**江苏省仪征中学2022-2023学年度第二学期高一数学周练（2）**

一、单选题（本大题共**8**小题，共**40.0**分。在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 下列命题中，正确命题的个数是(    )

$①$单位向量都共线；

$②$长度相等的向量都相等；

$③$共线的单位向量必相等；

$④$与非零向量$\vec{a}$共线的单位向量是$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$．

A. $3$ B. $2$ C. $1$ D. $0$

2. 如图，$D$、$E$、$F$分别是$△ABC$的边$AB$、$BC$、$CA$的中点，则$\vec{AF}−\vec{DB}=$(    )

A. $\vec{FD}$ B. $\vec{FC}$ C. $\vec{FE}$ D. $\vec{BE}$

3. 函数$f(x)=x−3+lnx$的零点所在的大致区间是(    )

A. $\left(0,1\right)$ B. $\left(1,2\right)$ C. $\left(2,3\right)$ D. $\left(3,4\right)$

4. 某商场在销售空调旺季的$4$天内的利润如下表所示．

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 时间 | $$1$$ | $$2$$ | $$3$$ | $$4$$ |
| 利润$($千元$)$ | $$2$$ | $$3.98$$ | $$8.01$$ | $$15.99$$ |

现构建一个销售这种空调的函数模型，应是下列函数中的(    )

A. $y=log\_{2}x$ B. $y=2^{x}$ C. $y=x^{2}$ D. $y=2x$

5. 已知$|\vec{AB}|=1,|\vec{AC}|=1$，且$|\vec{AB}+\vec{AC}|=\sqrt{3}$，则$△ABC$的形状为(    )

A. 等腰三角形 B. 直角三角形 C. 等边三角形 D. 等腰直角三角形

6. 若$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=3$，向量$\vec{a}$与向量$\vec{b}$的夹角为$150°$，则向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$上的投影向量为．(    )

A. $\frac{3}{2}\vec{b}$ B. $−\frac{3}{2}\vec{b}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{b}$ D. $−\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{b}$

7. 正方形$ABCD$的边长为$2$，$O$是正方形$ABCD$的中心，过中心$O$的直线$l$与边$AB$交于点$M$，与边$CD$交于点$N$，$P$为平面内一点，且满足$2\vec{OP}=λ\vec{OB}+(1−λ)\vec{OC}$，则$\vec{PM}⋅\vec{PN}$的最小值为(    )

A. $−\frac{1}{4}$ B. $−\frac{9}{4}$ C. $−2$ D. $−\frac{7}{4}$

8. 函数$f(x)=(x^{2}−ax−1)(x−b)$，当$x>0$时，$f(x)\geq 0$，则$\frac{b}{a}$的取值可以是(    )

A. $−1$ B. $0$ C. $\frac{1}{2}$ D. $1$

二、多选题（本大题共**4**小题，共**20.0**分。在每小题有多项符合题目要求）

9. 下列说法正确的是(    )

A. $f\left(x\right)=\frac{\left|x\right|}{x}$与$g\left(x\right)=\left\{\begin{matrix}1,x\geq 0\\−1,x<0\end{matrix}\right.$表示同一函数
B. 函数$y=f\left(x\right)$的图象与直线$x=1$的交点至多有$1$个
C. 若$f\left(x\right)=\left|x−1\right|−\left|x\right|$，则$f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=1$
D. 关于$x$的方程$x^{2}+\left(m−3\right)x+m=0$有一个正根，一个负根的充要条件是$m\in \left(0,+\infty \right)$

10. 下列函数中，在区间$[−1,3]$上存在唯一零点的有(    )

A. $f(x)=x^{2}−2x−3$ B. $g(x)=x^{\frac{3}{2}}−2$
C. $ℎ(x)=2^{x−1}−1$ D. $φ(x)=1−ln(x+2)$

11. 已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$满足$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，$\vec{a}⋅\vec{b}=1$，$|\vec{c}|^{2}−2\vec{b}⋅\vec{c}+\frac{3}{4}=0$，则下列说法正确的是(    )

A. $|\vec{c}−\vec{b}|=1$
B. 若$|\vec{c}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则$\vec{c}⊥(\vec{c}−\vec{b})$
C. $∀t\in R$，有$|\vec{b}+t\vec{a}|\geq \frac{\sqrt{3}}{2}$恒成立
D. 若$\vec{c}=λ\vec{a}+(1−λ)\vec{b}$，$λ\in R$，则$|\vec{a}−\vec{c}|$的值唯一

12. $△ABC$中，$A=\frac{π}{2}$，$AB=AC=2$，则下列结论中正确的是(    )

A. 若$G$为$△ABC$的重心，则$\vec{AG}=\frac{2}{3}\vec{AB}+\frac{2}{3}\vec{AC}$
B. 若$P$为$BC$边上的一个动点，则$\vec{AP}⋅(\vec{AB}+\vec{AC})$为定值$4$
C. 若$M$、$N$为$BC$边上的两个动点，且$MN=\sqrt{2},则\vec{AM}⋅\vec{AN}$的最小值为$\frac{3}{2}$
D. 已知$Q$是$△ABC$内部$($含边界$)$一点，若$AQ=1$，且$\vec{AQ}=λ\vec{AB}+μ\vec{AC}$，则$λ+μ$的最大值是$1$

