江苏省仪征中学 2022-2023 学年度高一数学周练 1

一、单选题（本大题共 8 小题，共 40.0 分。在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 在$\triangle ABC$中，“$A=\frac{\pi}{6}$”是“$\sin A=\frac{1}{2}$”的(　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

2. 下列关于向量的命题正确的是(　)

A. 若$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，则$\vec{a}=\vec{b}$　　B. 若$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，则$\vec{a}//\vec{b}$

C. 若$\vec{a}=\vec{b}$，$\vec{b}=\vec{c}$，则$\vec{a}=\vec{c}$　　D. 若$\vec{a}//\vec{b}$，$\vec{b}//\vec{c}$，则$\vec{a}//\vec{c}$

3. 若$a=10^{0.2}, b=\cos\frac{39\pi}{10}, c=\lg 0.2$，则$a,b,c$的大小关系为(　)

A. $b>a>c$　　B. $b>c>a$　　C. $a>b>c$　　D. $a>c>b$

4. 若三个变量y_1，y_2，y_3随着变量x的变化情况如下表：

x	1	3	5	7	9	11
y_1	5	135	625	1715	3645	6655
y_2	5	29	245	2189	19685	177149
y_3	5	6.10	6.61	6.985	7.2	7.4

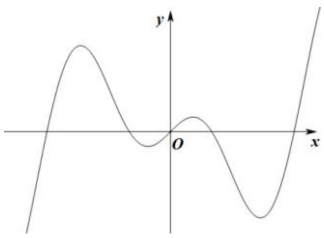
则关于x分别呈函数模型：$y=m\log_a x+n$，$y=pa^x+q$，$y=kx^a+t$变化的变量依次是(　)

A. y_1，y_2，y_3　　B. y_3，y_2，y_1　　C. y_1，y_3，y_2　　D. y_3，y_1，y_2

5. 已知函数$y=f(x)$的部分图象如图所示，则函数$f(x)$的解析式最可能是(　)

A. $y=x\cos x$　　B. $y=\sin x-x^2$

C. $y=\frac{1-\cos x}{2^x}$　　D. $y=\sin x+x$



6. 函数$f(x)$是定义在R上的偶函数，且当$x\geq 0$时，$f(x)=\sqrt{x}$，则不等式$f(x-1)\geq\sqrt{2}f(x)$的解集为(　)

A. $(-\infty,-1]$　　B. $\left[-\frac{1}{3},1\right]$　　C. $[-1,0]$　　D. $\left[-1,\frac{1}{3}\right]$

7. 关于函数$f(x)=|\tan x|$的性质，下列叙述不正确的是(　)

A. $f(x)$是偶函数　　B. $f(x)$的图象关于直线$x=k\pi(k\in Z)$对称

C. $f(x)$的最小正周期是$\frac{\pi}{2}$　　D. $f(x)$在$\left(k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in Z)$内单调递增

8. 若函数$f(x)=\begin{cases}\log_2 x+2x, x>0,\\ \sin(\omega x+\frac{\pi}{3}), -\pi\leqslant x\leqslant 0\end{cases}$有4个零点，则正实数$\omega$的取值范围是 (   )

A. $\left[\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)$ B. $\left[\frac{7}{3},\frac{10}{3}\right)$ C. $\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right]$ D. $\left(\frac{7}{3},\frac{10}{3}\right]$

二、多选题（本大题共 4 小题，共 20.0 分。在每小题有多项符合题目要求）

9. 下列运算结果为1的有 (   )

A. $e^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{4}}e^{\frac{1}{8}}$ B. $\lg 2+\lg 5$ C. $8^{\frac{2}{3}}-9^{\frac{1}{2}}$ D. $\log_2 3\times\log_3 4\times\log_4 2$

10. 已知函数$f(x)=\sin(2x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{6},0\right)$对称，则 (   )

A. $\varphi=\frac{\pi}{6}$ B. 直线$x=\frac{5\pi}{12}$是曲线$y=f(x)$的一条对称轴

C. $f(x+\pi)=f(x)$ D. $f(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增

11. 下列函数中，在定义域上单调递增且为奇函数的有(   )

A. $f(x)=\tan x$ B. $f(x)=3^x-3^{-x}$ C. $f(x)=\frac{3^x-1}{3^x+1}$ D. $f(x)=\lg\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

12. 设$f(x)=|3^x-1|$，关于函数$g(x)=[f(x)]^2-(m+2)f(x)+m(m\in\mathrm{R})$，给出下列四个叙述，其中正确的有 (   )

A. 任意$m>0$，函数$g(x)$都恰有3个不同的零点 B. 存在$m\in\mathrm{R}$，使得函数$g(x)$没有零点

C. 任意$m<0$，函数$g(x)$都恰有1个零点 D. 存在$m\in\mathrm{R}$，使得函数$g(x)$有4个不同的零点

三、填空题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

13. 写出一个满足“对任意实数a，b，$f(a+b)=f(a)f(b)$”的增函数$f(x)=$_____.

