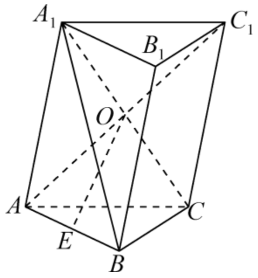
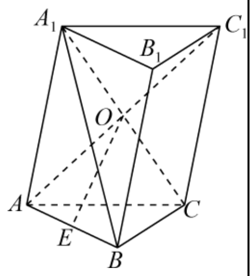
## 《立体几何》解答题专项练习（1）

1.如图，在斜三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，侧面$AA_1C_1C$是菱形，$AC_1$与$A_1C$交于点$O$，点$E$是$AB$的中点.

(1)求证：$OE$ //平面$BCC_1B_1$.

(2)若$AC_1\perp A_1B$，求证：$AC_1\perp BC$.

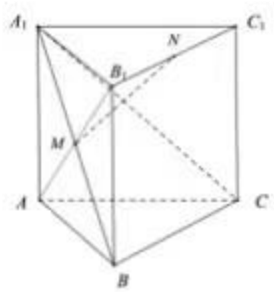


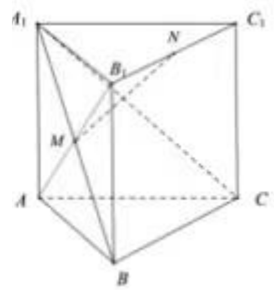




2.如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB_1$与$A_1B$相交于点$M$，$N$为$B_1C_1$的中点.

(1)求证：$MN$//平面$AA_1C_1C$；

(2)若$AC\perp BC$，$AC=AA_1$，求证：$MN\perp$平面$A_1BC$.



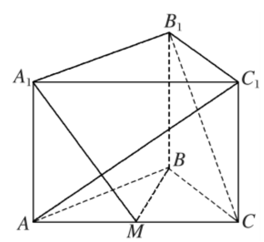

3.　如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，侧棱$AA_1\perp$底面$ABC$，$M$为棱$AC$的中点.

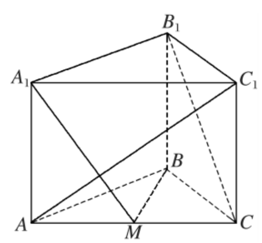
$AB=BC$，$AC=2$，$AA_1=\sqrt{2}$.

(1)求证：$B_1C$//平面$A_1BM$；(2)求证：$AC_1\perp$平面$A_1BM$；

(3)在棱$BB_1$上是否存在点$N$，使得平面$AC_1N\perp$平面$AA_1C_1C$？如果存在，

求此时$\frac{BN}{BB_1}$的值；如果不存在，请说明理由.



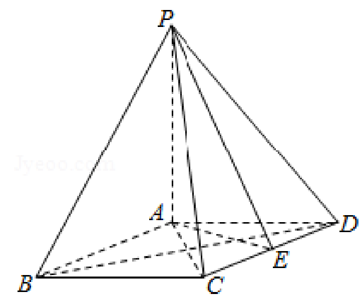



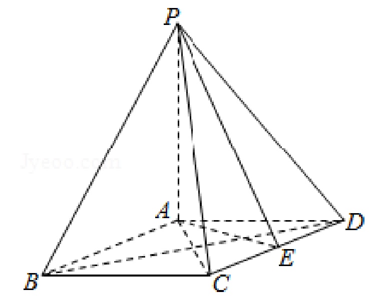

4.如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$平面$ABCD$，底面$ABCD$为菱形，$E$为$CD$的中点.

(1)求证：$BD\perp$平面$PAC$；

(2)若$\angle ABC=60°$，求证：平面$PAB\perp$平面$PAE$；

(3)棱$PB$上是否存在点$F$，使得$CF$//平面$PAE$？说明理由.