三、填空题（本大题共**4**小题，共**20.0**分）

13. 关于$x$的方程，$x^{2}+ax+2=0$的两根都小于$1$，则实数$a$的取值范围为          ．

14. 已知向量$\vec{a} ,  \vec{b}$的夹角是$60^{∘}$，且$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，则$\overset{\to }{a}⋅(\overset{\to }{a}+\overset{\to }{b})=$          $\\_.$

15. 若关于$x$的不等式$3−|x−a|>x^{2}$在$\left(−\infty ,0\right)$上有解，则实数$a$的取值范围是

16. 已知非零平面向量$\vec{a},\vec{b}$不共线，且满足$\vec{a}⋅\vec{b}=\vec{a}^{2}=4$，记$\vec{c}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$，当$\vec{b},\vec{c}$的夹角取得最大值时，$\left|\vec{a}−\vec{b}\right|$的值为          ．

四、解答题（本大题共**6**小题，共**72.0**分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. $($本小题$12.0$分$)$

已知$\vec{a}=(3,2),\vec{b}=(−1,2).$

$(1)$求$3\vec{a}+\vec{b}$；$(2)$若$\overset{\to }{a}⊥(\overset{\to }{a}+λ\overset{\to }{b})$，求$λ$．

18. $($本小题$12.0$分$)$

已知$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，且$(2\vec{a}+\vec{b})⋅(4\vec{a}−3\vec{b})=−6$．

$(1)$求$\vec{a}⋅\vec{b}$的值．$(2)$求$|2\vec{a}−\vec{b}|$．

19. $($本小题$12.0$分$)$

如图，在平面直角坐标系中，$\left|\vec{OA}\right|=2\left|\vec{AB}\right|=4$，$∠OAB=\frac{2π}{3}$，$\vec{BC}=\left(−2,2\sqrt{3}\right)$

$(1)$求点$B,C$的坐标；$(2)$求证：四边形$OABC$为等腰梯形．

20. $($本小题$12.0$分$)$

$2022$年$12$月$7$日，国务院发布了精准防控新冠疫情的十条最新措施，以减轻疫情防控对企业经营和民众生活带来的损失．某公司为了尽快恢复经营活动，决定对业绩在$50$万元到$200$万元的业务员进行奖励，奖励方案遵循以下原则：奖金$y($单位：万元$)$随着业绩值$x($单位：万元$)$的增加而增加，但不超过业绩值的$5\%$．

$(1)$若某业务员的业绩为$100$万，核定可得$5$万元奖金，若该公司用函数$y=lgx+kx+1(k$为常数$)$作为奖励函数模型，则业绩$200$万元的业务员可以得到多少奖励？$($参考数据$lg2≈0.30,lg3≈0.48)$

$(2)$若采用函数$f(x)=\frac{1}{4}x^{2}−(a−0.05)x+100a−8000$，求$a$的范围．

21. $($本小题$12.0$分$)$
如图，在$△OAB$中，$\vec{OC}=\frac{1}{4}\vec{OA}$，$\vec{OD}=\frac{1}{2}\vec{OB}$，$AD$与$BC$交于点$M$，设$\vec{OA}=\vec{a}$，$\vec{OB}=\vec{b}$．
$(1)$若$\vec{OM}=x\vec{a}+y\vec{b}$，求$x$及$y$；
$(2)$在线段$AC$上取一点$E$，在线段$BD$上取一点$F$，使$EF$过$M$点，设$\vec{OE}=p\vec{OA}$，$\vec{OF}=q\vec{OB}$，求$7pq+2q$的最小值．

|  |
| --- |
|  |

22. $($本小题$12.0$分$)$
函数$f(x)$的定义域为$D$，若$x\_{0}\in D$，满足$f(x\_{0})=x\_{0}$，则称$x\_{0}$为$f(x)$的不动点．
已知函数$f(x)=\left\{\begin{matrix}3−3x,0\leq x\leq 1\\log\_{3}x,1<x\leq 3\end{matrix}\right.$，$g(x)=f(f(x))$．
$(1)$试判断$g(x)$不动点的个数，并给予证明；
$(2)$若“$∃x\in [0,\frac{2}{3}),g(x)−1>log\_{3}(1+x)+log\_{3}(x+k)$”是真命题，求实数$k$的取值范围．

**答案和解析**

1.【答案】$D$

【解析】

【分析】

本题主要考查了向量的概念，属于基础题．
利用单位向量，相等向量，共线向量的概念逐个判断即可得出结论．

【解答】

解：不同的单位向量有不同的方向，故$①$错；
长度相等的向量方向不一定相同，故$②$错；
共线的单位向量有可能方向相反，故$③$错；
与非零向量$\vec{a}$共线的单位向量是$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$或$−\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$，故$④$错．
故选*D*．

2.【答案】$D$

【解析】

【分析】

本题考查向量的减法三角形法则，考查共线向量，属于基础题．
利用$D$、$E$、$F$分别是$△ABC$的边$AB$、$BC$、$CA$的中点，及向量的减法三角形法则，可得结论．

【解答】

解：$∵D$是$△ABC$的边$AB$的中点，

$∴\vec{AD}=\vec{DB}$，
$∴\vec{AF}−\vec{DB}=\vec{AF}−\vec{AD}=\vec{DF}$，
$∵D$、$F$分别是$△ABC$的边$AB$、$CA$的中点，
$∴\vec{DF}=\frac{1}{2} \vec{BC}$，
$∵E$是$△ABC$的边$BC$的中点，
$∴\vec{BE}=\frac{1}{2}\vec{BC}$，
$∴\vec{DF}=\vec{BE}$．
$∴\vec{AF}−\vec{DB}=\vec{BE}$，
故选*D*．