14. 把物体放在冷空气中冷却，如果物体原来的温度是θ_1℃，空气的温度是θ_0℃，那么$t min$后物体的温度θ(单位：℃)可由公式$\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}$求得，其中$k$是一个随着物体与空气的接触情况而定的正常数．现有$63°C$的物体，放在$15°C$的空气中冷却，60分钟以后物体的温度是$39°C$.要使物体的温度变为$21°C$，还要经过_____分钟．

15. 在等腰梯形$ABCD$中，设$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$，$M$为$BC$的中点，则$\overrightarrow{AM}=$_____(用$\vec{a}$和$\vec{b}$表示)，当$x=$_____时，$|\vec{b}-x\vec{a}|$最小．

16. 若函数$f(x)=\frac{x^2-a}{2^{|x|}}+1\left(x\in(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)\right)$恰有两个不同的零点，则实数$a$的取值范围是_____.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70.0 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.已知集合$A=\{x||x|\leq 4\}$，$B=\{x|5-m\leq x\leq 5+m,m>0\}$.

(1)若$m=10$，求$A\cap B$; (2)若命题p:“$\forall x\in A$，$x\in B$”是真命题，求实数m的取值范围．

18. 已知函数$f(x)=\frac{\cos(\frac{\pi}{2}+x)\cos(\frac{3\pi}{2}+x)}{\sin(\pi-x)\cos(2\pi-x)}$.

(1)求$f\left(\frac{7\pi}{4}\right)$值；　　(2)若$f(x)=-2$，求$\frac{\sin x(\sin x+\cos x)}{1+\sin^2 x}$的值.

19. 已知函数$f(x)=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-2$.

(1)求$f(x)$的单调递减区间，对称轴和对称中心；

(2)定义在区间$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$上的函数$h(x)=\lambda f(x)+\mu$的最大值为6，最小值为$-3$，求实数$\lambda,\mu$的值.

20. 2022年新冠肺炎疫情仍在世界好多国家肆虐，目前的新冠病毒是奥密克戎变异株，其特点是：毒力显著减弱，但传染性很强，绝大多数人感染后表现为无症状或轻症，重症病例很少，长期一段时间以来全国没有一例死亡病例.某科研机构对奥密克戎变异株在特定环境下进行观测，每隔单位时间T进行一次记录，用x表示经过的单位时间数，用y表示奥密克戎变异株感染人数，得到如下观测数据：

$x(T)$	1	2	3	4	5	6	…
y(人数)	…	6	…	36	…	216	…

若奥密克戎变异株的感染人数y与经过$x(x\in N^*)$个单位时间T的关系有两个函数模型

$y=mx^2+n$与$y=k\cdot a^x(k>0,a>1)$可供选择.

(参考数据：$\sqrt{2}=1.414$，$\sqrt{3}=1.732$，$\lg 2=0.301$，$\lg 3=0.477$)

(1)判断哪个函数模型更合适，并求出该模型的解析式;

(2)求至少经过多少个单位时间该病毒的感染人数不少于1万人.

21.已知函数$f(x)=x|x-m|+n$.

(1)当$f(x)$为奇函数时，求实数m的值；

(2)当$m=1$，$n>1$时，求函数$y=f(x)$在$[0,n]$上的最大值.

22. 已知$f(x)=a^x+b^x$为偶函数，其中$a>0$且$a\neq 1, b>0$且$b\neq 1$.

(1)求$4a+b$的最小值；

(2)设$g(x)=f(2x)-mf(x)+2m-4$，当$m<\frac{1}{2}$时，总存在$x_1,x_2\in[-1,1]$，使得$g(x_1)g(x_2)<0$，求a的取值范围.

答案和解析

1.【答案】A

【解析】

【分析】

本题考查了必要条件、充分条件与充要条件的判断，正弦、余弦函数的图象与性质，属于基础题.

利用充分条件和必要条件的定义，结合正弦函数的值进行判断即可.

【解答】

在三角形内$0 < A < \pi$， 由$A = \frac{\pi}{6}$，则$\sin A = \frac{1}{2}$，即充分性成立，

但当$\sin A = \frac{1}{2}$，则$A = \frac{\pi}{6}$ *或*$\frac{5\pi}{6}$，故必要性不成立.

故答案选：A.

2.【答案】C

【解析】

【分析】

本题考查了向量的定义，向量共线的定义，相等向量的定义，共线向量的定义，属于基础题.

根据向量的定义即可判断A错误，根据向量共线的定义即可判断B错误，C显然正确，对于选项D，当$\vec{b} = \vec{0}$时，便得不出$\vec{a}//\vec{c}$，即得出选项D错误.

【解答】

解：对于A：向量的长度相等，方向不一定相同，从而得不出$\vec{a} = \vec{b}$，即该选项错误；

对于B：长度相等不能得出向量相互平行，故该选项错误；

对于C：若$\vec{a} = \vec{b}$，$\vec{b} = \vec{c}$，显然可得出$\vec{a} = \vec{c}$，故该选项正确；

对于D：若$\vec{b} = \vec{0}$，$\vec{a}$，$\vec{c}$不共线，，则该选项错误.

故选：C.