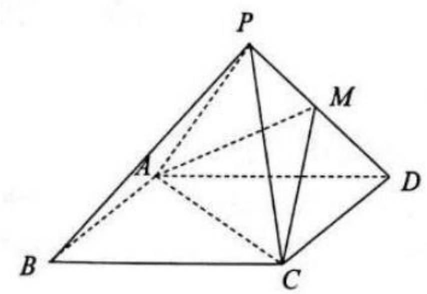


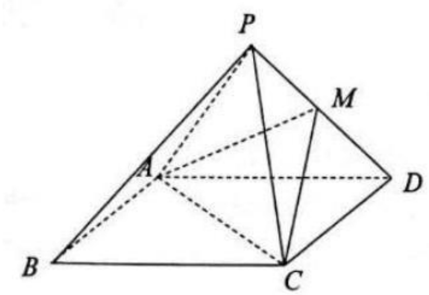




5.　如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为正方形，侧面$PAD$是正三角形，

侧面$PAD\perp$底面$ABCD$，$M$是$PD$的中点.证明：

(1)$PB$//平面$AMC$；　(2)$AM\perp PC$.

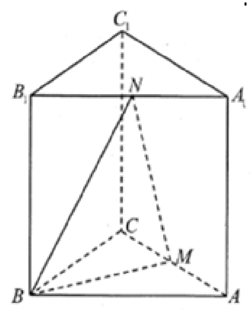


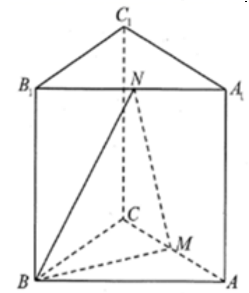



6. 如图，直三棱柱$ABC—A_1B_1C_1$中，$M$、$N$分别为棱$AC$和$A_1B_1$的中点，且$AB=BC$.

(1)求证：平面$BMN\perp$平面$ACC_1A_1$；

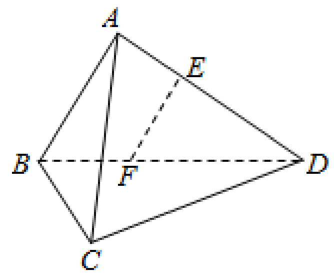
(2)求证：$MN//$平面$BCC_1B_1$.

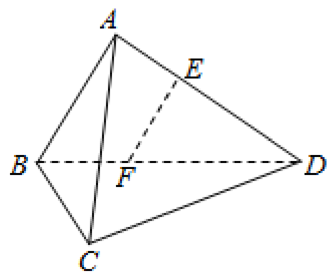



7.如图，在三棱锥$A-BCD$中，$AB\perp AD$，$BC\perp BD$，平面$ABD\perp$平面$BCD$，点$E$、$F$($E$与$A$、$D$不重合)分别在棱$AD$，$BD$上，且$EF\perp AD$.

求证：(1)$EF//$平面$ABC$；　　　　(2)$AD\perp AC$.

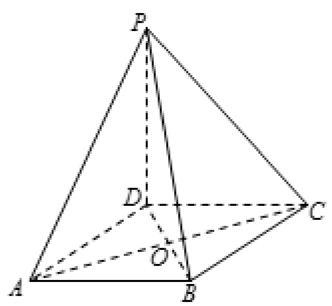


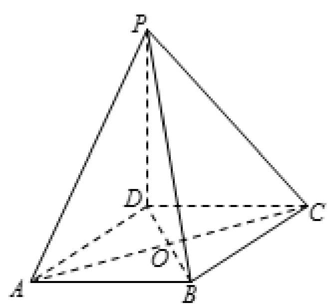




8. 如图，在四棱锥$P$-ABCD中，PD$\perp$平面$ABCD$，底面$ABCD$是菱形.

(1)求证：AC$\perp$平面$PBD$；

(2)若$\angle$BAD=60°，AD=2，PD=$2\sqrt{2}$，$AC$与$BD$相交于$O$，求$PA$与平面$PBD$所成角的大小.

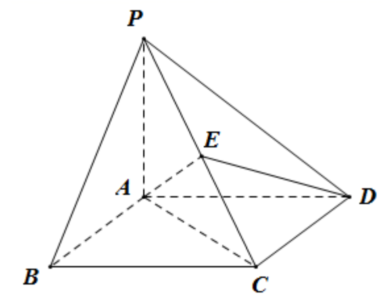


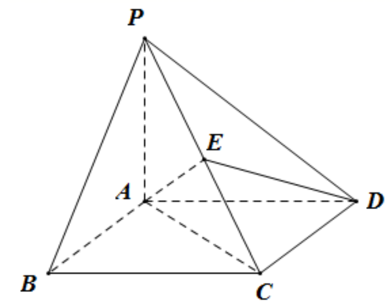




9.如图，四棱锥$P-ABCD$的底面$ABCD$是平行四边形，$PA\perp$底面$ABCD$，$\angle PCD=90°$，$PA=AB=AC=2$.

