

2021-2022 学年第二学期高一 3 月阶段考试

数 学 试 卷

命题人：夏咸东

审核人：杨娟

一、单选题（本大题共 8 小题，共 40.0 分）

1. 已知 $\overrightarrow{AB} = (3, 6)$ ，点 B 的坐标为 $(2, 3)$ ，则点 A 的坐标为 ()

- A. $(-1, -3)$ B. $(-3, -1)$ C. $(1, 3)$ D. $(5, 9)$

2. 下列结论中正确的为 ()

- A. 两个有共同起点的单位向量，其终点必相同； B. 向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{BA}$ 的长度相等；
C. 对任意向量 $\vec{a}$ ， $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 是一个单位向量； D. 零向量没有方向

3. 已知 $\vec{a} = (-3, 2)$ ， $\vec{b} = (-1, 0)$ ，向量 $\lambda \vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - 2\vec{b}$ 垂直，则实数 λ 的值为 ()

- A. $\frac{1}{7}$ B. $-\frac{1}{7}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $-\frac{1}{6}$

4. 函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$ 的零点所在的大致区间是 ()

- A. $(\frac{1}{e}, 1)$ B. $(1, e)$ C. (e, e^2) D. (e^2, e^3)

5. 在一次数学实验中，某同学运用图形计算器采集到如下一组数据：

x	-2	-1	1	2	3
y	0.24	0.51	2.02	3.98	8.02

在以下四个函数模型 (a, b 为待定系数) 中，最能反映 x, y 函数关系的是 ()

- A. $y = a + bx$ ； B. $y = a + \frac{b}{x}$ ； C. $y = a + \log_b x$ ； D. $y = a + b^x$

6. 若 $\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{3}{5}$ ，则 $\sin 2\alpha =$ ()

- A. $\frac{7}{25}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $-\frac{1}{5}$ D. $-\frac{7}{25}$

7. 已知 α 是第四象限角，且 $\cos(\pi - \alpha) = -\frac{3}{5}$ ，则 $\frac{1 + \sqrt{2} \cos(2\alpha - \frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)} =$ ()

- A. $-\frac{2}{5}$ B. $-\frac{1}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{14}{5}$

8. 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = 4$, $AC = 4\sqrt{3}$, $BC = 8$, 动点 P 自点 C 出发沿线段 CB 运动, 到达点 B 时停止, 动点 Q 自点 B 出发沿线段 BC 运动, 到达点 C 时停止, 且动点 Q 的速度是动点 P 的2倍, 若二者同时出发, 且一个点停止运动时, 另一个点也停止, 则该过程中 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ 的最大值是()

- A. $\frac{7}{2}$ B. 4 C. $\frac{49}{2}$ D. 23

二、多选题 (本大题共 4 小题, 共 20.0 分)

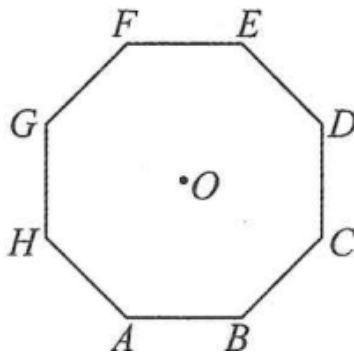
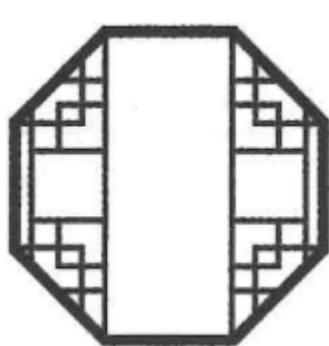
9. 下列关于向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 的运算, 一定成立的有()

- A. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$; B. $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$;
C. $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$; D. $|\vec{a} - \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$

10. 下列各式中, 值为 $\frac{1}{2}$ 的有()

- A. $\sin 7^\circ \cos 23^\circ + \sin 83^\circ \cos 67^\circ$; B. $\frac{1}{\sin 50^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{\cos 50^\circ}$;
C. $\frac{\tan 22.5^\circ}{1 - \tan^2 22.5^\circ}$; D. $\frac{1}{(1 + \tan 22^\circ)(1 + \tan 23^\circ)}$

11. 古代典籍《周易》中的“八卦”思想对我国建筑中有一定影响. 下图是受“八卦”的启示, 设计的正八边形的八角窗, 若 O 是正八边形 $ABCDEFGH$ 的中心, 且 $|\overrightarrow{AB}| = 1$, 则()



- A. $\overrightarrow{AH}$ 与 $\overrightarrow{CF}$ 能构成一组基底; B. $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OF} = 0$;
C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \sqrt{3} \overrightarrow{OB}$; D. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