3.【答案】$C$

【解析】

【分析】

本题考查判断函数零点、方程的根所在区间的方法，属于基础题．
结合$f\left(x\right)$的单调性和零点存在性定理即可求得正确答案．

【解答】

解：因为函数$f(x)=x−3+lnx$在$\left(0,+\infty \right)$上单调递增，

$f\left(1\right)=−2<0,f\left(2\right)=ln2−1<0,f\left(3\right)=ln3>0$，

所以$f\left(2\right)⋅f\left(3\right)<0$，所以$f\left(x\right)$的零点所在的大致区间是$\left(2,3\right)$．

故选：$C$．

4.【答案】$B$

【解析】

【分析】

本题考查了指数函数、对数函数与幂函数模型的相关知识，属于基础题．
把$x=1$，$2$，$3$，$4$分别代入选项中的函数，求出函数值与表格中的对应值比较，即可得到结果．

【解答】

解：对于$A$，当$x=1$时，$y=0$，不符合题意，
对于$B$，把$x=1$，$2$，$3$，$4$代入$y=2^{x}$，
所得的函数值接近表格中的对应值，符合题意，
对于$C$，把$x=1$，$2$，$4$代入$y=x^{2}$，所得的函数值接近表格中的对应值，
当$x=3$时，$y=9$，与表格中的对应值差距较大，不符合题意，
对于$D$，把$x=1$，$2$代入$y=2x$，所得的函数值接近表格中的对应值，
当$x=3$时，$y=6$，与表格中的对应值差距较大，不符合题意，
故选*B*．

5.【答案】$C$

【解析】

【分析】

本题主要考查了平面向量的模，三角形的形状判断，属于基础题．
由题意画出图形，可知四边形$ABCD$为菱形，根据向量的模长可得$∠BAC=60°$，从而判断$△ABC$的形状．

【解答】

解：如图所示，

由向量加法的平行四边形法则及$|\vec{AB}|=1,|\vec{AC}|=1$，
可知，构成的四边形$ABCD$为菱形，
且菱形较长对角线长为$\left|\vec{AD}\right|=\left|\vec{AB}+\vec{AC}\right|=\sqrt{3}$，
所以$\left|\vec{BC}\right|=1$，
所以$∠BAC=60°$，
所以$△ABC$的形状为等边三角形．
故选*C*．



6.【答案】$D$

【解析】

【分析】

本题主要考查向量的数量积，考查投影向量，属于基础题．
利用投影向量的定义直接求解．

【解答】

解：因为$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=1$，向量$\vec{a}$与向量$\vec{b}$的夹角为$150°$，

所以向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$上的投影向量为：$|\vec{a}|cos ⟨\vec{a},\vec{b}⟩\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=3×(−\frac{\sqrt{3}}{2})×\frac{\vec{b}}{3}=−\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{b}$．

故选：$D$．

7.【答案】$D$

【解析】

【分析】

本题主要考查的是用基底表示向量，向量数量积的概念及运算，属于较难题．
根据题意可得 $\vec{OP}=\frac{λ\vec{CB}+\vec{OC}}{2}$，进而可得 $\vec{OP}^{2}=λ^{2}−λ+\frac{1}{2}$，从而利用向量的数量积公式及二次函数的性质即可求得结果．

【解答】

解：由 $2\vec{OP}=λ\vec{OB}+\left(1−λ\right)\vec{OC}$，得 $\vec{OP}=\frac{λ\vec{CB}+\vec{OC}}{2}$，
因此 $\vec{OP}^{2}=\frac{4λ^{2}−4λ+2}{4}=λ^{2}−λ+\frac{1}{2}$，
所以 $\vec{PM}·\vec{PN}=\left(\vec{PO}+\vec{OM}\right)·\left(\vec{PO}+\vec{ON}\right)$
$$=\left(\vec{PO}+\vec{OM}\right)·\left(\vec{PO}−\vec{OM}\right)$$

$=\vec{PO}^{2}−\vec{OM}^{2}=λ^{2}−λ+\frac{1}{2}−\vec{OM}^{2}$，
当 $λ=\frac{1}{2},|OM|$取最大值时， $\vec{PM}⋅\vec{PN}$取得最小值$−\frac{7}{4}$．
故选*D*．

8.【答案】$A$

【解析】

【分析】

此题考查函数与方程的应用，考查数学转化思想，属于较难题．
构造$g(x)=x^{2}−ax−1$，$ℎ(x)=x−b$，当$b\leq 0$时，判断$g(x)=x^{2}−ax−1\geq 0$在$(0,+\infty )$上是否恒成立，当$b>0$时，可得$g(x)$必过点$(b,0)$，函数$g(x)=x^{2}−ax−1$，$ℎ(x)=x−b$，两函数同号，求得$\frac{b}{a}=\frac{b}{b−\frac{1}{b}}=\frac{b^{2}}{b^{2}−1}=1+\frac{1}{b^{2}−1}$，结合选项即可判断．