(1)证明：$AC\perp CD$；

(2)若$E$是棱$PC$的中点，求直线$AD$与平面$PCD$所成的角.

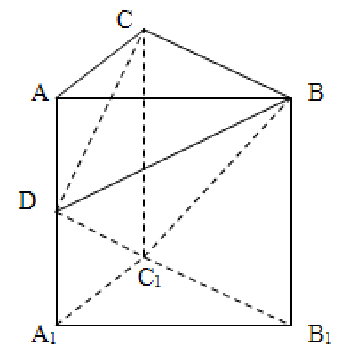


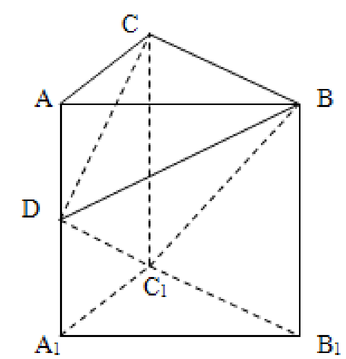




10.如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AC\perp BC$，$AC=BC=1$，$CC_1=2$，点$D$是$AA_1$的中点.

(1)证明：平面$BC_1D\perp$平面$BCD$；

(2)求$CD$与平面$BC_1D$所成角的正切值.



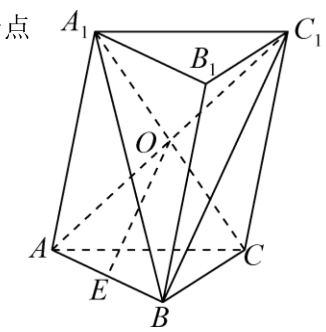



# 《立体几何》解答题专项练习（1）答案和解析

1.【答案】解：(1)证明：连接$BC_1$，因为侧面$AA_1C_1C$是菱形，$AC_1$与$A_1C$交于点

所以$O$为$AC_1$的中点，又因为$E$是$AB$的中点，所以$OE\ //\ BC_1$，

因为$OE \not\subset$平面$BCC_1B_1$，$BC_1 \subset$平面$BCC_1B_1$，所以$OE\ //$平面$BCC_1B_1$．




(2)证明：因为侧面$AA_1C_1C$是菱形，所以$AC_1 \perp A_1C$，

因为$AC_1 \perp A_1B$，$A_1C \cap A_1B = A_1$，$A_1C \subset$平面$A_1BC$，$A_1B \subset$平面$A_1BC$，

所以$AC_1 \perp$平面$A_1BC$，因为$BC \subset$平面$A_1BC$，

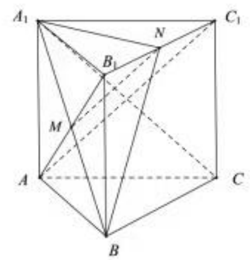
所以$AC_1 \perp BC$．

2.【答案】证明：(1)连接$AC_1$，$\because M$为$AB_1$与$A_1B$的交点，

$\therefore M$是$AB_1$ 的中点，又$N$是$B_1C_1$的中点，

$\therefore MN//AC_1$，而$AC_1 \subset$平面$AA_1C_1C$，$MN \not\subset$平面$AA_1C_1C$，

$\therefore MN//$平面$AA_1C_1C$；




(2) $\because AC = AA_1$，$\therefore$四边形$AA_1C_1C$为正方形，则$AC_1 \perp A_1C$，

又$\because$三棱柱$ABC - A_1B_1C_1$是直三棱柱，$\therefore CC_1 \perp$平面$ABC$，

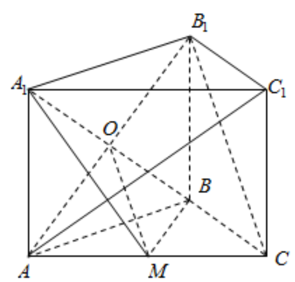
又$BC \subset$平面$ABC$，得$CC_1 \perp BC$，

$\because AC \perp BC$，$CC_1 \cap AC = C$，$CC_1$，$AC \subset$平面$AA_1C_1C$，

$\therefore BC \perp$平面$AA_1C_1C$，

又 $AC_1 \subset$平面$AA_1C_1C$， 则$BC \perp AC_1$，$\because MN//AC_1$，$\therefore MN \perp BC$，$MN \perp A_1C$，

又$BC \cap A_1C = C$，$BC$，$A_1C \subset$平面$A_1BC$．$\therefore MN \perp$平面$A_1BC$．




3.【答案】解：(1)连结$AB_1$交$A_1B$于$O$，连结$OM$．

在$\triangle B_1AC$中，因为$M$，$O$分别为$AC$，$AB_1$中点，所以$OM//B_1C$.

