda \left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \right) = \lambda \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \lambda \overrightarrow{AB},$$

因为 B, F, D 三点共线, 所以 $\lambda + \frac{1}{2} \lambda = 1$, 所以 $\lambda = \frac{2}{3}$,

所以 $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AD}$, 所以 A 正确;

对于 B , 因为 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AD \cdot AB \cos \angle BAD = 1$,

$$\text{所以 } BD = \sqrt{AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB \cos \angle BAD} = \sqrt{1 + 4 - 2} = \sqrt{3},$$

因为 $AD^2 = AB^2 + BD^2$, 所以 $\angle ABD = 90^\circ$, 所以 $\overrightarrow{BF}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量为 $\vec{0}$, 故 B 正确;

对于 C , $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AD} \right) \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}^2 + \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 1 = 1$, C 正确;

$$\text{对于 } D, \text{ 因为 } |\overrightarrow{AF}| = \sqrt{\frac{1}{9} \overrightarrow{AB}^2 + \frac{4}{9} \overrightarrow{AD}^2 + \frac{4}{9} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}} = \frac{\sqrt{21}}{3},$$

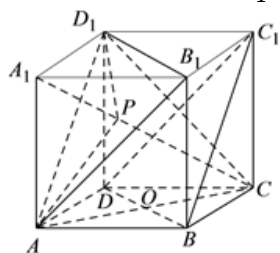
$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB} \rangle = \frac{\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AF}| |\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{\frac{\sqrt{21}}{3}} = \frac{\sqrt{21}}{7},$$

如果 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\alpha = \frac{1}{2} \angle DEF = \frac{1}{2} \angle FAB = 30^\circ$,

所以 $\angle FAB = 60^\circ$, 不满足 $\cos \angle FAB = \frac{\sqrt{21}}{7}$, D 不正确. 故选 ABC .

12. 【答案】ACD

解: 对于 A , 连接 AB_1, B_1D_1 ,



$$\text{则 } V_{A-A_1B_1D_1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}, \quad S_{\triangle AB_1D_1} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad A_1C = \sqrt{3},$$

设点 A_1 到平面 AB_1D_1 的距离为 h ,

$$\text{则 } \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times h = \frac{1}{6}, \text{ 解得 } h = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 所以 } h = \frac{1}{3} A_1C,$$

则当 $\overrightarrow{A_1C} = 3 \overrightarrow{A_1P}$ 时, P 为 A_1C 与平面 AB_1D_1 的交点,

又 $AD_1 // BC_1$, $AD_1 \not\subset$ 平面 BDC_1 , $BC_1 \subset$ 平面 BDC_1 , 所以 $AD_1 //$ 平面 BDC_1 ,

同理可证 $AB_1 //$ 平面 BDC_1 , $AD_1 \cap AB_1 = A$, $AD_1, AB_1 \subset$ 平面 AB_1D_1 ,

所以平面 $AB_1D_1 //$ 平面 BDC_1 , $D_1P \subset$ 平面 AB_1D_1 , 所以 $D_1P //$ 平面 BDC_1 ,

对于 B , 当点 P 为 A_1C 的中点时, 四棱锥 $P-AA_1D_1D$ 为正四棱锥,

设平面 AA_1D_1D 的中心为 O , 四棱锥 $P-AA_1D_1D$ 的外接球半径为 R ,

$$\text{则 } (R - \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = R^2, \text{ 解得 } R = \frac{3}{4},$$

所以四棱锥 $P-AA_1D_1D$ 的外接球表面积为 $\frac{9\pi}{4}$,

对于 C , 连接 AC, D_1C , 则 $Rt \triangle A_1AC \cong Rt \triangle A_1D_1C$, 所以 $AP = D_1P$,

由等面积法可得, AP 的最小值为 $\frac{AA_1 \cdot AC}{A_1C} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 所以 $AP + PD_1$ 的最小值为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$,

对于 D , 由以上分析可得, 当 $A_1P = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, A_1P 即三棱锥 $A_1 - D_1AB_1$ 的高,

所以 $A_1P \perp$ 平面 D_1AB_1 , 又三棱锥 $A_1 - D_1AB_1$ 为正三棱锥, 所以点 P 是 $\triangle AB_1D_1$ 的重心, 故选: ACD .