3.【答案】C

【解析】

【分析】

本题考查利用函数单调性比较大小，考查指数函数、对数函数、余弦函数的图像与性质，属于基础题．

由指数函数，对数函数的性质，诱导公式与余弦函数的性质比较大小即可．

【解答】

解：$a=10^{0.2}>10^{0}=1$，$b=\cos\frac{39\pi}{10}=\cos(-\frac{\pi}{10})$，则$0<b<1$，$c=\lg0.2<\lg1=0$，

所以$a>b>c$，

故选：C．

4.【答案】B

【解析】

【分析】

本题考查对数函数、指数函数、幂函数的增长差异，属于基础题．

通过指数函数、对数函数、幂函数等不同函数模型的增长规律比较可知，对数函数的增长速度越来越慢，指数函数的增长速度越来越快，幂函数的增长速度介于指数函数与对数函数之间，从而求出答案．

【解答】

通过指数函数、对数函数、幂函数等不同函数模型的增长规律比较可知，

对数函数的增长速度越来越慢，y_3随x的变化符合此规律;

指数函数的增长速度越来越快，y_2随x的变化符合此规律;

幂函数的增长速度介于指数函数与对数函数之间，y_1随x的变化符合此规律．

故答案选：B．

5.【答案】A

【解析】

【分析】

本题考查函数图象的识别，属于基础题．

根据函数图象可断定函数$y=f(x)$为奇函数，于是可排除BC，进一步根据当$x\geqslant1$时，

$y=\sin x+x>0$，可排除D，从而作出正确选择．

【解答】

根据已知图象可知，函数$y=f(x)$为奇函数，

而B中函数$y=\sin x-x^2$和C中函数$y=\frac{1-\cos x}{2^x}$均为非奇非偶函数，所以不可能是BC；

对于D中函数$y=\sin x+x$，尽管它是奇函数，但当$x\geqslant 1$时，$y=\sin x+x>0$，所以不可能是D；

对于A，函数$y=x\cos x$是奇函数，在原点附近的零点有0，$\pm\frac{\pi}{2}$，$\pm\frac{3\pi}{2}$，符合图象特征．

故答案选：A．

6.【答案】D

【解析】

【分析】

本题考查利用函数的奇偶性和单调性解不等式，属于中档题．

先根据函数的解析式得$f(2x)=\sqrt{2}f(x),x\in\mathrm{R}$，再结合偶函数的性质与单调性求解即可．

【解答】

解：$\because f(x)$是定义在R上的偶函数，

$\therefore$当$x<0$时，$f(x)=f(-x)=\sqrt{-x}$.

当$x\geq 0$时，$f(2x)=\sqrt{2x}=\sqrt{2}\times\sqrt{x}=\sqrt{2}f(x)$；

当$x<0$时，$f(2x)=\sqrt{-2x}=\sqrt{2}\times\sqrt{-x}=\sqrt{2}f(x)$，

$\therefore f(2x)=\sqrt{2}f(x),x\in\mathrm{R}$.

$\therefore f(x-1)\geq\sqrt{2}f(x)$等价于$f(x-1)\geq f(2x)$.

易知$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，在$(-\infty,0)$上单调递减，

结合偶函数性质与$f(x)=\sqrt{x}$的单调性可得$|x-1|\geq|2x|$，

即$(x-1)^2\geq(2x)^2$，解得$x\in\left[-1,\frac{1}{3}\right]$.

故选 D.

7.【答案】C

【解析】

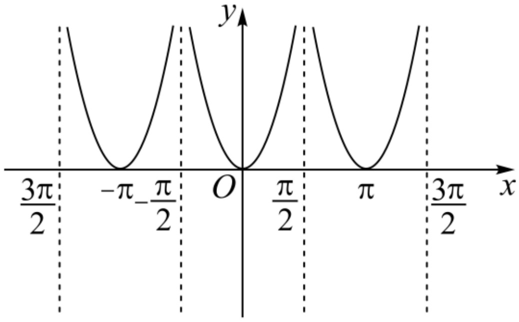
【分析】

本题考查正切函数的图像与性质，函数的奇偶性的判断，属于中档题．

作出$f(x)=|\tan x|$的图象，结合正切函数的性质对选项逐一判断．

【解答】

解：作出函数$f(x)=|\tan x|$，$\left\{x|x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$的图象如图所示，



对于A，$f(-x)=|\tan(-x)|=|\tan x|=f(x)$，故$f(x)$是偶函数，故$A$正确；

对于B，结合正切函数的性质知$f(x)$的图象关于直线$x=k\pi(k\in\mathrm{Z})$对称，故B正确；

对于C，$f(x)$的最小正周期是π，故C错误；

对于D，结合正切函数的性质知$f(x)$在$\left(k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in\mathrm{Z})$内单调递增，故$D$正确.

故选：C.

8.【答案】B

【解析】

【分析】

本题考查三角函数的零点问题，属于中档题.