又因为$OM \subset$平面$A_1BM$，$B_1C \not\subset$平面$A_1BM$，所以$B_1C//$平面$A_1BM$.

(2)因为侧棱$AA_1 \perp$底面$ABC$，$BM \subset$平面$ABC$，所以$AA_1 \perp BM$．

又因为$M$为棱$AC$中点，$AB = BC$，所以$BM \perp AC$．

因为$AA_1 \cap AC = A$，$AA_1$，$AC \subset$平面$ACC_1A_1$．

所以$BM \perp$平面$ACC_1A_1.AC_1 \subset$平面$ACC_1A_1$．所以$BM \perp AC_1$．

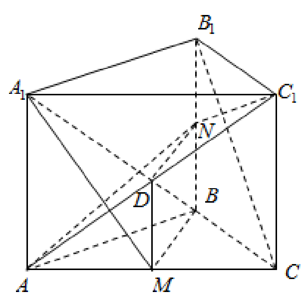
因为$M$为棱$AC$中点，$AC = 2$，所以$AM = 1$．

又因为$AA_1 = \sqrt{2}$，所以在$Rt\triangle ACC_1$和$Rt\triangle A_1AM$中，

$\tan\angle AC_1C = \tan\angle A_1MA = \sqrt{2}$．所以$\angle AC_1C = \angle A_1MA$，

即$\angle AC_1C + \angle C_1AC = \angle A_1MA + \angle C_1AC = 90°$．所以$A_1M \perp AC_1$．

因为$BM \cap A_1M = M$，$BM$，$A_1M \subset$平面$A_1BM$．所以$AC_1 \perp$平面$A_1BM$.




(3)当点$N$为$BB_1$中点时，即$\frac{BN}{BB_1} = \frac{1}{2}$，平面$AC_1N \perp$平面$AA_1C_1C$.

设$AC_1$中点为$D$，连结$DM$，$DN$．因为$D$，$M$分别为$AC_1$，$AC$中点，

所以$DM//CC_1$，且$DM = \frac{1}{2}CC_1$．

又因为$N$为$BB_1$中点，所以$DM//BN$，且$DM = BN$，所以四边形$DMBN$是平行四边形，

所以$BM//DN$，

因为$BM \perp$平面$ACC_1A_1$，所以$DN \perp$平面$ACC_1A_1$．

又因为$DN \subset$平面$AC_1N$，所以平面$AC_1N \perp$平面$ACC_1A_1$．

4.【答案】证明：(1) $\because$四棱锥$P - ABCD$中，$PA \perp$平面$ABCD$，$BD \subset$平面$ABCD$，

$\therefore BD \perp PA$，底面$ABCD$为菱形，$\therefore BD \perp AC$，

$\because PA \cap AC = A$，$PA$，$AC \subset$平面$PAC$，$\therefore BD \perp$平面$PAC$．

(2) $\because$在四棱锥$P - ABCD$中，底面$ABCD$为菱形，$\angle ABC = 60°$，

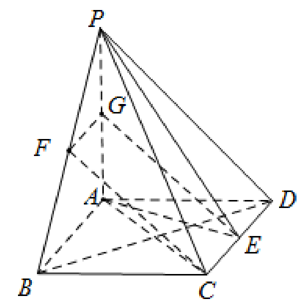
$\therefore\triangle ACD$是等边三角形，$\because E$为$CD$的中点，$\therefore AE \perp CD$，$\because AB//CD$，$\therefore AB \perp AE$，

$\because PA \perp$平面$ABCD$，$AE \subset$平面$ABCD$，$\therefore PA \perp AE$，$\because PA \cap AB = A$，$PA$，$AB \subset$平面$PAB$，

$\therefore AE \perp$平面$PAB$，$\because AE \subset$平面$PAE$，$\therefore$平面$PAB \perp$平面$PAE$．