13. 【答案】1

$$\begin{aligned} \text{解: } 4\cos 80^\circ + \sqrt{3}\tan 10^\circ &= 4\sin 10^\circ + \sqrt{3} \frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{4\sin 10^\circ \cos 10^\circ + \sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ} \\ &= \frac{2\sin 20^\circ + \sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{2\sin(30^\circ - 10^\circ) + \sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ} \\ &= \frac{2\sin 30^\circ \cos 10^\circ - 2\sin 10^\circ \cos 30^\circ + \sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ} = 1. \end{aligned}$$

14. 【答案】52

解: 把男生样本记为 $x_1, x_2, \dots, x_{20}$, 其平均数记为 $\bar{x}$, 方差记为 s_x^2 ;

把女生样本记为 $y_1, y_2, \dots, y_{30}$, 其平均数记为 $\bar{y}$, 方差记为 s_y^2 ;

把总样本数据的平均数记为 $\bar{z}$, 方差记为 s^2 . 则 $\bar{z} = \frac{20 \times 170 + 30 \times 160}{50} = 164$,

根据方差的定义, 总样本方差为

$$s^2 = \frac{1}{50} \left[\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{z})^2 + \sum_{j=1}^{30} (y_j - \bar{z})^2 \right] = \frac{1}{50} \left[\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x} + \bar{x} - \bar{z})^2 + \sum_{j=1}^{30} (y_j - \bar{y} + \bar{y} - \bar{z})^2 \right]$$

由 $\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{20} x_i - 20\bar{x} = 0$, 可得 $\sum_{i=1}^{20} 2(x_i - \bar{x})(\bar{x} - \bar{z}) = 2(\bar{x} - \bar{z}) \sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x}) = 0$.
同理可得 $\sum_{j=1}^{30} 2(y_j - \bar{y})(\bar{y} - \bar{z}) = 0$.

$$\text{因此, } s^2 = \frac{1}{50} \left[\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{20} (\bar{x} - \bar{z})^2 + \sum_{j=1}^{30} (y_j - \bar{y})^2 + \sum_{j=1}^{30} (\bar{y} - \bar{z})^2 \right]$$

$$= \frac{1}{50} \{ 20[s_x^2 + (\bar{x} - \bar{z})^2] + 30[s_y^2 + (\bar{y} - \bar{z})^2] \} = \frac{1}{50} [20 \times (13 + 6^2) + 30 \times (38 + 4^2)] = 52.$$

故估计总样本的方差为 52. 故答案为: 52.

15. 【答案】-1

解: $\because D$ 是 BC 的中点, $BE = 2EA$, $\therefore \overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BD}$,

$\because E, O, C$ 三点共线, 设 $\overrightarrow{BO} = \lambda \overrightarrow{BE} + (1 - \lambda) \overrightarrow{BC} = \frac{2\lambda}{3}\overrightarrow{BA} + 2(1 - \lambda)\overrightarrow{BD}$, 且三点 A, O, D 共线,

$$\therefore \frac{2\lambda}{3} + 2(1 - \lambda) = 1, \text{ 解得 } \lambda = \frac{3}{4}, \therefore \overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC},$$

$$\because |\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{2}, \therefore \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}),$$

$$\therefore \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2) = \frac{1}{4}(4 - 8) = -1, \text{ 故答案为 } -1.$$

16. 【答案】 $\sqrt{3}$;

$$\frac{28\pi}{3}$$

解：点 P 在以弦 $AB = 2$ ，所对的圆周角为 60° 的优弧 APB 上运动，
在平面 PAB 内过点 P 作 $PH \perp AB$ ，垂足为 H ，
又平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$ ，平面 $PAB \cap$ 平面 $ABCD = AB$ ， $PH \subset$ 平面 PAB ，
所以 $PH \perp$ 底面 $ABCD$ ，当点 H 为棱 AB 的中点时， $\triangle PAB$ 为等边三角形，
此时 $\triangle PAB$ 的面积最大，且 $PH = \sqrt{3}$ ，即四棱锥 $P - ABCD$ 的高为 $\sqrt{3}$.
设等边 $\triangle PAB$ 的中心为 O_1 ，正方形 $ABCD$ 的中心为 O_2 ，
过点 O_1 、 O_2 分别作平面 PAB 、平面 $ABCD$ 的垂线，且交于点 O ，
则点 O 为四棱锥 $P - ABCD$ 外接球的球心，

$$\text{显然 } R = \sqrt{O_2O^2 + O_2A^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{\frac{7}{3}},$$

故四棱锥 $P - ABCD$ 外接球的表面积为 $4\pi R^2 = 4\pi\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2 = \frac{28\pi}{3}$. 故答案为： $\sqrt{3}$ ； $\frac{28\pi}{3}$.