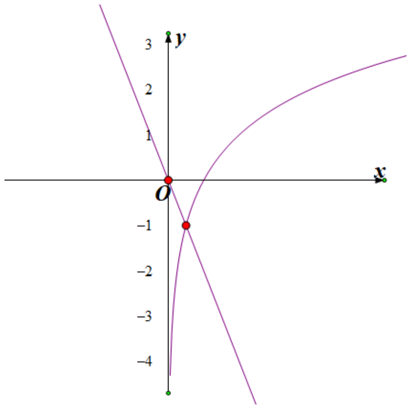
首先判断$x>0$时，函数有1个零点，得出$-\pi\leq x\leq 0$时，$y=sin(\omega x+\frac{\pi}{3})$有3个零点，求出$\omega x+\frac{\pi}{3}$的范围，利用正弦函数的图象得不等式组，进而求得答案.

【解答】

令$f(x)=0$，

当$x>0$时，$\log_2x+2x=0$，即$\log_2x=-2x$，

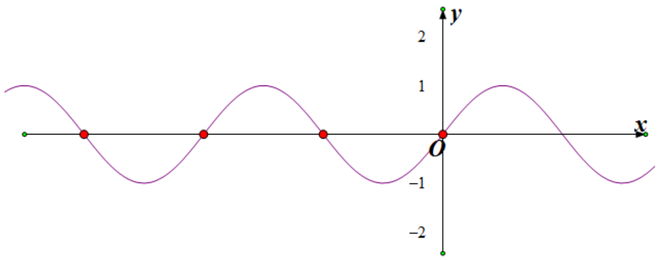
函数$y=\log_2x$与$y=-2x$的图象有一个交点，



故当$x>0$时，$f(x)$有1个零点，

所以当$-\pi\le x\le 0$时，$f(x)$有3个零点，

即$-\pi\le x\le 0$时，函数$y=sin(\omega x+\frac{\pi}{3})$有3个零点，



因为$-\pi\le x\le 0$，$\omega>0$，所以$-\omega\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant\omega x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{3}$.

故$\left\{\begin{array}{l}-\omega\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant-2\pi\\-\omega\pi+\frac{\pi}{3}>-3\pi\end{array}\right.$，解得$\frac{7}{3}\leqslant\omega<\frac{10}{3}$.

故答案选：B.

9.【答案】BCD

【解析】

【分析】

本题考查指数与对数的运算，属于基础题.

根据指数与对数的运算法则进行求解即可.

【解答】

$e^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{4}}e^{\frac{1}{8}}=e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}=e^{\frac{7}{8}}$，故$A$错误；

$\lg 2+\lg 5=lg10=1$，故B正确；

$8^{\frac{2}{3}}-9^{\frac{1}{2}}=4-3=1$，故 C 正确；

$\log_2 3\times\log_3 4\times\log_4 2=\frac{\lg 3}{\lg 2}\times\frac{\lg 4}{\lg 3}\times\frac{\lg 2}{\lg 4}=1$，故 D 正确.

故选：BCD.

10.【答案】BC

【解析】

【分析】

本题考查求三角函数的解析式，三角函数的图像与性质的应用，属于中档题.

根据$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$求得$\varphi$，结合三角函数的对称性、周期性、单调性求得正确答案.

【解答】

解：依题意$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=0$，

由于$0<\varphi<\pi$，所以$\frac{\pi}{3}+\varphi=\pi$，解得$\varphi=\frac{2\pi}{3}$，$A$选项错误.

则$f(x)=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$，

$f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\frac{3\pi}{2}=-1$，

所以直线$x=\frac{5\pi}{12}$是曲线$y=f(x)$的一条对称轴，B选项正确.

$f(x)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，所以$f(x+\pi)=f(x)$，C选项正确.

由$0<x<\frac{\pi}{2}$得$\frac{2\pi}{3}<2x+\frac{2\pi}{3}<\frac{5\pi}{3}$，所以$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$不是$f(x)$的递增区间，$D$选项错误.

故选：BC.

11.【答案】BCD

【解析】

【分析】

本题考查判断函数的奇偶性、单调性，指数函数、对数函数的单调性，属于中档题.

根据正切函数的图像与性质即可判断A；利用函数奇偶性的定义，指数函数的图像与性质，即可判断B；根据函数奇偶性的定义和单调性的定义，即可分析判断CD.

【解答】

解：对于A，易知函数$f(x)=\tan x$是奇函数，

因为$f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$，所以函数在定义域内不是增函数，所以 A 错误；

对于B，函数的定义域为R，因为$f(-x)=3^{-x}-3^{x}=-(3^{x}-3^{-x})=-f(x)$，

所以此函数为奇函数，

因为函数$y=3^{x}$和函数$y=-3^{-x}$在R上为增函数，

所以$f(x)=3^{x}-3^{-x}$在R上为增函数，所以 B 正确；

对于C，该函数的定义域为R，因为$f(-x)=\frac{3^{-x}-1}{3^{-x}+1}=-\frac{3^{x}-1}{3^{x}+1}=-f(x)$，

所以此函数是奇函数，

$f(x)=\frac{3^{x}-1}{3^{x}+1}=1-\frac{2}{3^{x}+1}$，任取$x_1,x_2\in\mathrm{R}$，且$x_1<x_2$，

