

江苏省仪征中学 2022—2023 学年度第二学期 高一数学练习 (1)

一、单选题

1. 函数 $f(x)=x+\ln x-1$ 的零点为()

- A.(1, 0) B. 1 C. e D. $\frac{1}{e}$

2. 下列结论中, 正确的是 ()

- A. 零向量只有大小没有方向 B. $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BA}|$
- C. 对任一向量 $\vec{a}$, $|\vec{a}|>0$ 总是成立的 D. $|\overrightarrow{AB}|$ 与线段 BA 的长度不相等

3. 用二分法求方程的近似解, 求得 $f(x)=x^3+2x-9$ 的部分函数值数据如下表所示:

x	1	2	1.5	1.625	1.75	1.875	1.812 5
$f(x)$	-6	3	-2.625	-1.459	-0.14	1.341 8	0.579 3

则当精确到 0.1 时, 方程 $x^3+2x-9=0$ 的近似解可取为()

- A.1.6 B.1.7 C.1.8 D.1.9

4. 在平行四边形 $ABCD$ 中, M 为 AB 上任一点, 则 $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{DB}=()$

- A. $\overrightarrow{BC}$ B. $\overrightarrow{DC}$ C. $\overrightarrow{AC}$ D. $\overrightarrow{BD}$

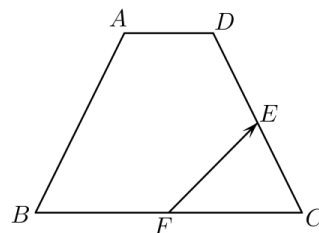
5. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 D 为 AB 上一点, 若 $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{DB}$, 则 $\overrightarrow{CD}=()$

- A. $\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$ B. $\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$ C. $3\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$ D. $\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{CB}$

6. 如图, 等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB=BC=CD=3AD$,

点 E 为线段 CD 中点, 点 F 为线段 BC 的中点, 则 $\overrightarrow{FE}=()$

- A. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ B. $-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$
- C. $\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ D. $-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$



7. 某企业生产 A, B 两种型号的产品, 每年的产量分别为 10 万支和 40 万支, 为了扩大再生产, 决定对两种产品的生产线进行升级改造, 预计改造后的 A, B 两种产品的年产量的增长率分别为 50% 和 20%, 那么至少经过多少年后, A 产品的年产量会超过 B 产品的年产量(取 $\lg 2 \approx 0.301 0$)()

- A.6 年 B.7 年 C.8 年 D.9 年

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+4, & x \leq 0, \\ \ln x, & x > 0, \end{cases}$ 若函数 $g(x)=f^2(x)+3f(x)+m(m \in \mathbf{R})$ 有三个零点,

则 m 的取值范围为()

- A. $m < \frac{9}{4}$ B. $m \leq -28$ C. $-28 \leq m < \frac{9}{4}$ D. $m > 28$

二、多选题

9. 若函数 $f(x)$ 的图象在 $\mathbf{R}$ 上连续不断, 且满足 $f(0)<0$, $f(1)>0$, $f(2)>0$, 则下列说法正确的是()

- A. $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上一定有零点 B. $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上一定没有零点
- C. $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 上可能有零点 D. $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 上一定有零点

10. 下列结论中正确的是 ()

A. 若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 则 $\vec{a} = \pm \vec{b}$

B. 若 $\vec{a} = \vec{b}, \vec{b} = \vec{c}$, 则 $\vec{a} = \vec{c}$

C. 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}, \vec{b} \parallel \vec{c}$, 则 $\vec{a} \parallel \vec{c}$

D. 若 A, B, C, D 是不共线的四点, 则“ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ”是“四边形 $ABCD$ 为平行四边形”的充要条件

11. 已知 $\triangle ABC$ 是正三角形, 则下列等式中成立的是 ()

A. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}|$

B. $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$

C. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}|$

D. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}|$

12. 点 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 且 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 下列说法正确的是 ()

A. 若 $x = y = \frac{1}{2}$, 则点 P 是边 BC 的中点

B. 若点 P 是边 BC 靠近 B 点的三等分点, 则 $x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$

C. 若点 P 在 BC 边的中线上且 $x + y = \frac{1}{2}$, 则点 P 是 $\triangle ABC$ 的重心

D. 若 $x + y = 2$, 则 $\triangle PBC$ 与 $\triangle ABC$ 的面积相等

三、填空题

13. 下列说法正确的是_____ (写序号).