(3)棱$PB$上存在中点$F$，使得$CF//$平面$PAE$．

理由如下：分别取$PB$、$PA$的中点$F$、$G$，连接$CF$、$FG$、$EG$，




在三角形$PAB$中，$FG//AB$且$FG = \frac{1}{2}AB$，

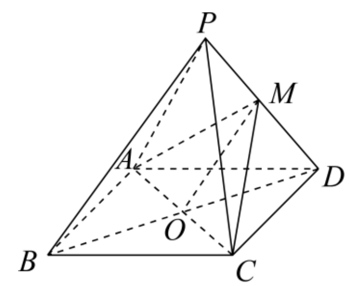
在菱形$ABCD$中，$E$为$CD$的中点，所以$CE//AB$，且$CE = \frac{1}{2}AB$，

所以$CE//FG$，且$CE = FG$，即四边形$CEGF$为平行四边形，

所以$CF//EG$，

又$CF \not\subset$平面$PAE$，$EG \subset$平面$PAE$，$\therefore CF//$平面$PAE$．

5.【答案】(1)证明：连接$BD$交$AC$于点$O$，连接$MO$，




因为四边形$ABCD$为正方形，且对角线$BD \cap AC = O$。

所以$O$为$BD$的中点，又因为$M$为$PD$的中点，所以$MO//PB$，

又$PB \not\subset$平面$MAC$，$MO \subset$平面$MAC$所以$PB//$平面$MAC$

(2)证明：因为四边形$ABCD$为正方形，所以$CD \perp AD$，

又平面$PAD \perp$平面$ABCD$，且平面$PAD \cap$平面$ABCD = AD$，$CD \subset$平面$ABCD$，

所以$CD \perp$平面$PAD$，又$AM \subset$平面$PAD$，所以$CD \perp AM$，

因为$\Delta PAD$为正三角形，且$M$为$PD$中点，

所以$AM \perp PD$，又$PD \cap CD = D$，$PD \subset$平面$PDC$，$CD \subset$平面$PCD$，

所以$AM \perp$平面$PCD$，又$PC \subset$平面$PCD$，

所以$AM \perp PC$．

6.【答案】证明：(1)因为$AB = BC$，$M$为$AC$的中点，所以$BM \perp AC$，

因为平面$ACC_1A_1 \perp$平面$ABC$，平面$ACC_1A_1 \cap$平面$ABC = AC$，$BM \subset$面$ABC$，

所以$BM\perp$面$ACC_1A_1$，
又$BM\subset$面$BMN$，
所以平面$BMN\perp$平面$ACC_1A_1$.

(2)设$AB$的中点为$H$，连结$MH$，$NH$.

因为$H$为$AB$的中点，所以$MH//BC$，且$MH=\frac{1}{2}BC$，

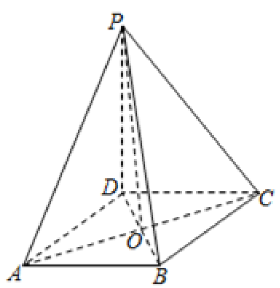
又$MH$不在平面$BCC_1B_1$，$BC\subset$平面$BCC_1B_1$，$\therefore MH//$平面$BCC_1B_1$，
在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，因为$AC//A_1C_1$，且$AC=A_1C_1$，$N$为$A_1B_1$的中点，所以$NH//BB_1$，
又$NH$不在平面$BCC_1B_1$，$BB_1\subset$平面$BCC_1B_1$，$\therefore NH//$平面$BCC_1B_1$.
又$NH\cap MH=H$，$NH$，$MH\subset$平面$MNH$，$\therefore$平面$MNH//$平面$BCC_1B_1$.
又$MN\subset$平面$MNH$，所以$MN//$平面$BCC_1B_1$.

7.【答案】证明：(1)因为$AB\perp AD$，$EF\perp AD$，且$A$、$B$、$E$、$F$四点共面，所以$AB//EF$，
又因为$EF\not\subset$平面$ABC$，$AB\subset$平面$ABC$，所以由线面平行判定定理可知：$EF//$平面$ABC$；
(2)因为$BC\perp BD$，平面$ABD\perp$平面$BCD$，平面$ABD\cap$平面$BCD=BD$，$BC\subset$平面$BCD$，
所以$BC\perp$平面$ABD$，又$AD\subset$平面$ABD$，
所以$BC\perp AD$，
又因为$AD\perp AB$，且$AB\cap BC=B$，$AB$、$BC\subset$平面$ABC$，
所以$AD\perp$平面$ABC$，又$AC\subset$平面$ABC$，所以$AD\perp AC$.