则$f(x_2)-f(x_1)=\left(1-\frac{2}{3^{x_2}+1}\right)-\left(1-\frac{2}{3^{x_1}+1}\right)$

$$=\frac{2}{3^{x_1}+1}-\frac{2}{3^{x_2}+1}$$

$=\frac{2(3^{x_2}-3^{x_1})}{(3^{x_1}+1)(3^{x_2}+1)}$，

因为$x_1,x_2\in\mathrm{R}$，且$x_1<x_2$，所以$3^{x_2}-3^{x_1}>0$，$(3^{x_1}+1)(3^{x_2}+1)>0$，

所以$f(x_2)-f(x_1)>0$，即$f(x_2)>f(x_1)$，

所以该函数在R上为增函数，所以 C 正确；

对于D，该函数的定义域为R，因为$f(-x)=\lg\left(\sqrt{(-x)^2+1}-x\right)=\lg\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^{-1}=$

$-\lg\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=-f(x)$，

所以该函数为奇函数，

令$t=\sqrt{x^2+1}+x$，则$y=\lg t$，任取$x_1,x_2\in\mathrm{R}$，且$x_1<x_2$，

则$t_2-t_1=\left(\sqrt{x_2^2+1}+x_2\right)-\left(\sqrt{x_1^2+1}+x_1\right)$

$$=\left(\sqrt{x_2^2+1}-\sqrt{x_1^2+1}\right)+(x_2-x_1)$$

$$=\frac{x_2^2-x_1^2}{\sqrt{x_2^2+1}+\sqrt{x_1^2+1}}+(x_2-x_1)$$

$=(x_2-x_1)\frac{\sqrt{x_2^2+1}+\sqrt{x_1^2+1}+x_2+x_1}{\sqrt{x_2^2+1}+\sqrt{x_1^2+1}}$，

因为$x_1<x_2$，所以$x_2-x_1>0$，$\frac{\sqrt{x_2^2+1}+\sqrt{x_1^2+1}+x_2+x_1}{\sqrt{x_2^2+1}+\sqrt{x_1^2+1}}>0$，

所以$t_2 - t_1 > 0$，即$t_2 > t_1$，

所以函数$t = \sqrt{x^2 + 1} + x$在$_{\mathrm{R}}$上为增函数，

因为$y = {}_{\lg}t$在$(0, +\infty)$上为增函数，

所以$f(x) = \lg\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$在$_{\mathrm{R}}$上为增函数，所以$D$正确.

故选：BCD.

12.【答案】AC

【解析】

【分析】

本题考查函数的零点的个数，指数函数的图像，二次方程根的分布，属于较难题.

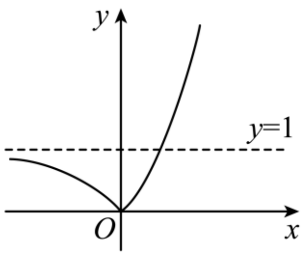
画出函数$f(x) = |3^x - 1|$的图像，令$f(x) = t(t \geq 0)$，

$g(x) = [f(x)]^2 - (m+2)f(x) + m(m \in \mathrm{R})$化为$h(t) = t^2 - (m+2)t + m$，易得$t^2 - (m+2)t + m = 0$有两个不同的实数根，设为$t_1, t_2$，可得$t_1 + t_2 = m + 2, t_1t_2 = m$，

由$(t_1 - 1)(t_2 - 1) = t_1t_2 - (t_1 + t_2) + 1 = -1 < 0$，得$t_1 < 1 < t_2$，结合函数$f(x)$的图像依次分析选项即可判断.

【解答】

解：函数$f(x) = |3^x - 1|$的图像如图所示：



令$f(x) = t(t \geq 0)$，

所以$g(x) = [f(x)]^2 - (m+2)f(x) + m(m \in \mathrm{R})$化为：

$h(t) = t^2 - (m+2)t + m$，

令$h(t) = 0$，则$t^2 - (m+2)t + m = 0$，由$\Delta = (m+2)^2 - 4m = m^2 + 4 > 0$，

所以$t^2 - (m+2)t + m = 0$有两个不同的实数根，设为：t_1, t_2，

所以$t_1 + t_2 = m + 2, t_1t_2 = m$，

由$(t_1 - 1)(t_2 - 1) = t_1t_2 - (t_1 + t_2) + 1 = -1 < 0$，

所以$t_1 < 1 < t_2$，

选项A：任意$m>0$， 则$0<t_1<1<t_2$，

则$t_1=f(x)$有两个解，即此时原函数有两个零点，

$t_2=f(x)$有一个解，即此时原函数有一个零点，

所以$g(x)$共3个不同的零点，故A选项正确；

当$m=0$时，$t_1t_2=0$，$t_1+t_2=2$，此时$t_1=0$，$t_2=2$，

故此时函数有2个零点，

当$m<0$时，$t_1t_2=m<0$，

有$t_1<0,t_2>1$，此时函数有1个零点，故B选项错误，C选项正确;