①若 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 共线, 则点 A, B, C, D 共线; ②对于非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$, 若 $\vec{a} = \pm \vec{b}$, 则 $\vec{a} \parallel \vec{b}$;

③若 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| > |\vec{b}|$ 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向, 则 $\vec{a} > \vec{b}$ ④向量的模一定是正数

⑤ λ, μ 为实数, 若 $\lambda \vec{a} = \mu \vec{b}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线

14. 已知非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足: $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, 作 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$, 则 $\angle AOB =$ _____.

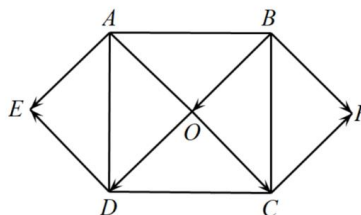
15. 若函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + a$ 在区间 $(1, e)$ 上存在零点, 则常数 a 的取值范围为_____.

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \leq m, \\ x^2 - 2mx + 4m, & x > m, \end{cases}$ 其中 $m > 0$. 若存在实数 b , 使得关于 x 的方程 $f(x) = b$ 有三个不同的根, 则实数 m 的取值范围是_____.

四、解答题

17. 如图, O 为正方形 $ABCD$ 的两条对角线的交点, 四边形 $OAED$ 和四边形 $OCFB$ 都是正方形, 在图中所示的向量中.

- (1) 分别写出与 $\overrightarrow{AO}$ 、 $\overrightarrow{BO}$ 相等的向量;
- (2) 写出与 $\overrightarrow{AO}$ 共线的向量;
- (3) 写出与 $\overrightarrow{AO}$ 的模相等的向量;
- (4) 写出与 $\overrightarrow{AO}$ 的夹角为 90° 的向量;
- (5) 向量 $\overrightarrow{AO}$ 与 $\overrightarrow{CO}$ 是否相等?

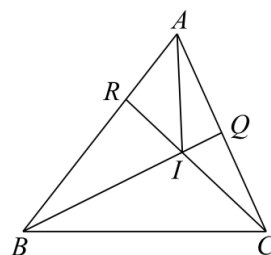


18. 设 $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ 是两个不共线的向量, 如果 $\overrightarrow{AB} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$, $\overrightarrow{BC} = 4\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\overrightarrow{CD} = 8\vec{e}_1 - 9\vec{e}_2$.

- (1) 求证: A, B, D 三点共线;
- (2) 试确定 λ 的值, 使 $2\lambda\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ 和 $\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2$ 共线;
- (3) 若 $\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2$ 与 $\lambda\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ 不共线, 试求 λ 的取值范围.

19. 如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{QC}$, $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, BQ 与 CR 相交于点 I .

- (1) 用 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 分别表示 $\overrightarrow{BQ}$ 和 $\overrightarrow{CR}$;
- (2) 若 $\overrightarrow{AI} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$, 求实数 m 和 n 的值.



20. 某市地铁项目正在如火如荼地进行中，全部通车后将给市民带来很大的便利. 已知地铁1号线通车后，列车的发车时间间隔 t (单位：分钟) 满足 $2 \leq t \leq 20$ ，经市场调研测算，地铁的载客量与发车的时间间隔 t 相关，当 $10 \leq t \leq 20$ 时，地铁为满载状态，载客量为 500 人；当 $2 \leq t < 10$ 时，载量会减少，减少的人数与 $(10-t)^2$ 成正比，且发车时间间隔为 2 分钟时的载客量为 372 人，记地铁的载客量为 $s(t)$.

(1) 求 $s(t)$ 的表达式，并求发车时间间隔为 5 分钟时列车的载客量；

(2) 若该线路每分钟的净收益为 $Q = \frac{8s(t) - 2656}{t} - 60$ (元). 问：当列车发车时间间隔为多少分钟时，该线路每分钟的净收益最大？

21. 已知函数 $f(x) = x^2 - 3mx + n$ ($m > 0$) 的两个零点分别为 1 和 2.

(1) 求 m, n 的值；

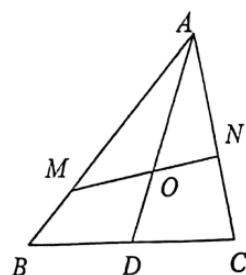
(2) 令 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ，若函数 $F(x) = g(2^x) - r \cdot 2^x$ 在 $x \in [-1, 1]$ 上有零点，求 r 的取值范围.

