2023 新高考 I 卷

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分

第1题　已知集合 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$, $N=\left\{x \mid x^{2}-x-6 \geqslant 0\right\}$, 则 $M \cap N=$

A. $\{-2,-1,0,1\}$　　B. $\{0,1,2\}$　　C. $\{-2\}$　　D. $\{2\}$

答案

C

第2题　已知 $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2+2 \mathrm{i}}$, 则 $z-\bar{z}=$

A. $-i$　　B. i　　C. 0　　D. 1

答案

A

第3题　已知向量 $a=(1,1), b=(1,-1)$. 若 $(a+\lambda b) \perp(a+\mu b)$, 则

A. $\lambda+\mu=1$　　B. $\lambda+\mu=-1$　　C. $\lambda \mu=1$　　D. $\lambda \mu=-1$

答案

D

第4题　设函数 $f(x)=2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0,1)$ 单调递减, 则 a 的取值范围是

A. $(-\infty,-2]$　　B. $[-2,0)$　　C. $(0,2]$　　D. $[2,+\infty)$

答案

D

第5题 设椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1),C_2:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的离心率分别为 $e_1\cdot e_2$、若 $e_2=\sqrt{3}e_1$，则 $a=$

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{6}$

答案

A

第6题 过点 $(0,-2)$ 与圆 $x^2+y^2-4x-1=0$ 相切的两条直线的夹角为 α，则 $\sin\alpha=$

A. 1　　B. $\frac{\sqrt{15}}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{10}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

答案

B

第7题 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，设甲：$\{a_n\}$ 为等差数列：乙：$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列，则

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

B. 用是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

答案

C

第8题 已知 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{3},\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{6}$，则 $\cos(2\alpha+2\beta)=$

A. $\frac{7}{9}$　　B. $\frac{1}{9}$　　C. $-\frac{1}{9}$　　D. $-\frac{7}{9}$

答案

B

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分

第9题　有一组样本数据 $x_1, x_2, \cdots, x_6$，其中 x_1 是最小值，x_6 是最大值，则

A. x_2, x_3, x_4, x_5 的平均数等于 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ 的平均数

B. x_2, x_3, x_4, x_5 的中位数等于 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ 的中位数

C. x_2, x_3, x_4, x_5 的标准差不小于 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ 的标准差

D. x_2, x_3, x_4, x_5 的极差不大于 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ 的极差

答案

BCD

第10题　噪声污染问题越来越受到重视. 用声压级来度量声音的强弱，定义声压级 $L_p = 20 \times \lg \dfrac{p}{p_0}$，其中常数 $p_0\,(p_0 > 0)$ 是听觉下限阈值，p 是实际声压. 下表为不同声源的声压级:

声源	与声源的距离 /m	声压级/dB
燃油汽车	10	$60 \sim 90$
混合动力汽车	10	$50 \sim 60$
电动汽车	10	40

已知在距离燃油汽车、混合动力汽车、电动汽车 10 m 处测得实际声压分别为 p_1，p_2，p_3，则

A. $p_1 \geqslant p_2$　　B. $p_2 > 10p_3$　　C. $p_3 = 100p_0$　　D. $p_1 \leqslant 100p_2$

答案

ACD

第11题　已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y)$，则

A. $f(0) = 0$

B. $f(1) = 0$

C. $f(x)$ 是偶函数

D. $x = 0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

答案

ABC

第12题 下列物体中，能够被整体放入棱长为 1（单位：m）的正方体容器（容器壁厚度忽略不计）内的有

A. 直径为0.99m 的球体

B. 所有棱长均为 1.4m 的四面体

C. 底面直径为 0.01m ，高为1.8m 的圆柱体

D. 底面直径为1.2m ，高为0.01m 的圆柱体

答案

ABD

三、填空题：本题共 5 小题，每小题 5 分，共 20 分

第13题 某学校开设了 4 门体育类选修课和 4 门艺术类选修课，学生需从这 8 门课中选修 2 门或 3 门课，并且每类选修课至少选修1门，则不同的选课方案共有 ________ 种（用数字作答）.

答案

64

第14题 在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$A_1B_1=1$，$AA_1=\sqrt{2}$，则该棱台的体积为 ________ .

答案

$\frac{7}{6}\sqrt{6}$

第15题 已知函数 $f(x)=\cos\omega x-1(\omega>0)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 有且仅有 3 个零点，则 ω 的取值范围是 ________ .

答案

$2\leqslant\omega<3$

第16题 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2. 点 A 在 C 上, 点 B 在 y 轴上, $\overrightarrow{F_1A}\perp\overrightarrow{F_1B}$, $\overrightarrow{F_2A}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$, 则 C 的离心率为 ________ .

答案

$\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分

第17题 已知在 $\triangle ABC$ 中, $A+B=3C, 2\sin(A-C)=\sin B$.

(1). 求 $\sin A$.

(2). 设 $AB=5$, 求 AB 边上的高 .