17.【答案】解：(1) $z = (2 - mi)(1 - i) = (2 - m) - (2 + m)i$ ，

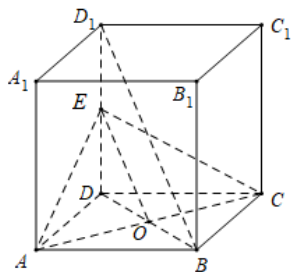
$\because z$ 是纯虚数， $\therefore \begin{cases} 2 - m = 0 \\ 2 + m \neq 0 \end{cases}$ ，得 $m = 2$ ；

(2)由(1)知， $\bar{z} = (2 - m) + (m + 2)i$ ，

$\because$ 复数 $\bar{z}$ 在复平面上对应的点在第四象限，

$\therefore \begin{cases} 2 - m > 0 \\ m + 2 < 0 \end{cases}$ ，解得 $m < -2$ ， $\therefore m$ 的取值范围为 $(-\infty, -2)$.

18.【答案】解(1)证明：如图，设 $AC \cap BD = O$ ，



因为 AC ， BD 互相平分，所以 O 为 BD 的中点.连接 OE ，

因为 E 为 DD_1 的中点，所以 $BD_1 \parallel OE$.

又因为 $BD_1 \not\subset$ 平面 AEC ， $OE \subset$ 平面 AEC ，所以 $BD_1 \parallel$ 平面 AEC .

(2)选择的条件是③.证明如下：

因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $AC \perp BD$ ，

因为四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是直四棱柱，

所以 $DD_1 \perp$ 平面 $ABCD$ ，因为 $AC \subset$ 平面 $ABCD$ ，所以 $AC \perp DD_1$ ，

因为 $BD \cap DD_1 = D$ ， BD ， $DD_1 \subset$ 平面 BB_1D_1D ，

所以 $AC \perp$ 平面 BB_1D_1D ，

因为 $AC \subset$ 平面 AEC ，所以平面 $AEC \perp$ 平面 BB_1D_1D .

19.【答案】解：(1)由频率分布直方图可得， $a = \frac{1}{10} \times (1 - 0.010 \times 10 - 0.015 \times 10 - 0.020 \times 10 - 0.025 \times 10) = 0.03$ ，

即 $a = 0.030$,

由频率分布直方图知, 这100名志愿者的平均年龄为

$$10 \times (25 \times 0.015 + 35 \times 0.025 + 45 \times 0.030 + 55 \times 0.020 + 65 \times 0.010) = 43.5 \text{岁};$$

前三组频率之和为0.7, 第四组为0.2,

所以第75百分位数应在第四组,

设第75百分位数为 x , 则 $(x - 50) \times 0.020 + 0.7 = 0.75$, 解得 $x = 52.5$,

故第75百分位数是52.5岁;

(2) 5人中来自医疗组的人数为: $\frac{40}{100} \times 5 = 2$, 设为 a_1, a_2 ;

来自服务组的人数为: $\frac{60}{100} \times 5 = 3$, 设为 b_1, b_2, b_3 ,

从这5人中选取3人的基本事件总数为:

$a_1b_1b_2, a_1b_1b_3, a_1b_2b_3, a_2b_1b_2, a_2b_1b_3, a_2b_2b_3, a_1a_2b_1, a_1a_2b_2, a_1a_2b_3, b_1b_2b_3$ 共10种, 其中至少有1人来自医疗组的有9种,

所以至少有1人来自医疗组的概率为 $\frac{9}{10} = 0.9$.