22. 如图所示， AD 是 $\triangle ABC$ 的一条中线，点 O 满足 $\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{OD}$ ，过点 O 的直线分别与射线 AB ，射线 AC 交于 M, N 两点.

(1) 求证： $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ ；

(2) 设 $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AN} = n\overrightarrow{AC}$ ， $m > 0, n > 0$ ，求 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 的值；

(3) 如果 $\triangle ABC$ 是边长为 a ($a > 0$) 的等边三角形，求 $OM^2 + ON^2$ 的取值范围.



江苏省仪征中学 2022—2023 学年度第二学期高一数学练习（1）答案

一、单选题

1. 函数 $f(x) = x + \ln x - 1$ 的零点为()

- A. (1, 0) B. 1 C. e D. $\frac{1}{e}$

答案 B

解析 根据零点的定义，代入即可得零点为 $x = 1$ ，故选 B.

2. 下列结论中，正确的是()

- A. 零向量只有大小没有方向 B. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$
C. 对任一向量 $\vec{a}$ ， $|\vec{a}| > 0$ 总是成立的 D. $|\overrightarrow{AB}|$ 与线段 BA 的长度不相等

答案 B

解析：既有大小又有方向的量叫向量，则零向量既有大小又有方向，故 A 错误；
由于 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 方向相反，长度相等，故 B 正确；

因为零向量的模为 0，故 C 错误； $|\overrightarrow{AB}|$ 与线段 BA 的长度相等，故 D 错误.

3. 用二分法求方程的近似解，求得 $f(x) = x^3 + 2x - 9$ 的部分函数值数据如下表所示：

x	1	2	1.5	1.625	1.75	1.875	1.812 5
$f(x)$	-6	3	-2.625	-1.459	-0.14	1.341 8	0.579 3

则当精确到 0.1 时，方程 $x^3 + 2x - 9 = 0$ 的近似解可取为()

- A. 1.6 B. 1.7 C. 1.8 D. 1.9

答案 C

解析 根据表中数据可知 $f(1.75) = -0.14 < 0$ ， $f(1.812 5) = 0.579 3 > 0$ ，由近似解精确到 0.1 可知 $1.75 \approx 1.8$ ， $1.812 5 \approx 1.8$ ，故方程的一个近似解为 1.8，选 C.

4. 在平行四边形 ABCD 中，M 为 AB 上任一点，则 $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{DB} =$ ()

- A. $\overrightarrow{BC}$ B. $\overrightarrow{DC}$ C. $\overrightarrow{AC}$ D. $\overrightarrow{BD}$

答案 B

解析：解： $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}$ ，

在平行四边形 ABCD 中， $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ，所以 $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC}$ ，

故选：B.

5. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 D 为 AB 上一点，若 $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{DB}$ ，则 $\overrightarrow{CD} =$ ()

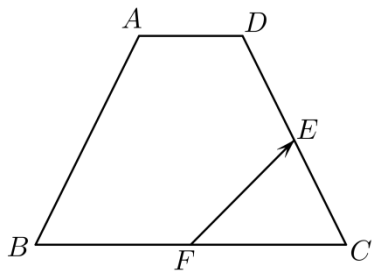
- A. $\frac{3}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$ B. $\frac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$ C. $3\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$ D. $\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{CB}$

答案 B

解析：因为 $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{DB}$ ，

所以 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{CA} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$.

6. 如图，等腰梯形 ABCD 中， $AB = BC = CD = 3AD$ ，点 E 为线段 CD 中点，点 F 为线段 BC 的中点，则 $\overrightarrow{FE} =$ ()



A. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

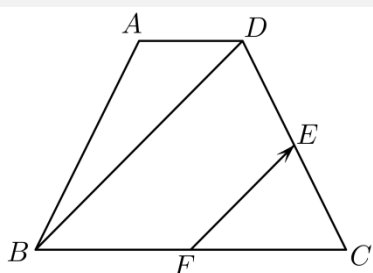
B. $-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

C. $\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

D. $-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

答案 B

解析: 连接 BD , $\because AB=BC=CD=3AD$, 点 E 为线段 CD 中点,



点 F 为线段 BC 的中点,

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{4}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC},$$

$$\text{又} \because \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{FE},$$

$$\therefore \overrightarrow{FE} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$$

故选: B.