由以上的分析可知函数最多有3个零点，D选项错误．

故选：AC．

13.【答案】2^x

【解析】

【分析】

本题考查抽象函数的特征式，常见函数的解析式及其性质，属于基础题．

根据题意，利用指数函数的单调性以及指数幂的运算直接求解即可．

【解答】

满足“对定义域内任意实数a，b，都有$f(a+b)=f(a)f(b)$”的增函数

则可为$f(x)=2^x$．

因为$f(a+b)=2^{a+b}=2^a\cdot 2^b=f(a)f(b)$，

由指数函数的性质可知$f(x)=2^x$为增函数．

故答案为：2^x．

14.【答案】120

【解析】

【分析】

根据已知条件，结合指数函数的公式，即可求解．

本题主要考查函数的实际应用，掌握指数函数的公式是解本题的关键，属于基础题．

【解答】

解：$\because$现有$63°C$的物体，放在$15°C$的空气中冷却，60分钟以后物体的温度是$39°C$，

$\therefore 15+(63-15)e^{-60k}=39$，即$e^{-60k}=\frac{1}{2}$①，

要使物体的温度变为$21°C$，

则$15+48e^{-kt}=21$，即$e^{-kt}=\frac{1}{8}$②，

联立①②，解得$t=180$，

故还要经过$180-60=120$分钟．

故答案为：120．

15.【答案】$\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$；

$$-\frac{1}{2}$$

【解析】

【分析】

本题主要考查平面向量的线性运算，考查数形结合思想，属于中档题．

第一个空，根据向量加法的三角形法则可得；

第二个空，设$\overrightarrow{AE}=x\vec{a}$，则$\vec{b}-x\vec{a}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{ED}$，即可求出答案．

【解答】

解：因为M为BC的中点，

所以$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

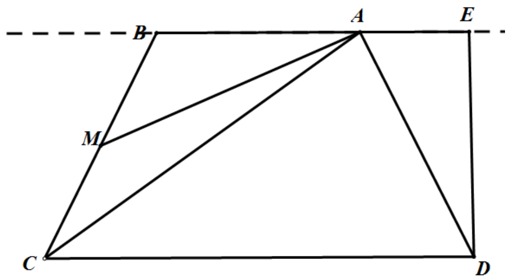
$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})$

$=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\times 2\vec{a}$

$=\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$，

如图，设$\overrightarrow{AE}=x\vec{a}$，

则$\vec{b}-x\vec{a}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{ED}$，



$\therefore$当$ED \perp AB$时，$|\vec{b}-x\vec{a}|$最小，

此时由几何知识易得$x=-\frac{1}{2}$，

故答案为：$\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$，$-\frac{1}{2}$.

16.【答案】$[8,+\infty)$

【解析】

【分析】

本题考查函数的零点与方程的根，指数函数的图像与性质，属于较难题.

转化为函数$y=x^2-a$与$y=-2^{|x|}$在$x\in(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$有两个交点，数形结合求解.

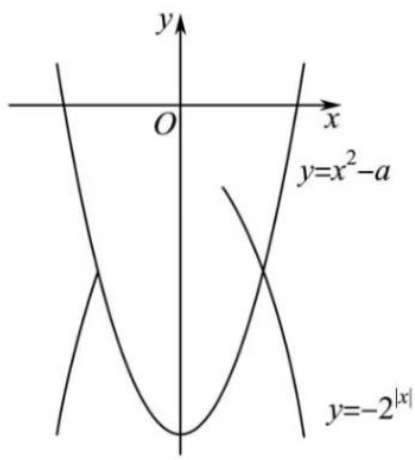
【解答】

解：令$f(x)=\frac{x^2-a}{2^{|x|}}+1=0$，得$x^2-a=-2^{|x|}$，

分别作出函数$y=x^2-a$与$y=-2^{|x|}$在$x\in(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$的函数图象，

当$y=x^2-a$经过$(-2,-4)$时，$a=8$，

由数形结合得，当$a\geqslant 8$时，在$x\in(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$时函数$y=x^2-a$与$y=-2^{|x|}$有两个交点，



所以实数a的取值范围是$[8,+\infty)$.

故答案为：$[8,+\infty)$.

17.【答案】解：(I)由题意$A=\{x|-4\leq x\leq 4\}$，

因为$B=\{x|-5\leq x\leq 15\}$，

所以$A\cap B=\{x|-4\leq x\leq 4\}$;

(Ⅱ)由题意可知$A\subseteq B$，

所以$[-4,4] \subseteq [5-m,5+m]$，则$\begin{cases} m > 0, \\ 5-m \leq -4, \\ 5+m \geq 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \geq 9, \\ m \geq -1, \\ m > 0. \end{cases}$

解得$m \geq 9$.

【解析】本题主要考查集合的交集运算以及集合间的关系，属于基础题.

(I)求出集合A，B，再进行交集运算即可；

(Ⅱ)由题意可知$A \subseteq B$，再列出不等式组，即可得到m的取值范围.