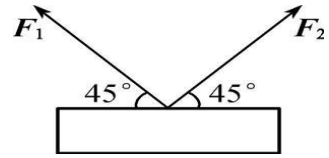
12. 已知实数 x_1 , x_2 为函数 $f(x) = (\frac{1}{2})^x - |\log_2(x - 1)|$ 的两个零点, 则下列结论正确的是()

- A. $(x_1 - 2)(x_2 - 2) \in (-\infty, 0)$; B. $(x_1 - 1)(x_2 - 1) \in (0, 1)$;
C. $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 1$; D. $(x_1 - 1)(x_2 - 1) \in (1, +\infty)$

三、填空题（本大题共 4 小题，共 20 分）

13. 已知 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 10$, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 120° , 则向量 $\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 方向上的投影向量是_____. (用向量 $\vec{a}$ 表示)

14. 如图所示, 一个物体被两根轻质细绳拉住, 且处于平衡状态. 已知两条绳上的拉力分别是 $\vec{F}_1$ 、 $\vec{F}_2$, 且 $\vec{F}_1$ 、 $\vec{F}_2$ 与水平夹角均为 45° , $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = 10\sqrt{2}\text{N}$, 则物体的重力大小为_____N.



15. 若函数 $f(x) = 2^x + 3x + a$ 在区间 $(0,1)$ 内存在零点, 则实数 a 的取值范围是_____.

16. 菱形 $ABCD$ 中, $AB = 1$, $A \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$, 点 E, F 分别是线段 AD, CD 上的动点 (包括端点), $AE = CF$, 则 $(\vec{AE} + \vec{CF}) \cdot \vec{AC} =$ _____, $\vec{ED} \cdot \vec{EB}$ 的最小值为_____. (第一空 2 分, 第二空 3 分)

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70.0 分）

17. 已知平面内的三个向量 $\vec{a} = (3,2)$, $\vec{b} = (-1,2)$, $\vec{c} = (4,1)$.

- (1) 若 $\vec{a} = \lambda \vec{b} + \mu \vec{c}$ ($\lambda, \mu \in R$), 求 $\lambda + \mu$ 的值;
- (2) 若向量 $\vec{a} + k\vec{b}$ 与向量 $2\vec{b} - \vec{c}$ 共线, 求实数 k 的值.

18. 已知平面向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 1$, $|3\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{13}$, 且 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 60° .

- (1) 求 $|\vec{b}|$ 的值;
- (2) 求 $\vec{b}$ 和 $\vec{a} - 2\vec{b}$ 夹角的余弦值.

19. 在① $\tan \alpha = 4\sqrt{3}$, ② $7\sin 2\alpha = 8\sqrt{3}\cos \alpha$, ③ $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 中任选一个条件, 补充在下面问题中, 并解决问题.

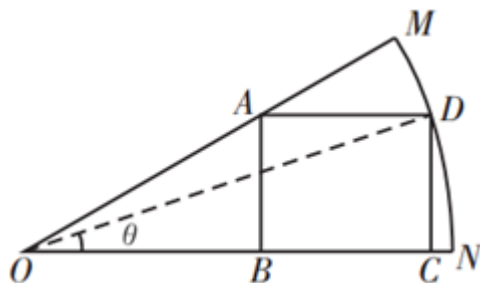
已知 $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$, _____, $\cos(\alpha - \beta) = \frac{13}{14}$.

- (1) 求 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$ 的值;
- (2) 求 β .

20.如图,在扇形 OMN 中,半径 $OM = 10$,圆心角 $\angle MON = \frac{\pi}{6}$, D 是扇形弧上的动点,矩形 $ABCD$ 内接于扇形,记 $\angle DON = \theta$,矩形 $ABCD$ 的面积为 S .

(1)用含 θ 的式子表示线段 DC , OB 的长;

(2)求 S 的最大值.



21.设向量 $\vec{a} = (\sin x, \cos x)$, $\vec{b} = (\sin x, \sqrt{3} \sin x)$, $x \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = \vec{a} \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$.

(1)求函数 $f(x)$ 的最大值与单调递增区间;

(2)若 $\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, 且 $f(\alpha) = \frac{16}{5}$, 求 $\sin 2\alpha$.

22.已知函数 $f(x) = \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x + \frac{1}{2}$, $g(x) = m \cos(x + \frac{\pi}{3}) - m + 2$

(1)若对任意 $x_1, x_2 \in [0, \pi]$, 均有 $f(x_1) \geq g(x_2)$, 求实数 m 的取值范围;

(2)若对任意 $x \in [0, \pi]$ 均有 $f(x) \geq g(x)$, 求实数 m 的取值范围;