【解答】

解：设$g(x)=x^{2}−ax−1$，$ℎ(x)=x−b$，
则$ℎ(x)$在$(0,+\infty )$上为增函数，且$ℎ(b)=0$，
当$b\leq 0$时，$ℎ(x)\geq 0$在$(0,+\infty )$上恒成立，
若当$x>0$时，$f(x)\geq 0$，则$g(x)=x^{2}−ax−1\geq 0$在$(0,+\infty )$上恒成立，
设$x\_{1}$，$x\_{2}$为方程$x^{2}−ax−1=0$的两个解，
则$Δ=a^{2}+4>0$，$x\_{1}x\_{2}=−1<0$，
此时方程$x^{2}−ax−1=0$有一正一负两个实根，
不能满足$g(x)=x^{2}−ax−1\geq 0$在$(0,+\infty )$上恒成立，不合题意．
当$b>0$时，
当$x>0$时，$f(x)\geq 0$，则有$x>b$时，$g(x)\geq 0$，
当$0<x<b$时，$g(x)\leq 0$，
即$g(x)$必过点$(b,0)$，
则$g(b)=b^{2}−ab−1=0$，即$a=b−\frac{1}{b}$，
此时$g(x)=x^{2}+(\frac{1}{b}−b)x−1=(x+\frac{1}{b})(x−b)$，
则满足$g(x)$的另一个零点$−\frac{1}{b}<0$，符合题意，
所以$\frac{b}{a}=\frac{b}{b−\frac{1}{b}}=\frac{b^{2}}{b^{2}−1}=1+\frac{1}{b^{2}−1}$，又$b>0$，
所以$\frac{b}{a}\in \left(−\infty ,0\right)∪\left(1,+\infty \right)$
由选项可知，只有$A$满足，
故选*A*．

9.【答案】$BC$

【解析】

【分析】

本题考查判断两个函数是否为同一函数，函数的定义，求函数值，方程的根的个数，属于基础题．
$A$，根据同一函数的概念即可判断；$B$，根据函数的定义即可判断；$C$，直接计算函数值即可；$D$，根据一元二次方程的判别式和根与系数的关系列不等式即可判断．

【解答】

解：对于$A$，$f\left(x\right)=\frac{\left|x\right|}{x}$的定义域为$\left(−\infty ,0\right)⋃\left(0,+\infty \right)$，$g\left(x\right)$定义域为$R$，定义域不同，所以不是同一函数，故*A*错误；

对于$B$，根据函数的定义可知，当$y=f\left(x\right)$的定义域中含有$1$时，函数$y=f\left(x\right)$的图象与直线$x=1$有一个交点$\left(1,f\left(1\right)\right)$，

当$y=f\left(x\right)$的定义域中不含$1$时，函数$y=f\left(x\right)$的图象与直线$x=1$没有交点，

综上所述：函数$y=f\left(x\right)$的图象与直线$x=1$的交点至多有$1$个，故*B*正确；

对于$C$，因为$f\left(x\right)=\left|x−1\right|−\left|x\right|$，所以$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，所以$f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f\left(0\right)=1$，故*C*正确；

对于$D$，设方程$x^{2}+\left(m−3\right)x+m=0$的正根为$x\_{1}$，负根为$x\_{2}$，

则关于$x$的方程$x^{2}+\left(m−3\right)x+m=0$有一个正根，一个负根的充要条件为：$\{\begin{array}{c}Δ=(m−3)^{2}−4m>0\\x\_{1}⋅x\_{2}=m<0\end{array}$，解得$m<0$，故*D*错误．

故选*BC*．

10.【答案】$BCD$

【解析】

【分析】

本题重点考查函数的单调性，零点存在定理，属于容易题．

【解答】

解：因为$f(x)=x^{2}−2x−3=0$的解为$x=−1$，$x=3$，所以$f(x)$在区间$[−1,3]$上有两个零点，所以$A$不正确$;$

因为$g(x)=x^{\frac{3}{2}}−2$在$[0,+\infty )$上为增函数，且$g(0)=−2$，$g(3)=\sqrt{27}−2>0$，所以$g(x)$在区间$[−1,3]$上存在唯一零点，*B*正确$;$

因为$ℎ(x)=2^{x−1}−1$在$R$上为增函数，且$ℎ(−1)=−\frac{3}{4}$，$ℎ(3)=3$，所以$ℎ(x)$在区间$[−1,3]$上存在唯一零点，*C*正确$;$

因为$φ(x)=1−ln(x+2)$在$(−2,+\infty )$上为减函数，且$φ(−1)=1$，$φ(3)=1−ln5<0$，

所以$φ(x)$在区间$[−1,3]$上存在唯一零点，所以*D*正确．

11.【答案】$BC$

【解析】

【分析】

本题考查向量数量积的性质，以及向量的运算，考查转化思想和运算能力、推理能力，属于中档题．
由向量的平方即为模的平方，化简计算可判断$A$；
由向量垂直的条件：数量积为$0$，可判断$B$；
由向量的平方即为模的平方，结合二次函数的最值，可判断$C$；
由向量的减法和向量的平方即为模的平方，计算可判断$D$．