答案

(1). $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

(2). 6

解析

(1). 由题意得

$$A+B=3C\ \Rightarrow\ A+B+C=4C=\pi\ \Rightarrow\ C=\frac{\pi}{4}$$

所以

$$2\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{3}{4}\pi-A\right)\ \Rightarrow\ \sin A=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

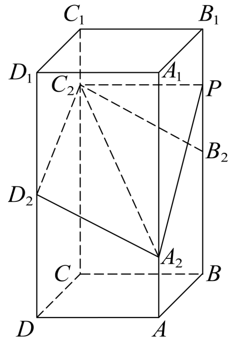
(2). 因为 $\sin B=\sin(A+C)=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, 所以由正弦定理可知

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\ \Rightarrow\ b=2\sqrt{10}$$

所以由面积法可知

$$S=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin A=\frac{1}{2}\cdot c\cdot h\ \Rightarrow\ h=b\sin A=6$$

第18题 如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$AA_1=4$. 点 A_2,B_2,C_2,D_2 分别在棱 AA_1，BB_1，CC_1，DD_1 上，$AA_2=1$，$BB_2=DD_2=2$，$CC_2=3$



(1) 证明： $B_2C_2 // A_2D_2$.

(2) 点 P 在棱 BB_1 上，当二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 150° 时，求 B_2P .

答案

(1). 建系易证

(2). $B_2P=1$

解析

以 C 为原点，CD 为 x 轴，CB 为 y 轴，CC_1 为 z 轴建立空间直角坐标系，所以

$B_2:(0,2,2)$，$C_2:(0,0,3)$，$A_2:(2,2,1)$，$D_2:(2,0,2)$

(1). 因为 $\overrightarrow{B_2C_2}=(0,-2,1)$，$\overrightarrow{A_2D_2}=(0,-2,1)$

所以 $\overrightarrow{B_2C_2}=\overrightarrow{A_2D_2}$，所以 $B_2C_2 // A_2D_2$.

(2). 设 $P:(0,2,t)$，其中 $2\leqslant t\leqslant 4$

所以 $\overrightarrow{PA_2}=(2,0,1-t)$，$\overrightarrow{PC_2}=(0,-2,3-t)$，$\overrightarrow{D_2C_2}=(-2,0,1)$，$\overrightarrow{D_2A_2}=(0,2,-1)$.

所以面 PA_2C_2 法向量 $\overrightarrow{n_1}=(t-1,3-t,2)$，面 $D_2A_2C_2$ 法向量 $\overrightarrow{n_2}=(1,1,2)$

因为二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 150°，所以

$$\left|\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2t^2-8t+14}}\right|=|\cos 150^{\circ}|=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \Rightarrow\ t=1(\text{舍})\ ||\ t=3$$

所以 $B_2P=1$

第19题 已知函数 $f(x)=a\left(e^x+a\right)-x$.

(1). 讨论 $f(x)$ 的单调性.

(2). 证明: 当 $a>0$ 时，$f(x)>2\ln a+\dfrac{3}{2}$.

答案

见解析

解析

(1). 对 $f(x)$ 求导得 $f'(x)=a\cdot e^x-1$，故

① $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)\leqslant -1<0$，函数 $f(x)$ 单调递减

② $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$ 得 $x_0=-\ln a$，故

	$(-\infty,-\ln a)$	$-\ln a$	$(-\ln a,\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

(2). $f_{\min}=f(-\ln a)=a^2+1+\ln a$

令 $g(a)=a^2-\ln a-\dfrac{1}{2}$，求导得 $g'(a)=2a-\dfrac{1}{a}$

令导数为 0 解得 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以

	$\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\infty\right)$
$g'(a)$	$-$	0	$+$
$g(a)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以 $g_{\min}=g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{\ln 2}{2}>0$

故 $g(a)>0$，所以 $f(x)>2\ln a+\dfrac{3}{2}$

第20题 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，且 $d>1$，令 $b_n=\dfrac{n^2+n}{a_n}$，记 S_n,T_n 分别为数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和.

(1). 若 $3a_2=3a_1+a_3$，$S_3+T_3=21$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2). 若 $\{b_n\}$ 为等差数列，且 $S_{99}-T_{99}=99$，求 d.

答案

(1). $a_n=3n$

(2). $d=\dfrac{51}{50}$

解析

(1). 由题意得 $3a_2=3a_1+a_3$，$2a_2=a_1+a_3$，解得

$$a_2=2a_1,\ a_3=3a_1$$

又因为 $\{a_n\}$ 为等差数列，所以 $a_n = a_1 \cdot n$，所以 $b_n = \dfrac{n+1}{a_1}$

因为 $S_3 + T_3 = 21$，所以

$$6a_1 + \frac{9}{a_1} = 21 \Rightarrow a_1 = 3 \,||\, a_1 = \frac{1}{2}(\text{舍})$$

所以 $a_n = 3n$

(2). 设 $a_n = d_a \cdot n + p_a$，$b_n = d_b \cdot n + p_b$，其中 $d_a > 1$

记 $c_n = a_n - b_n = (d_a - d_b)n + p_a - p_b$，故 $\{c_n\}$ 也为等差数列，所以

$$S_{99} - T_{99} = c_1 + c_2 + \cdots + c_{99} = \frac{(c_1 + c_{99}) \cdot 99}{2} = 99 \cdot c_{50} = 99$$