8.【答案】(Ⅰ)证明：$\because PD\perp$平面$ABCD$，$AC\subset$平面$ABCD$，$\therefore PD\perp AC$，
又四边形$ABCD$是菱形，$\therefore BD\perp AC$，$\because PD\cap BD=D$，$PD$，$BD\subset$平面$PBD$，$\therefore AC\perp$平面$PBD$.
(Ⅱ)解：连接$PO$，$\because AC\perp$平面$PBD$，$\therefore\angle APO$是$PA$与平面$PBD$所成的角.
又$\angle BAD=60°$，$AD=2$，$\therefore AO=\sqrt{3}$，
$\because PD=2\sqrt{2}$，$PA=\sqrt{PD^2+DA^2}=2\sqrt{3}$，

$\therefore\sin\angle APO=\frac{AO}{AP}=\frac{1}{2}$，又$0°\le\angle APO\le 90°$，$\therefore\angle APO=30°$.

$\therefore PA$与平面$PBD$所成角的大小为$30°$.



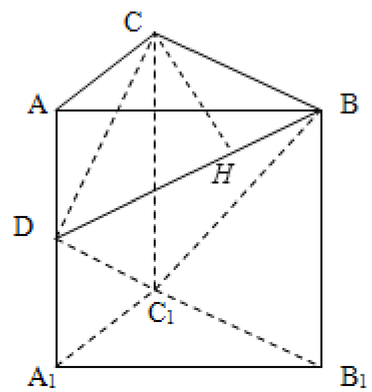

9.【答案】解：(1)证明：因为$PA\perp$底面$ABCD$，$CD\subset$底面$ABCD$，所以$PA\perp CD$，
因为$\angle PCD=90°$，所以$PC\perp CD$，$PA\cap PC=P$，$PA,PC\subset$平面$PAC$，
所以$CD\perp$平面$PAC$，因为$AC\subset$平面$PAC$，所以$CD\perp AC$.
(2)由(1)$CD\perp$平面$PAC$，$AC,AE\subset$平面$PAC$，所以$CD\perp AE$，$CD\perp AC$，
因为$PA=AC=2$，$E$为$PC$的中点，所以$AE\perp PC$，
因为$PC\cap CD=C$，$PC,CD\subset$平面$PCD$，所以$AE\perp$平面$PCD$，
所以$\angle EDA$即为直线$AD$与平面$PCD$所成的角，
因为$PA=AB=AC=2$，所以$AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=2\sqrt{2}$，$PC=\sqrt{AP^2+AC^2}=2\sqrt{2}$，所以

$AE=\frac{1}{2}PC=\sqrt{2}$，所以$\sin\angle EDA=\frac{AE}{AD}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$，

又$\angle EDA\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以$\angle EDA=\frac{\pi}{6}$，

即直线$AD$与平面$PCD$所成的角为$\frac{\pi}{6}$.

10.【答案】(1)证明：$\because ABC-A_1B_1C_1$为直三棱柱，
$\therefore CC_1\perp$平面$ABC$，又$CC_1\subset$面$ACC_1A_1$ $\therefore$面$ABC\perp$面$ACC_1A_1$,
由于$AC\perp BC$，面$ABC\cap$面$ACC_1A_1=AC$，$BC\subset$面$ABC$，
$\therefore BC\perp$面$ACC_1A_1$，$C_1D\subset$面$ACC_1A_1$ $\therefore BC\perp C_1D$，
又$\because$在矩形$ACC_1A_1$中，$AA_1=2AC$，点$D$是$AA_1$的中点，$\therefore CD\perp C_1D$.
$\because CD\cap BC=C$，$CD$，$BC\subset$面$BCD$.
$\therefore C_1D\perp$面$BCD$，
$\because C_1D\subset$面$BC_1D$，
$\therefore$面$BCD\perp$面$BC_1D$；
(2)解：过点$C$作$CH\perp BD$交$BD$于$H$，




$\because$平面$BC_1D\perp$平面$BCD$，面$BC_1D\cap$面$BCD=BD$，$\therefore CH\perp$面$BC_1D$.
$\therefore\angle CDH$就是$CD$与平面$BC_1D$所成角.
在$\triangle CDC_1$中，$BC=1$，$CD=\sqrt{2}$，

$\therefore\tan\angle CDH=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.