【解答】

解：由于$|\vec{b}|=1$，$|\vec{c}|^{2}−2\vec{b}⋅\vec{c}+\frac{3}{4}=0$，可得$|\vec{c}−\vec{b}|^{2}=(\vec{c}−\vec{b})^{2}=\vec{c}^{2}−2\vec{b}⋅\vec{c}+\vec{b}^{2}=−\frac{3}{4}+1=\frac{1}{4}$，即有$|\vec{c}−\vec{b}|=\frac{1}{2}$，故*A*错误；
若$|\vec{c}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$|\vec{c}|^{2}−2\vec{b}⋅\vec{c}+\frac{3}{4}=0$，可得$\vec{b}⋅\vec{c}=\frac{3}{4}$，所以$\vec{c}⋅(\vec{c}−\vec{b})=\vec{c}^{2}−\vec{b}⋅\vec{c}=\frac{3}{4}−\frac{3}{4}=0$，则$\vec{c}⊥(\vec{c}−\vec{b})$，故*B*正确；
由$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，$\vec{a}⋅\vec{b}=1$，可得$|\vec{b}+t\vec{a}|=\sqrt{\vec{b}^{2}+2t\vec{a}⋅\vec{b}+t^{2}\vec{a}^{2}}=\sqrt{1+2t+4t^{2}}=\sqrt{4(t+\frac{1}{4})^{2}+\frac{3}{4}}\geq \frac{\sqrt{3}}{2}$，
当$t=−\frac{1}{4}$时，取得等号，故*C*正确；
若$\vec{c}=λ\vec{a}+(1−λ)\vec{b}$，$λ\in R$，则$|\vec{a}−\vec{c}|=|(1−λ)\vec{a}−(1−λ)\vec{b}|=|1−λ|⋅|\vec{a}−\vec{b}|=|1−λ|⋅\sqrt{\vec{a}^{2}−2\vec{a}⋅\vec{b}+\vec{b}^{2}}=\sqrt{3}|1−λ|$不唯一，故*D*错误．
故选：$BC$．

12.【答案】$BC$

【解析】

【分析】

本题主要考查平面向量的线性运算和数量积，考查逻辑思维能力与推理运算能力，属于难题．
根据选项画图，由平面向量的线性运算和数量积依次计算判断即可$.$

【解答】

解：$A:$取$BC$中点$D$，连接$AD$，

则$\vec{AG}=\frac{2}{3}\vec{AD}=\frac{2}{3}×\frac{1}{2}\left(\vec{AB}+\vec{AC}\right)=\frac{1}{3}\vec{AB}+\frac{1}{3}\vec{AC}$，故*A*错误$.$
$B:$如图，由题意得$\left|BC\right|=2\sqrt{2}$，

$\left|\vec{AD}\right|=\frac{1}{2}\left|\vec{BC}\right|=\sqrt{2}$，
所以$\vec{AP}⋅(\vec{AB}+\vec{AC})=\vec{AP}⋅2\vec{AD}=2×\left|\vec{AD}\right|×\left|\vec{AP}\right|×cos∠DAP=2×\left|\vec{AD}\right|×\left|\vec{AD}\right|=4$，故*B*正确$.$
$C:$如图，$\left|\vec{MN}\right|=\sqrt{2}$，

所以$\vec{AM}⋅\vec{AN}=\left(\vec{AC}+\vec{CN}+\vec{NM}\right)·\left(\vec{AC}+\vec{CN}\right)$
$$=\vec{AC}^{2}+\vec{AC}·\vec{NM}+\vec{CN}^{2}+2\vec{AC}·\vec{CN}+\vec{CN}·\vec{NM}$$

$$=4+2×\sqrt{2}×\left(−\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left|\vec{CN}\right|^{2}+2×2×\left|\vec{CN}\right|×\left(−\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left|\vec{CN}\right|×\sqrt{2}$$

$$=2+\left|\vec{CN}\right|^{2}−\sqrt{2}\left|\vec{CN}\right|$$

$=\left(\left|\vec{CN}\right|−\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2}+\frac{3}{2}$，
即当$\left|\vec{CN}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$\vec{AM}⋅\vec{AN}$有最小值$\frac{3}{2}$，故*C*正确$.$
$D:$如图，$\left|\vec{AQ}\right|=1$，

所以$Q$点的轨迹是以$A$为圆心，$1$为半径的圆在$△ABC$内部的圆弧部分．
延长$AQ$交$BC$于点$H.$设$\vec{AQ}=x\vec{AH}=λ\vec{AB}+μ\vec{AC}$，
由图可得$0<x<1$，
则$\vec{AH}=\frac{λ}{x}\vec{AB}+\frac{μ}{x}\vec{AC}$，
由平面向量三点共线定理可得，
因为$C$，$B$，$H$三点共线，所以$\frac{λ}{x}+\frac{μ}{x}=1$，
所以$λ+μ=x$，
又$x<1$，所以$λ+μ$的最大值小于$1$，故*D*错误$.$



13.【答案】$[2\sqrt{2},+\infty )$

【解析】

【分析】

由方程有两个小于$1$且不相等的实数根知判别式$△⩾0$，两根$x\_{1}+x\_{2}<2$，$(x\_{1}−1)(x\_{2}−1)>0$，联立求解即可．
本题考查了一元二次方程的根的分布与系数的关系，列方程组求解，要注意条件的等价性，属于中档题．

【解答】

解：由题意可得判别式$△⩾0$，两根之和$x\_{1}+x\_{2}<2$，$(x\_{1}−1)(x\_{2}−1)>0$，
即$\left\{\begin{matrix}△=a^{2}−8⩾0\\−a<2\\(x\_{1}−1)(x\_{2}−1)=x\_{1}⋅x\_{2}−(x\_{1}+x\_{2})+1>0\end{matrix}\right.$，即$\left\{\begin{matrix}a^{2}⩾8\\a>−2\\2−(−a)+1>0\end{matrix}\right.$．
解得$a\geq 2\sqrt{2}$，
故答案为$[2\sqrt{2},+\infty )$．

