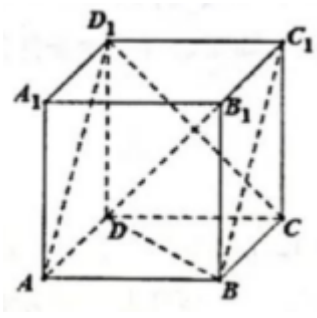


例 1. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ ，则 ()

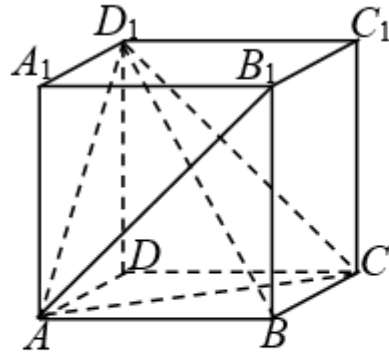
- A. 直线 BC_1 与 DA_1 所成的角为 90°
- B. 直线 BC_1 与 CA_1 所成的角为 90°
- C. 直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 45°
- D. 直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 45°

例 2. 如图，正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，则下列四个命题正确的是 ()

- A. 直线 BC 与平面 ABC_1D_1 所成的角等于 $\frac{\pi}{4}$
- B. 点 C 到面 ABC_1D_1 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- C. 两条异面直线 D_1C 和 BC_1 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$
- D. 二面角 $C - BC_1 - D$ 的平面角的余弦值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

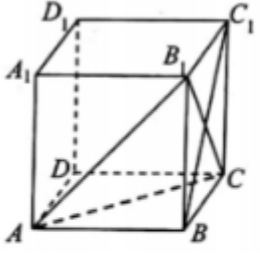


练习 1 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中 ()



- A. AC 与 BD_1 的夹角为 60°
- B. 二面角 $D - AC - D_1$ 的平面角的正切值为 $\sqrt{2}$
- C. AB_1 与平面 ACD_1 所成角的正切值 $\sqrt{2}$
- D. 点 D 到平面 ACD_1 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

练习 2 如图，在棱长为 1 的正方体中，下列结论正确的是 ()

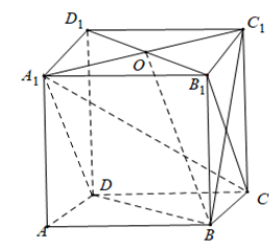


- A. 异面直线 AC 与 BC_1 所成的角为 60°
- B. 直线 AB_1 与平面 ABC_1D_1 所成角为 45°
- C. 二面角 $A - B_1C - B$ 的正切值为 $\sqrt{2}$
- D. 四面体 $D_1 - AB_1C$ 的外接球的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

例 1. 【答案】 ABD

如图，连接 B_1C 、 BC_1 ，因为 $DA_1 // B_1C$ ，所以直线 BC_1 与 B_1C 所成的角即为直线 BC_1 与 DA_1 所成的角，

因为四边形 BB_1C_1C 为正方形，则 $B_1C \perp BC_1$ ，故直线 BC_1 与 DA_1 所成的角为 90° ，A 正确；



连接 A_1C ，因为 $A_1B_1 \perp$ 平面 BB_1C_1C ， $BC_1 \subset$ 平面 BB_1C_1C ，则 $A_1B_1 \perp BC_1$ ，

因为 $B_1C \perp BC_1$ ， $A_1B_1 \cap B_1C = B_1$ ，所以 $BC_1 \perp$ 平面 A_1B_1C ，

又 $A_1C \subset$ 平面 A_1B_1C ，所以 $BC_1 \perp CA_1$ ，故 B 正确；

连接 A_1C_1 ，设 $A_1C_1 \cap B_1D_1 = O$ ，连接 BO ，

因为 $BB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$ ， $C_1O \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$ ，则 $C_1O \perp B_1B$ ，

因为 $C_1O \perp B_1D_1$ ， $B_1D_1 \cap B_1B = B_1$ ，所以 $C_1O \perp$ 平面 BB_1D_1D ，

所以 $\angle C_1BO$ 为直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角，

设正方体棱长为 1，则 $C_1O = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $BC_1 = \sqrt{2}$ ， $\sin \angle C_1BO = \frac{C_1O}{BC_1} = \frac{1}{2}$ ，

所以，直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 30° ，故 C 错误；

因为 $C_1C \perp$ 平面 $ABCD$ ，所以 $\angle C_1BC$ 为直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角，易得 $\angle C_1BC = 45^\circ$ ，故 D

正确.