所以 $c_{50} = 1$

因为 $b_n = \dfrac{n^2+n}{a_n}$，所以代入可得

$$d_b n + p_b = \frac{n^2+n}{d_a n + p_a} \Longrightarrow n^2 + n = d_a \cdot d_b \cdot n^2 + (d_a \cdot p_b + d_b \cdot p_a)n + p_a \cdot p_b$$

所以可得方程组

$$\begin{cases} d_a \cdot d_b = 1 \\ d_a \cdot p_b + d_b \cdot p_a = 1 \\ p_a \cdot p_b = 0 \\ 50\,(d_a - d_b) + p_a - p_b = 1 \end{cases}$$

解得 $d = d_a = \dfrac{51}{50}$

第21题 甲乙两人投篮，每次由其中一人投篮，规则如下：若命中则此人继续投篮，若未命中则换为对方投篮. 无论之前投篮情况如何，甲每次投篮的命中率均为 0.6，乙每次投篮的命中率均为 0.8，由抽签确定第 1 次投篮的人选，第一次投篮的人是甲，乙的概率各为 0.5 .

(1). 求第 2 次投篮的人是乙的概率.

(2). 求第 i 次投篮的人是甲的概率.

(3) 设随机事件 Y 为甲投球次数，$Y = 0, 1, \cdots, n$，求 $E(Y)$.

答案

(1). $\dfrac{3}{5}$

(2). $\dfrac{1}{6} \cdot \left(\dfrac{2}{5}\right)^{i-1} + \dfrac{1}{3}$

(3). $E(Y)=\frac{n}{3}+\frac{5}{18}-\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

解析

(1). $P=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$

(2). 记 a_i 为第 i 次投篮的人是甲的概率，所以

$$a_i=\frac{3}{5}\cdot a_{i-1}+\frac{1}{5}(1-a_{i-1})=\frac{2}{5}a_{i-1}+\frac{1}{5}$$

所以

$$a_i-\frac{1}{3}=\frac{2}{5}\left(a_{i-1}-\frac{1}{3}\right)\Rightarrow a_i=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}+\frac{1}{3}$$

(3).

$$\begin{aligned}E(Y)&=a_1+a_2+\cdots+a_n\\&=\frac{1}{6}\left[\left(\frac{2}{5}\right)^0+\left(\frac{2}{5}\right)^1+\cdots+\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right]+\frac{n}{3}\\&=\frac{1}{6}\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}}+\frac{n}{3}\\&=\frac{n}{3}+\frac{5}{18}-\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

第22题 在直角坐标系 xOy 中，点 P 到 x 轴的距离等于点 P 到点 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 的距离，记动点 P 的轨迹为 W .

(1). 求 W 的方程.

(2). 已知矩形 ABCD 有三个顶点在 W 上，证明：矩形 ABCD 的周长大于 $3\sqrt{3}$.

答案

(1). $W:x^2=y-\frac{1}{4}$

解析

(1). 由题意得 W 为抛物线, 且准线为 $y=0$, 焦点为 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$, 这是由标准抛物线方程 $x^2=2py$ 向上平移 $\dfrac{1}{4}$ 个单位得到的, 故可设为 $x^2=2py-\dfrac{1}{4}$

因为焦点到准线的距离为 p, 所以 $p=\dfrac{1}{2}$, 所以 $W:x^2=y-\dfrac{1}{4}$.

(2). 不妨设 A,B,C 在抛物线上, 且 AB ⊥ BC, 所以

$$\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}\cdot\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=-1 \Rightarrow \frac{x_B^2-x_C^2}{x_B-x_C}\cdot\frac{x_B^2-x_A^2}{x_B-x_A}=-1 \Rightarrow (x_B+x_A)(x_B+x_C)=-1$$

令 $x_B+x_A=m$, $x_B+x_C=-\dfrac{1}{m}$, 由对称性, 不妨设 $|m|\leqslant 1$

所以周长可表示为

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\cdot\text{周长}&=AB+BC\\
&=\sqrt{(y_A-y_B)^2+(x_A-x_B)^2}+\sqrt{(y_C-y_B)^2+(x_C-x_B)^2}\\
&=|x_A-x_B|\cdot\sqrt{1+m^2}+\frac{|x_C-x_B|}{|m|}\cdot\sqrt{1+m^2}\\
&\geqslant\sqrt{1+m^2}\cdot(|x_A-x_B|+|x_C-x_B|)\\
&\geqslant\sqrt{1+m^2}\cdot|x_A-x_C|\\
&=\sqrt{1+m^2}\cdot\left|m+\frac{1}{m}\right|\\
&=\sqrt{\frac{(1+m^2)^3}{m^2}}
\end{aligned}$$

令 $f(x)=\dfrac{(1+x)^3}{k}$ $(0<x<1)$, 则 $f'(x)=\dfrac{(x+1)^2(2x-1)}{x^2}$, 故

	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},1\right)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以 $f(x)\geqslant f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{27}{4}$, 当且仅当 $|m|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 所以有

$$\text{周长}>2\cdot\sqrt{\frac{27}{4}}=3\sqrt{3}$$