14.【答案】$2$

【解析】

【分析】

本题考查向量的数量积运算，属于基础题．
利用向量的数量积运算公式可直接求解．

【解答】

解：利用向量的数量积，得到
$$\vec{a}⋅(\vec{a}+\vec{b})=\left|\vec{a}\right|^{2}+\vec{a}·\vec{b}$$

$=1+\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|cos60°=1+2×\frac{1}{2}=2$．
故答案填：$2$．

15.【答案】$(−\frac{13}{4},3)$

【解析】

【分析】

本题考查函数的零点与方程的根，属于一般题．
将$3−|x−a|>x^{2}$在$\left(−\infty ,0\right)$上有解转化为$3−x^{2}>|x−a|$至少有一个负数解，构造$f(x)=3−x^{2},g(x)=|x−a|,$画出图象，平移$g(x)=|x−a|$图象，根据临界点判断求解即可．

【解答】

解：由题知，可将$3−|x−a|>x^{2}$在$\left(−\infty ,0\right)$上有解，

转化为$3−x^{2}>|x−a|$至少有一个负数解，

构造$f(x)=3−x^{2},g(x)=|x−a|$，

画出两函数的图象，如图：

当$a=3$时，$f\left(x\right)$与$g\left(x\right)$相交于点$\left(0,3\right)$，

要使$f\left(x\right)$与$g\left(x\right)$的交点在$y$轴左侧，

则需满足$a<3$，

在函数$g\left(x\right)$不断左移的过程中，

若与$f\left(x\right)$左侧曲线相切，

则有$3−x^{2}=x−a$，

即$x^{2}+x−a−3=0$，

则$Δ=1−4\left(−a−3\right)=4a+13=0$，

解得$a=−\frac{13}{4}$，

则$a>−\frac{13}{4}$，
综上$−\frac{13}{4}<a<3$，
则实数$a$的取值范围是$(−\frac{13}{4},3)$．

故答案为：$(−\frac{13}{4},3)$．

16.【答案】$4$

【解析】

【分析】

本题主要考查的是向量的综合应用，属于较难题．
可结合条件建立适当坐标系，转化为坐标运算求解，注意基本不等式的利用．

【解答】

解：因为$\vec{a}⋅\vec{b}=\vec{a}^{2}=4$，设向量$\vec{a}$，$\vec{b}$夹角为$α$，
则有$\left|\vec{a}\right|=2,\left|\vec{b}\right|cosα=2$，建立平面直角坐标系如图，

其中$\vec{OA}=\vec{a},\vec{OB}=\vec{b}$，
则$\vec{a}=\left(2,0\right),\vec{b}=\left(2,m\right)$，$\vec{c}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}=\left(2,\frac{m}{4}\right)$，$\left(m>0\right)$，
如图$\vec{OC}=\vec{c}$，则$\vec{b}$，$\vec{c}$的夹角为$∠BOC$，
又$tan∠AOC=\frac{m}{8},tan∠AOB=\frac{m}{2}$，
所以$tan∠BOC=tan\left(∠AOB−∠AOC\right)=\frac{\frac{m}{2}−\frac{m}{8}}{1+\frac{m^{2}}{16}}$
$=\frac{6m}{m^{2}+16}=\frac{6}{m+\frac{16}{m}}\leq \frac{6}{2\sqrt{m×\frac{16}{m}}}=\frac{3}{4}$，
当且仅当$m=4$时，正切值取最大值，
此时$\vec{b}=\left(2,4\right),\vec{a}−\vec{b}=\left(0,−4\right),\left|\vec{a}−\vec{b}\right|=4$，
故答案为$4$．



17.【答案】解：$(1)∵\vec{a}=(3,2),\vec{b}=(−1,2)$，

$∴3\vec{a}+\vec{b}=(9,6)+(−1,2)=(8,8)$；

$(2)∵\overset{\to }{a}⊥(\overset{\to }{a}+λ\overset{\to }{b})$，

$∴\vec{a}⋅(\vec{a}+λ\vec{b})=0$，

即$(3,2)⋅(3−λ,2+2λ)$

$$=9−3λ+4+4λ$$

$=13+λ=0$，

得$λ=−13$．

【解析】本题考查向量线性运算的坐标表示，考查向量数量积的坐标表示与向量的垂直关系，属于基础题．
$(1)$根据向量线性运算的坐标表示可得答案；
$(2)$由题意$\vec{a}⋅(\vec{a}+λ\vec{b})=0$，根据向量数量积的坐标表示可得答案．

18.【答案】解：$(1)$由题意知，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，且$(2\vec{a}+\vec{b})⋅(4\vec{a}−3\vec{b})=−6$，
则$(2\vec{a}+\vec{b})⋅(4\vec{a}−3\vec{b})=8\vec{a}^{2}−2\vec{a}⋅\vec{b}−3\vec{b}^{2}=−6$，
即$8−2\vec{a}⋅\vec{b}−12=−6$，
故$\vec{a}⋅\vec{b}=1$．
$(2)$由$(1)$知$\vec{a}⋅\vec{b}=1$，
由题意知，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，
故$|2\vec{a}−\vec{b}|=\sqrt{4\vec{a}^{2}−4\vec{a}⋅\vec{b}+\vec{b}^{2}}=\sqrt{4−4+4}=2$．