20. 【答案】解: 选择 ① $2\sin A - \sin C - 2\sin B \cos C = 0$,

在 $\triangle ABC$ 中, $A = \pi - (B + C)$, 所以 $\sin A = \sin(B + C)$,

所以 $2\sin(B + C) - \sin C - 2\sin B \cos C = 0$,

则 $2\sin B \cos C + 2\cos B \sin C - \sin C - 2\sin B \cos C = 0$, 则 $2\cos B \sin C = \sin C$,

因为 $0 < C < \pi$, 则 $\sin C \neq 0$, 所以 $\cos B = \frac{1}{2}$, 而 $B \in (0, \pi)$, 解得 $B = \frac{\pi}{3}$;

选择 ② $2S = \sqrt{3} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}$, 则 $ac \sin B = \sqrt{3} ac \cos B$,

所以 $\tan B = \sqrt{3}$, 又 $B \in (0, \pi)$, 解得 $B = \frac{\pi}{3}$;

选择 ③ $a^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} ac \sin B + c^2 = b^2$,

由余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, 得 $\frac{2\sqrt{3}}{3} \sin B = 2 \cos B$, 所以 $\tan B = \sqrt{3}$,

又 $B \in (0, \pi)$, 解得 $B = \frac{\pi}{3}$;

(1) 若 $b = 4$, $ac = 3$, 由余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$,

$$\text{得 } 16 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \frac{\pi}{3} = (a + c)^2 - 3ac = (a + c)^2 - 9,$$

则 $(a + c)^2 = 25$, 所以 $a + c = 5$ (负值舍去);

(2) 由 $\triangle ABC$ 为锐角三角形及 $B = \frac{\pi}{3}$, 得 $A = \frac{2\pi}{3} - C \in (0, \frac{\pi}{2})$ 且 $C \in (0, \frac{\pi}{2})$, 解得 $C \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$,

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$,

$$\text{得 } \frac{a^2 + c^2}{b^2} = \frac{\sin^2 A + \sin^2 C}{\sin^2 B} = \frac{4}{3} (\sin^2 A + \sin^2 C) = \frac{4}{3} [\sin^2 (\frac{2\pi}{3} - C) + \sin^2 C]$$

$$= \frac{2}{3} [1 - \cos 2(\frac{2\pi}{3} - C) + 1 - \cos 2C] = \frac{2}{3} (2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2C - \frac{1}{2} \cos 2C) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \sin (2C - \frac{\pi}{6}),$$

因为 $C \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$, 则 $\frac{\pi}{6} < 2C - \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}$, 所以 $\frac{1}{2} < \sin(2C - \frac{\pi}{6}) \leq 1$,

所以 $\frac{5}{3} < \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \sin(2C - \frac{\pi}{6}) \leq 2$, 则 $\frac{a^2+c^2}{b^2}$ 的取值范围是 $(\frac{5}{3}, 2]$.

21. 【答案】 (1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是直角梯形, $AD = CD = 1$, $BC = 2$,

$\therefore AC = \sqrt{2}$, $AB = \sqrt{(BC - AD)^2 + CD^2} = \sqrt{2}$,

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形, 即 $AB \perp AC$,

$\because PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore PA \perp AB$,

又 $PA \cap AC = A$, $PA, AC \subset$ 平面 PAC , $\therefore AB \perp$ 平面 PAC ,

又 $PC \subset$ 平面 PAC , $\therefore AB \perp PC$,

(2) 解: 过点 M 作 $MN \perp AD$ 于 N , 则 $MN \parallel PA$,

$\therefore MN \perp$ 平面 $ABCD$.

$\because AC \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore MN \perp AC$.

过点 M 作 $MG \perp AC$ 于 G , 连接 NG ,

$\because MN \cap MG = M$, $MN, MG \subset$ 平面 MNG , $\therefore AC \perp$ 平面 MNG .

$\because NG \subset$ 平面 MNG , $\therefore AC \perp NG$,

$\therefore \angle MGN$ 是二面角 $M - AC - D$ 的平面角.

若 $\cos \angle MGN = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\sqrt{2}NG = MN$, 又 $AN = \sqrt{2}NG = MN$,

设 $MN = x$, 则 $AN = x$, $ND = 1 - x$,

$\because \triangle MND$ 是等腰直角三角形, 解得 $x = 1 - x$, 所以 $MN = \frac{1}{2}$, 所以 M 是 PD 的中点,

所以 $V_{M-ACP} = V_{P-ACM} = \frac{1}{2} V_{P-ACD} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{12}$.