故选：ABD

解：连接 BD ，交 AC 于 O ，则 $AC \perp BD$ ，且 $AC \perp DD_1$ ，又 $BD \cap DD_1 = D$ ，所以 $AC \perp$ 平面 BDD_1 ，又 $BD_1 \subset$ 平面 BDD_1 ，所以 AC 与 BD_1 的夹角为 90° ，故 A 错误；

因为 $DO \perp AC$ ， $D_1O \perp AC$ ，所以 $\angle DOD_1$ 为二面角 $D-AC-D_1$ 的平面角，

在直角三角形 D_1DO 中， $\tan \angle DOD_1 = \frac{D_1D}{DO} = \sqrt{2}$ ，故 B 正确；

$B_1D \perp$ 平面 ACD_1 ，所以 AB_1 与平面 ACD_1 所成角 θ 是 AB_1 与 B_1D 所成角的余角，

$\tan \angle AB_1D = \frac{AD}{AB_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，所以 $\tan \theta = \sqrt{2}$ ，故 C 正确；

B_1 到面 ACD_1 的距离为 $AB_1 \sin \theta = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，

所以点 D 到平面 ACD_1 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，故 D 正确.

故选 BCD .

12. 【答案】 AB

解：如图，取 BC_1 的中点 H ，连接 CH ，易证 $CH \perp$ 平面 ABC_1D_1 ，

所以 $\angle C_1BC$ 是直线 BC 与平面 ABC_1D_1 所成的角，为 $\frac{\pi}{4}$ ，故 A 正确；

点 C 到平面 ABC_1D_1 的距离为 CH 的长度，为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，故 B 正确；

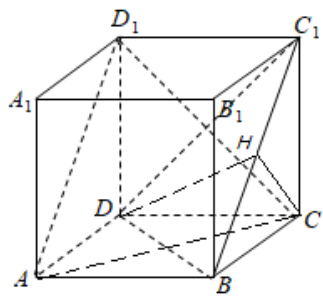
易证 $BC_1 // AD_1$ ，所以异面直线 D_1C 和 BC_1 所成的角为 $\angle AD_1C$ 或其补角，因为 $\triangle ACD_1$ 为等边三角形，

所以两条异面直线 D_1C 和 BC_1 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$ ，故 C 错误；

连接 DH ，由 $BD = DC_1$ ，所以 $DH \perp BC_1$ ，

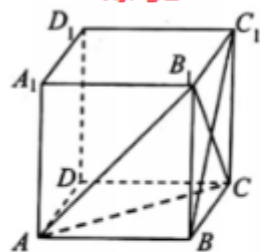
又 $CH \perp BC_1$ ，所以 $\angle CHD$ 为二面角 $C-BC_1-D$ 的平面角，易求得 $DH = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，

又 $CD = 1$ ， $CH = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，由余弦定理可得 $\cos \angle CHD = \frac{DH^2 + CH^2 - CD^2}{2DH \cdot CH} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，故 D 错误.



练习2

如图，在棱长为1的正方体中，下列结论正确的是()



- A. 异面直线 AC 与 BC_1 所成的角为 60°
 B. 直线 AB_1 与平面 ABC_1D_1 所成角为 45°
 C. 二面角 $A - B_1C - B$ 的正切值为 $\sqrt{2}$
 D. 四面体 $D_1 - AB_1C$ 的外接球的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

解：对于 A、在棱长为1的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，

因为 $AC \parallel A_1C_1$ ，所以直线 A_1C_1 与 BC_1 所成的角就是异面直线 AC 与 BC_1 所成的角，

而 $\triangle A_1BC_1$ 是正三角形，因此直线 A_1C_1 与 BC_1 所成角为 60° ，

即异面直线 AC 与 BC_1 所成的角为 60° ，因此 A 正确；

对于 B、在棱长为1的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，

因为平面 $ABC_1D_1 \perp$ 平面 BB_1C_1C 交于 BC_1 ，

设 $BC_1 \cap B_1C = O$ ，则 $B_1O \perp BC_1$ ，而 $B_1O \subset$ 平面 BB_1C_1C ，

所以 $B_1O \perp$ 平面 ABC_1D_1 ，

因此连接 AO ，则 AO 是直线 AB_1 在平面 ABC_1D_1 内的射影，

即 $\angle B_1AO$ 为直线 AB_1 与平面 ABC_1D_1 所成角，

而 $\sin \angle B_1AO = \frac{B_1O}{AB_1} = \frac{1}{2}$ ，所以 $\angle B_1AO = 30^\circ$ ，

即直线 AB_1 与平面 ABC_1D_1 成角为 30° ，因此 B 不正确；

对于 C、由 B 知，在棱长为1的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，

$B_1C \perp$ 平面 ABO ，而 $AO \subset$ 平面 ABO ，因此 $AO \perp B_1C$ ，又 $B_1O \perp BC_1$ ，

所以 $\angle AOB$ 是二面角 $A - B_1C - B$ 的平面角，

因此 $\tan \angle AOB = \frac{AB}{BO} = \sqrt{2}$ ，

即二面角 $A - B_1C - B$ 的正切值为 $\sqrt{2}$ ，因此 C 正确；

对于 D、因为四面体 $D_1 - AB_1C$ 的外接球就是棱长为1的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的外接球，

而棱长为1的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的外接球半径为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

即四面体 $D_1 - AB_1C$ 的外接球半径为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

所以四面体 $D_1 - AB_1C$ 的外接球的体积为 $\frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ ，因此 D 正确。

故选 ACD.