【解析】本题考查利用向量的数量积求向量的模、向量的数量积的概念及其运算，属于较易题．
$(1)$由题意结合向量数量积的运算，即可求得$\vec{a}⋅\vec{b}$的值．
$(2)$由$(1)$的结论，结合向量数量积的运算，即可求得向量$2\vec{a}−\vec{b}$的模．

19.【答案】解：$(1)$设$B\left(x,y\right)$，则$x=|\overset{\to }{OA}|+|\overset{\to }{AB}|cos(π−∠OAB)=5$，

$y=|\overset{\to }{AB}|sin(π−∠OAB)=\sqrt{3}$，

$∴B\left(5,\sqrt{3}\right)$，

$∴\vec{OC}=\vec{OB}+\vec{BC}=(5,\sqrt{3})+(−2,2\sqrt{3})=(3,3\sqrt{3})$，

$∴C\left(3,3\sqrt{3}\right)$；

$(2)$证明：连接$OC$，

$∵\vec{OC}=\left(3,3\sqrt{3}\right)$，$\vec{AB}=\left(1,\sqrt{3}\right)$，

$∴\vec{OC}=3\vec{AB}$，$∴\vec{OC}//\vec{AB}$且$\left|\vec{OC}\right|\ne \left|\vec{AB}\right|$，

又$\left|\vec{OA}\right|=4$，$\left|\vec{BC}\right|=\sqrt{\left(−2\right)^{2}+\left(2\sqrt{3}\right)^{2}}=4$，

$∴\left|\vec{OA}\right|=\left|\vec{BC}\right|$，

$∴$四边形$OABC$为等腰梯形．

【解析】本题考查平面向量在几何中的应用，涉及向量线性运算的坐标表示，以及共线定理的应用，属于较难题．
$(1)$先根据$\left|\vec{OA}\right|=2\left|\vec{AB}\right|=4$，$∠OAB=\frac{2π}{3}$，求得$B$的坐标，再根据$\vec{OC}=\vec{OB}+\vec{BC}$即可得点$C$的坐标；

$(2)$利用向量的坐标可得$\vec{OC}//\vec{AB}$，计算模可得$\left|\vec{OA}\right|=\left|\vec{BC}\right|$，从而证得．

20.【答案】解：$(1)$对于函数模型$y=lgx+kx+1(k$为常数$)$，

当$x=100$时，$y=5$，代入得，$5=lg100+100k+1$

解得$k=\frac{1}{50}$，即$y=lgx+\frac{1}{50}x+1$，

因为函数$y=lgx$和函数$y=\frac{1}{50}x+1$在$\left[50,200\right]$上都为增函数

所以函数$y=lgx+\frac{1}{50}x+1$在$\left[50,200\right]$上都为是增函数，

当$x=200$时，$y=lg200+4+1=lg\left(2×100\right)+5=lg2+7≈7.30$，

所以业绩$200$万元的业务员可以得到$7.3$万元奖励．

$(2)$对于函数模型$f(x)=\frac{1}{4}x^{2}−(a−0.05)x+100a−8000$，

因为函数$f(x)$在$\left[50,200\right]$递增，所以$−\frac{−(a−0.05)}{2×\frac{1}{4}}\leq 50$，即$a\leq 25.05$；

又由奖金不超过业绩值的$5\%$，得

$f(x)=\frac{1}{4}x^{2}−(a−0.05)x+100a−8000\leq x⋅5\%$恒成立，

即$\frac{1}{4}x^{2}−ax+100a−8000\leq 0$对$x\in \left[50,200\right]$恒成立．

记$g(x)=\frac{1}{4}x^{2}−ax+100a−8000$，

因为二次函数$g(x)$图象开口向上且$a\leq 25.05$，所以函数$g\left(x\right)$图象的对称轴$x=2a\leq 50.1$，

所以只需$g(x)\_{max}=g(200)\leq 0$，即$10000−200a+100a−8000\leq 0$

解得$a\geq 20.$所以$20\leq a\leq 25.05$

综上可知，实数$a$的取值范围是$\left[20,25.05\right]$．

【解析】本题考查函数模型的综合应用，属于一般题．
$(1)$将题中的条件代入，可以求出具体的函数解析式，即可解决．

$(2)$根据题意列出关于$x$的不等式，然后把问题转化为研究函数的恒成立问题，进而确定参数$a$的取值范围．

21.【答案】解：$(1)$因为$B$，$M$，$C$三点共线，所以存在实数$m$，使得
$\vec{OM}= m\vec{OC}+(1−m)\vec{OB}=m⋅\frac{1}{4}\vec{OA}+(1−m)\vec{OB}=\frac{m}{4}\vec{a}+(1−m)\vec{ b}$，
又$A$，$M$，$D$三点共线，所以存在实数$n$，使得$\vec{OM}= n\vec{OA}+(1−n)\vec{OD}=n\vec{a}+\frac{1}{2}(1−n)\vec{b}$，
由于$\vec{a},\vec{b}$不共线，所以$\left\{\begin{matrix}\frac{m}{4}=n\\1−m=\frac{1}{2}(1−n)\end{matrix}\right.$，解得$m=\frac{4}{7},n=\frac{1}{7}$，
故$\vec{OM}=\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{3}{7}\vec{b}$，所以$x=\frac{1}{7},y=\frac{3}{7}$；
$(2)$因为$E$，$M$，$F$三点共线，所以存在实数$λ$，使得$\vec{OM}=λ\vec{OE}+(1−λ)\vec{OF}=λp\vec{a}+(1−λ)q\vec{b}$，
则$\left\{\begin{matrix}λp=\frac{1}{7}\\(1−λ)q=\frac{3}{7}\end{matrix}\right.$，消去$λ$，解得$\frac{1}{7 p}+\frac{3}{7q}=1$，即$7pq=3p+q$，
所以$7pq+2q=3p+3q=(\frac{1}{7p}+\frac{3}{7q})(3p+3q)=\frac{12}{7}+\frac{9p}{7q}+\frac{3q}{7p}\geq \frac{12}{7}+2\sqrt{\frac{9p}{7q}⋅\frac{3q}{7p}}=\frac{12+6\sqrt{3}}{7}$，
当且仅当$q=\sqrt{3}p$时取等号，此时$7pq+2q$的最小值为$\frac{12+6\sqrt{3}}{7}$．