7. 某企业生产 A, B 两种型号的产品, 每年的产量分别为 10 万支和 40 万支, 为了扩大再生产, 决定对两种产品的生产线进行升级改造, 预计改造后的 A, B 两种产品的年产量的增长率分别为 50% 和 20%, 那么至少经过多少年后, A 产品的年产量会超过 B 产品的年产量(取 $\lg 2 \approx 0.3010$) ()

A. 6 年

B. 7 年

C. 8 年

D. 9 年

答案 B

解析 依题意经过 x 年后, A 产品的年产量为 $10\left(1 + \frac{1}{2}\right)^x = 10\left(\frac{3}{2}\right)^x$, B 产品的年产量为 $40\left(1 + \frac{1}{5}\right)^x = 40\left(\frac{6}{5}\right)^x$. 若 A 产品的年产量会超过 B 产品的年产量,

则 $10\left(\frac{3}{2}\right)^x > 40\left(\frac{6}{5}\right)^x$ 化简得 $5^x > 4^{x+1}$, 即 $x\lg 5 > (x+1)\lg 4$, 所以 $x > \frac{2\lg 2}{1-3\lg 2}$, 又 $\lg 2 \approx 0.3010$, 则 $\frac{2\lg 2}{1-3\lg 2} \approx 6.2062$, 所以至少经过 7 年 A 产品的年产量会超过 B 产品的年产量. 故选 B.

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 4, & x \leq 0, \\ \ln x, & x > 0, \end{cases}$ 若函数 $g(x) = f^2(x) + 3f(x) + m (m \in \mathbf{R})$ 有三个零点, 则 m 的取值范围为 ()

A. $m < \frac{9}{4}$

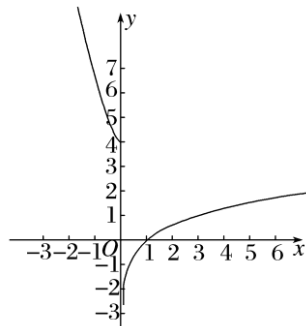
B. $m \leq -28$

C. $-28 \leq m < \frac{9}{4}$

D. $m > 28$

答案 B

解析 画出函数 $f(x)$ 的大致图象如图所示.



设 $t = f(x)$, 则由图象知,

当 $t \geq 4$ 时, $t = f(x)$ 有两个根,

当 $t < 4$ 时, $t = f(x)$ 只有一个根.

函数 $g(x) = f^2(x) + 3f(x) + m (m \in \mathbf{R})$ 有三个零点, 等价于函数 $g(x) = h(t) = t^2 + 3t + m$ 有两个零点, 其中 $t_1 < 4$, $t_2 \geq 4$,

则满足
$$\begin{cases} \Delta = 9 - 4m > 0, \\ h(4) = 16 + 12 + m \leq 0, \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} m < \frac{9}{4}, \\ m \leq -28, \end{cases} \quad \text{即 } m \leq -28.$$

二、多选题

9. 若函数 $f(x)$ 的图象在 $\mathbf{R}$ 上连续不断, 且满足 $f(0) < 0, f(1) > 0, f(2) > 0$, 则下列说法正确的是()

A. $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上一定有零点

B. $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上一定没有零点

C. $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 上可能有零点

D. $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 上一定有零点

答案 AC

解析 因为 $f(0) < 0, f(1) > 0, f(2) > 0$, 所以 $f(0)f(1) < 0$. 因为函数 $f(x)$ 的图象在 $\mathbf{R}$ 上连续不断, 由零点存在定理可得 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上一定有零点.

又 $f(1)f(2) > 0$, 因此无法判断 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 上是否有零点. 故选 AC.

10. 下列结论中正确的是 ()

A. 若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 则 $\vec{a} = \pm \vec{b}$

B. 若 $\vec{a} = \vec{b}, \vec{b} = \vec{c}$, 则 $\vec{a} = \vec{c}$

C. 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}, \vec{b} \parallel \vec{c}$, 则 $\vec{a} \parallel \vec{c}$

D. 若 A, B, C, D 是不共线的四点, 则“ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ”是“四边形 $ABCD$ 为平行四边形”的充要

条件

答案 BD

解析：对于 A，两个向量的长度相等.但它们的方向不一定相同或相反；

对于 B，由平面向量相等可得 B 正确；

对于 C，若 A, B, C, D 是不共线的四点，则当 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ 时， $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$ 且 $AB \parallel DC$ ，故四边形 ABCD 为平行四边形；

对于 C，若 $\vec{b} = \vec{0}$ ， $\vec{a} \parallel \vec{b}, \vec{b} \parallel \vec{c}$ ，而 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 不一定平行，故 C 错误；

当四边形 ABCD 为平行四边形时， $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$ 且 $AB \parallel DC$ ，故且 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ 同向，故 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ，故 D 正确.