18.【答案】解：(1)$f(x) = \frac{-\sin x \cdot \sin x}{\sin x \cdot \cos x} = -\tan x$，

所以$f(\frac{7\pi}{4}) = -\tan\frac{7\pi}{4} = -\tan(-\frac{\pi}{4}) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$；

(2)$f(x) = -\tan x = -2$，所以$\tan x = 2$，

$\frac{\sin x(\sin x+\cos x)}{1+\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x+\sin x\cos x}{2\sin^2 x+\cos^2 x} = \frac{\tan^2 x+\tan x}{2\tan^2 x+1} = \frac{2}{3}$.

【解析】本题考查同角三角函数的基本关系，诱导公式的应用，属于中档题.

(1)利用诱导公式和同角三角函数基本关系化简$f(x)$，将$\frac{7\pi}{4}$代入计算；

(2)由条件得$\tan x$的值，将代数式化简成由$\tan x$表示，代入计算即可.

19.【答案】解：(1)由$2k\pi \leq 2x-\frac{\pi}{3} \leq 2k\pi+\pi$，$K \in Z$，解得$k\pi+\frac{\pi}{6} \leq x \leq k\pi+\frac{2\pi}{3}$，$K \in Z$，

所以$f(x)$的单调递减区间是$[k\pi+\frac{\pi}{6}, k\pi+\frac{2\pi}{3}](k \in \mathbb{Z})$；

由$2x-\frac{\pi}{3} = k\pi$，$K \in Z$，解得$x = \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$，$K \in Z$，

所以$f(x)$的对称轴为$x = \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}, k \in \mathrm{Z}$;

由$2x-\frac{\pi}{3} = k\pi+\frac{\pi}{2}$，$K \in Z$，解得$x = \frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12}$，$K \in Z$，

所以$f(x)$的对称中心是$(\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12}, -2)(k \in \mathbb{Z})$；

(2)依题意$f(x) = 3\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-2$，

由$-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$得$-\frac{2\pi}{3} \leq 2x-\frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{6}$,

所以$-\frac{1}{2}\leq\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\leq 1$，$-\frac{7}{2}\leq 3\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-2\leq 1$，

又函数$h(x)=\lambda f(x)+\mu$的最大值为6，最小值为-3，

若$\lambda=0$，$h(x)=\mu$是常数函数，不符合题意，

若$\lambda>0$，则$\begin{cases}-\frac{7}{2}\lambda+\mu=-3\\ \lambda+\mu=6\end{cases}$，解得$\lambda=2,\mu=4$，

若$\lambda<0$，则$\begin{cases}-\frac{7}{2}\lambda+\mu=6\\ \lambda+\mu=-3\end{cases}$，解得$\lambda=-2,\mu=-1$，

综上所述，$\lambda=2,\mu=4$或$\lambda=-2,\mu=-1$

【解析】本题考查余弦函数的图像与性质的应用，利用余弦函数的值域求参数，属于较难题.

(1)利用整体代入法求得$f(x)$的单调减区间，对称轴和对称中心；

(2)先求得$f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$上的值域，对$\lambda$进行分类讨论，由此列方程求得$\lambda,\mu$的值.

20.【答案】 (1)若选$y=mx^2+n$，将$x=2$，$y=6$和$x=4$，$y=36$代入得：$\begin{cases}4m+n=6\\ 16m+n=36\end{cases}\Rightarrow$ $\begin{cases}m=-\frac{5}{2},\\ n=-4\end{cases}$

则$y=\frac{5}{2}x^2-4$。代入$x=6$有$y=86\neq 216$，不合题意.

若选$y=k\cdot a^x(k>0,a>1)$，将$x=2,y=6$和$x=4,y=36$代入得：$\begin{cases}k\cdot a^2=6\\ k\cdot a^2=36\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=1\\ a=\sqrt{6}\end{cases}$，

则$y=(\sqrt{6})^x$。代入$x=6$有$y=216$，符合题意.

∴函数模型$y=(\sqrt{6})^x$更合适

(2)设至少需要x个单位时间该病毒的感染人数不少于1万人，则

$$(\sqrt{6})^x\geq 10000\Rightarrow x\lg\sqrt{6}\geq 4\Rightarrow x\cdot(\lg 2+\lg 3)\geq 8\Rightarrow x\geq\frac{8}{0.301+0.477}\approx 10.283$$

$\because x\in N^*$，

$\therefore x$的最小值为11，

故至少经过11个单位时间不少于1万人.

【解析】　本题主要考查函数的实际应用，考查对数函数的公式，属于中档题.

(1)将$x=2$，$y=6$和$x=4$，$y=36$分别代入两种模型求解解析式，再根据$x=6$的值，即可判断.

(2)设至少需要x个单位时间，则$(\sqrt{5})^x\geq 10000$，再结合对数运算，即可求解.