22. 【答案】 (1) 证明: $f(x) = \sin \omega x - \sqrt{3} \cos \omega x = 2 \sin(\omega x - \frac{\pi}{3}) (\omega > 0)$,

$\because$ 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π , $\therefore \frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 解得 $\omega = 2$,

$\therefore g(x) = f(x) - x = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{3}) - x$,

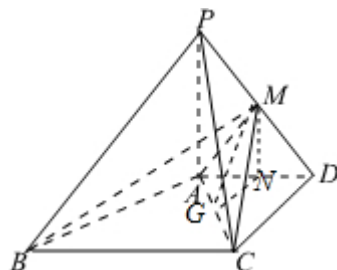
由于 $g(x)$ 图象在 $[0, \pi]$ 上连续, 且 $g(0) = -\sqrt{3} < 0$, $g(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{2} > 0$, $g(\pi) = -\sqrt{3} - \pi < 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上至少 1 个零点, 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上至少 1 个零点,

即函数 $g(x) = f(x) - x$ 在 $[0, \pi]$ 上至少有两个零点;

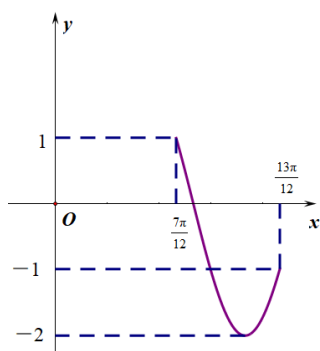
(2) 令 $t = f(x) = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{3})$, 则方程 $f(x)[f(x) - m] + 2m = 0$ 可化为 $t^2 - mt + 2m = 0$.

先研究函数 $f(x)$ 在区间 $[\frac{7}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi]$ 上单调性:



当 $x \in [\frac{7}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi]$ 时, $2x - \frac{\pi}{3} \in [\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}]$, 所以 $f(x)$ 单调递减, 函数值由 1 递减至 -2,

当 $x \in [\frac{11}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi]$ 时, $2x - \frac{\pi}{3} \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}]$, 所以 $f(x)$ 单调递增, 函数值由 -2 递增至 -1,



可知, 在区间 $[\frac{7}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi]$ 上, 当 $t = -2$ 或 $-1 < t \leq 1$ 时, 方程 $f(x) = t$ 有且仅有 1 实根,

当 $-2 < t \leq -1$ 时, 方程 $f(x) = t$ 有且仅有 2 实根,

当 $t < -2$ 或 $t > 1$ 时, 方程 $f(x) = t$ 无实根.

所以要使方程 $f(x)[f(x) - m] + 2m = 0$ 在 $[\frac{7}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi]$ 上恰有三个根,

则需关于 t 的方程 $t^2 - mt + 2m = 0$ 一个根为 -2, 另一个根在区间 $-2 < t \leq -1$ 内,

或者一个根在区间 $-1 < t \leq 1$ 内, 另一个根在区间 $-2 < t \leq -1$ 内

①若方程 $t^2 - mt + 2m = 0$ 一根为 -2, 代入方程解得 $m = -1$, 所以该方程另一个根为 1, 不合题意;

②若方程 $t^2 - mt + 2m = 0$ 一个根在区间 $-1 < t \leq 1$ 内, 另一个根在区间 $-2 < t \leq -1$ 内,

若 -1 为方程 $t^2 - mt + 2m = 0$ 的根, 代入方程解得 $m = -\frac{1}{3}$,

所以该方程另一个根为 $\frac{2}{3}$, 满足题意;

若方程 $t^2 - mt + 2m = 0$ 一个根在区间 $-1 < t \leq 1$ 内, 另一个根在区间 $-2 < t < -1$ 内,

$$\text{则 } \begin{cases} (-2)^2 - m(-2) + 2m > 0 \\ (-1)^2 - m(-1) + 2m < 0 \\ 1 - m + 2m \geq 0 \end{cases}, \text{ 解得 } -1 < m < -\frac{1}{3},$$

综上, 实数 m 的取值范围为 $\left(-1, -\frac{1}{3}\right]$