【解析】本题考查了平面向量基本定理的应用，涉及到基本不等式的应用，考查了学生的运算求解能力，属于中档题．
$(1)$利用$B$，$M$，$C$与$A$，$M$，$D$三点共线分别可设使得$\vec{OM}= m\vec{OC}+(1−m)\vec{OB}$，$\vec{OM}= n\vec{OA}+(1−n)\vec{OD}$，然后利用向量不共线建立方程求出$m$，$n$的值，由此可以求解；$(2)$因为$E$，$M$，$F$三点共线，所以存在实数$λ$，使得$\vec{OM}=λ\vec{OE}+(1−λ)\vec{OF}$，然后利用$(1)$的结论求出解得$\frac{1}{7 p}+\frac{3}{7q}=1$，然后利用基本不等式即可求解．

22.【答案】解：$g(x)=f(f(x))=\left\{\begin{matrix}log\_{3}(3−3x),&(0\leq x<\frac{2}{3})\\3−3(3−3x),&(\frac{2}{3}\leq x\leq 1)\\3−3log\_{3}x,&(1<x\leq 3)\end{matrix}\right.$
$=\left\{\begin{matrix}log\_{3}(3−3x),&(0\leq x<\frac{2}{3})\\9x−6,&(\frac{2}{3}\leq x\leq 1)\\3−3log\_{3}x,&(1<x\leq 3)\end{matrix}\right.$．
$(1)$下面分区间讨论$g(x)$的不动点个数．
$①$当$0\leq x<\frac{2}{3}$时，$g(x)=x⇒log\_{3}(3−3x)=x⇒x−log\_{3}(1−x)−1=0$，
因为函数$ℎ(x)=x−log\_{3}(1−x)−1$在$[0,\frac{2}{3})$上单调递增，$ℎ(0)=−1<0$，$ℎ(\frac{2}{3})=\frac{2}{3}>0$，
所以$ℎ(x)$在$[0,\frac{2}{3})$内存在唯一零点，即$g(x)$在$[0,\frac{2}{3})$内存在唯一不动点；
$②$当$\frac{2}{3}\leq x\leq 1$时，$g(x)=x⇒9x−6=x$，解得$x=\frac{3}{4}$，
即$g(x)$在$[\frac{2}{3},1]$内存在唯一不动点；
$③$当$1<x\leq 3$时，$g(x)=x⇒3−3log\_{3}x=x$；
$φ(x)=x+3log\_{3}x−3$在$(1,3]$上单调递增，$φ(1)=−2<0$，$φ(3)=3>0$，
所以$φ(x)=x+3log\_{3}x−3$在$(1,3]$内有唯一零点，即$g(x)$在$(1,3]$内存在唯一不动点；
综上所述，$g(x)$有$3$个不动点．
$(2)$因为“$∃x\in [0,\frac{2}{3}),g(x)−1>log\_{3}(1+x)+log\_{3}(x+k)$”是真命题，
所以$\left\{\begin{matrix}log\_{3}(3−3x)−1>log\_{3}(x+1)+log\_{3}(x+k)\\0\leq x<\frac{2}{3}\\x+1>0\\x+k>0\end{matrix}\right.$有解，
即$\left\{\begin{matrix}log\_{3}(1−x)−log\_{3}(x+1)>log\_{3}(x+k)\\0\leq x<\frac{2}{3}\\x>−k\end{matrix}\right.$有解，
所以$\left\{\begin{matrix}\frac{1−x}{1+x}>x+k\\0\leq x<\frac{2}{3}\\−x<k\end{matrix}\right.$有解，即$\left\{\begin{matrix}k<\frac{2}{x+1}−(x+1)\\−x<k\\0\leq x<\frac{2}{3}\end{matrix}\right.$有解，
即$\left\{\begin{matrix}−x<k<\frac{2}{x+1}−(x+1)\\0\leq x<\frac{2}{3}\end{matrix}\right.$有解，
令$p(x)=−x$，$q(x)=\frac{2}{x+1}−(x+1)$，函数$p(x)$与$q(x)$在$[0,\frac{2}{3})$上都是减函数，值域分别为$(−\frac{2}{3},0]$和$(−\frac{7}{15},1]$；
所以$k$的取值范围是$(−\frac{2}{3},1)$．

【解析】本题主要考查命题的真假应用，考查了不等式性质，考查了复合函数，理解新定义是是解决本题的关键，属于难题．
$(1)$用函数复合运算求出函数解析式，理解新定义，分段讨论，解方程确定不动点个数；
$(2)$对命题等价变换，用函数值域确定取值范围．