21.【答案】(1)$f(x)=x|x-m|+n$，定义域为R，

当$m=0$，$n=0$时，$f(x)=x|x|$，

因为对任意$x\in R$，都有$f(-x)=-x|-x|=-f(x)$，

综上所述，当$n=0$，$m=0$时，$f(x)$为奇函数；

(2)由题意$f(x)=x|x-1|+n$，$x\in[0,n]$，

若$n>1$，则$f(x)=\begin{cases}x(1-x)+n, x\in[0,1]\\ x(x-1)+n, x\in(1,n]\end{cases}$，

(i)当$x\in[0,1]$时，$f(x)=x(1-x)+n=-x^2+x+n=-(x-\frac{1}{2})^2+n+\frac{1}{4}$，

所以$n>1$，函数$y=f(x)$在$[0,\frac{1}{2}]$上单调递增，在$[\frac{1}{2},1]$上单调递减，

所以$f(x)_{\max}=f(\frac{1}{2})=n+\frac{1}{4}$；

(ii)当$x\in(1,n]$时，$f(x)\ =x(x-1)+n=x^2-x+n=(x-\frac{1}{2})^2+n-\frac{1}{4}$，

所以函数$y=f(x)$在$(1,n]$上单调递增，所以$f(x)_{\max}=f(n)=n^2$.

由$n^2\geq n+\frac{1}{4}$，得$n^2-n-\frac{1}{4}\geq 0$，又$n>1$，所以$n\geq\frac{1+\sqrt{2}}{2}$，

故当$n\geq\frac{1+\sqrt{2}}{2}$时，$f(x)_{\max}=n^2$；当$1<n<\frac{1+\sqrt{2}}{2}$时，$f(x)_{\max}=n+\frac{1}{4}$.

综上可知：

当$1<n<\frac{1+\sqrt{2}}{2}$时，$f(x)_{\max}=n+\frac{1}{4}$；

当$n\geq\frac{1+\sqrt{2}}{2}$时，$f(x)_{\max}=n^2$.

【解析】本题考查函数奇偶性的判断，考查二次函数在闭区间上的最值的求法，考查分类讨论思想，属于中档题.

(1)当$n=0$时，$f(x)=x|x-m|$，$m=0$时为奇函数.

(2)当$m=1$，$n>1$时，$f(x)=x|x-1|+n$，$x\in[0,n]$，当$n>1$时先讨论去掉绝对值，再利用二次函数单调性求最值，注意讨论不重不漏.

22.【答案】解：(1)因为$f(x)=a^x+b^x$为偶函数，

所以$f(-x)=f(x)\Leftrightarrow a^{-x}+b^{-x}=a^x+b^x$

所以$a=\frac{1}{b}$，又$a>0$且$a\neq 1, b>0$且$b\neq 1$，

所以$4a+b=\frac{4}{b}+b\geq 2\sqrt{\frac{4}{b}\times b}=4$，当且仅当$b=2$时取等号，

所以$4a+b$的最小值为4.

(2)当$m<\frac{1}{2}$时，总存在$x_1,x_2\in[-1,1]$，使得$g(x_1)g(x_2)<0$，

所以当$m<\frac{1}{2}$时，函数$g(x)$在$[-1,1]$内有零点，

由(1)知：$f(x)=a^x+b^x=a^x+a^{-x}$，$f(2x)=a^{2x}+a^{-2x}=(a^x+a^{-x})^2-2$，

令$t=a^x+a^{-x}-2\in[0,a+a^{-1}-2]$

所以$f(x)=t+2$，

从而$f(2x)=(t+2)^2-2=t^2+4t+2$，

由$g(x)=f(2x)-mf(x)+2m-4$，

所以$h(t)=(t^2+4t+2)-m(t+2)+2m-4$，

令$h(t)=0\Leftrightarrow(t^2+4t+2)-m(t+2)+2m-4=0$，

所以$t^2+4t-2=mt$，

当$t=0\Rightarrow -2=0$不成立，

当$t=f(x)-2\in(0,a+a^{-1}-2]$时，$m=t-\frac{2}{t}+4$，对$\forall m<\frac{1}{2}$恒成立，等价于$\left(t-\frac{2}{t}+4\right)_{\max}\geq\frac{1}{2}$，

即$2t^2+7t-4\geq 0$，

所以$t\geq\frac{1}{2}$或$t\leq -4$(舍去)，

因为$y=t-\frac{2}{t}+4$在$(0,a+a^{-1}-2]$单调递增，

所以$a+a^{-1}-2\geq\frac{1}{2}$，

即$2a^2-5a+2\geq 0$，解得$a\geq 2$或$a\leq\frac{1}{2}$，

又$a>0$且$a\neq 1$，

所以$a\geq 2$或$0<a\leq\frac{1}{2}$，

故a的取值范围为：$(0,\frac{1}{2}]\cup[2,+\infty)$.

【解析】本题考查利用函数的奇偶性解决参数问题，函数零点与方程的根，利用基本不等式求最值，利用函数的单调性求最值，属于困难题.

(1)利用函数为偶函数得$a=\frac{1}{b}$，代入$4a+b$中利用基本不等式求出最小值；

(2)当$m<\frac{1}{2}$时，总存在$x_1,x_2\in[-1,1]$，使得$g(x_1)g(x_2)<0$，得当$m<\frac{1}{2}$时，函数$g(x)$在$[-1,1]$内有零点，然后根据题意换元转化，等价出恒成立问题，再利用函数的单调性建立出不等式解出即可.