故选：BD

11. 已知 $\triangle ABC$ 是正三角形，则下列等式中成立的是 ()

A. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}|$

B. $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$

C. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}|$

D. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}|$

答案 ACD

解析：对于 A，因为 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}|$ ， $|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{AC}|$ ，所以 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}|$ ，故正确；

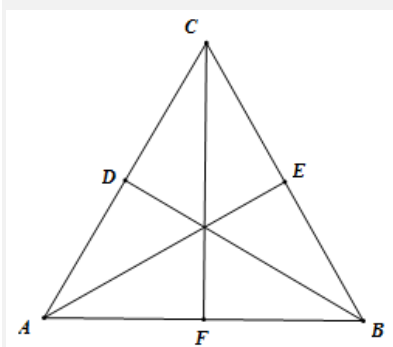
对于 B，因为 $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{AB}|$ ， $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{3}|\overrightarrow{AB}|$ (D 为 AC 中点)，故错误；

对于 C，因为 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{AE}| = \sqrt{3}|\overrightarrow{AB}|$ (E 为 BC 中点)，

$|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| = 2|\overrightarrow{CF}| = \sqrt{3}|\overrightarrow{AB}|$ (F 为 AB 中点)，所以 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}|$ ，故正确；

对于 D，因为 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}| = |\vec{0}| = 0$ ， $|\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}| = |\vec{0}| = 0$ ，

所以 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}|$ ，故正确.



故选：ACD

12. 点 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，且 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，下列说法正确的是（ ）

- A. 若 $x = y = \frac{1}{2}$ ，则点 P 是边 BC 的中点
- B. 若点 P 是边 BC 靠近 B 点的三等分点，则 $x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$
- C. 若点 P 在 BC 边的中线上且 $x + y = \frac{1}{2}$ ，则点 P 是 $\triangle ABC$ 的重心
- D. 若 $x + y = 2$ ，则 $\triangle PBC$ 与 $\triangle ABC$ 的面积相等

答案 AD

解析：A 若 $x = y = \frac{1}{2}$ ， $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP} \Leftrightarrow \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PC}$ ，即点 P 是边 BC 的中点，故正确；

B 当 $x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$ 时， $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} = 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) \Leftrightarrow \overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PC}$ ，点 P 是边 BC 靠近 C 点的三等分点，故错误；

C 点 P 在 BC 边的中线上且 $x + y = \frac{1}{2}$ ，点 P 为 BC 边的中线的中点，故不是重心；

D 设 $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AC}$ ，则 $\overrightarrow{AP} = \frac{x}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{y}{2}\overrightarrow{AN}$ ， $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$ ，故点 P 在直线 MN 上，点 P 与点 A 到 BC 边的距离相等，故 $\triangle PBC$ 与 $\triangle ABC$ 的面积相等。

故选：AD

三、填空题

13. 下列说法正确的是_____（写序号）.

①若 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 共线，则点 A 、 B 、 C 、 D 共线；

②对于非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$ ，若 $\vec{a} = \pm \vec{b}$ ，则 $\vec{a} // \vec{b}$ ；

③若 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| > |\vec{b}|$ 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向, 则 $\vec{a} > \vec{b}$

④向量的模一定是正数

⑤ λ, μ 为实数, 若 $\lambda\vec{a} = \mu\vec{b}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线

答案 ②

解①若 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 共线, 则点 A, B, C, D 共线, 不正确, 比如平行四边形的对边;

对于非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$, 若 $\vec{a} = \pm\vec{b}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 是相等向量或相反向量, 故 $\vec{a} // \vec{b}$, 故②正确;

向量之间不能比较大小, 只能比较向量的模, 故③错误;

因为 $|\vec{0}| = 0$, 故④错误; 当 $\lambda = \mu = 0$ 时, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 可以为任意向量, 故⑤错误

14. 已知非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足: $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, 作 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$, 则 $\angle AOB =$ _____.

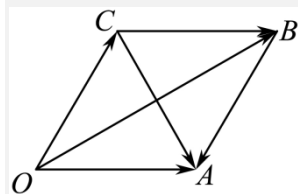
答案 30°

解析: 构造如图所示的平行四边形, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$,

则 $\overrightarrow{OC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{a} - \vec{b}$, 则 $\triangle AOC$ 为正三角形, 故 $\angle COA = 60^\circ$,

则平行四边形 $OACB$ 为菱形, 故 OB 平分 $\angle COA$, 则 $\angle AOB = 30^\circ$.

故答案为: 30°



15. 若函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + a$ 在区间 $(1, e)$ 上存在零点, 则常数 a 的取值范围为 _____.

答案 $(\frac{1}{e} - 1, 1)$

解析 函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + a$ 在区间 $(1, e)$ 上为增函数, 故若 $f(x)$ 在区间 $(1, e)$ 上存在零点,

则 $f(1) = \ln 1 - 1 + a < 0$, $f(e) = \ln e - \frac{1}{e} + a > 0$, 可得 $\frac{1}{e} - 1 < a < 1$.

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \leq m, \\ x^2 - 2mx + 4m, & x > m, \end{cases}$ 其中 $m > 0$. 若存在实数 b , 使得关于 x 的方程 $f(x) = b$ 有三个不同的根, 则实数 m 的取值范围是 _____.

解：如图，当 $x \leq m$ 时， $f(x) = |x|$.

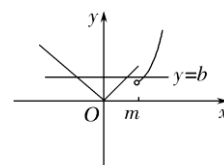
当 $x > m$ 时，

$f(x) = x^2 - 2mx + 4m$ 在 $(m, +\infty)$ 上为增函数.

若存在实数 b ，使方程 $f(x) = b$ 有三个不同的根，

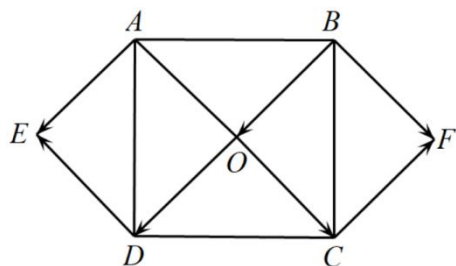
则 $m^2 - 2m \cdot m + 4m < |m|$.

$\because m > 0, \therefore m^2 - 3m > 0$ ，解得 $m > 3$.



四、解答题

17. 如图， O 为正方形 $ABCD$ 的两条对角线的交点，四边形 $OAED$ 和四边形 $OCFB$ 都是正方形，在图中所示的向量中.



(1) 分别写出与 $\overrightarrow{AO}$ 、 $\overrightarrow{BO}$ 相等的向量；

(2) 写出与 $\overrightarrow{AO}$ 共线的向量；

(3) 写出与 $\overrightarrow{AO}$ 的模相等的向量；

(4) 写出与 $\overrightarrow{AO}$ 的夹角为 90° 的向量；

(5) 向量 $\overrightarrow{AO}$ 与 $\overrightarrow{CO}$ 是否相等？

解析：（1）解：依题意，因为 O 是正方形 $ABCD$ 对角线的交点，四边形 $OAED$ ， $OCFB$ 都是正方形，

所以 $OA = AE = OD = DE = OC = CF = BF = BO$ ， $AB = CD = BC = AD$ ；

由题可得： $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AO}$ ， $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BO}$ ；

（2）解：与 $\overrightarrow{AO}$ 共线的向量有 $\overrightarrow{DE}$ ， $\overrightarrow{OC}$ ， $\overrightarrow{BF}$ 。

（3）解：与 $\overrightarrow{AO}$ 的模相等的向量有： $\overrightarrow{AE}$ ， $\overrightarrow{DE}$ ， $\overrightarrow{OD}$ ， $\overrightarrow{OC}$ ， $\overrightarrow{BO}$ ， $\overrightarrow{BF}$ ， $\overrightarrow{CF}$ 。

（4）解：与 $\overrightarrow{AO}$ 的夹角为 90° 的向量有 $\overrightarrow{OD}$ ， $\overrightarrow{BO}$ ， $\overrightarrow{CF}$ ， $\overrightarrow{AE}$ ；

（5）解：向量 $\overrightarrow{AO}$ 与 $\overrightarrow{CO}$ 不相等，因为它们的方向不相同。

18. 设 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 是两个不共线的向量, 如果 $\overrightarrow{AB} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$, $\overrightarrow{BC} = 4\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\overrightarrow{CD} = 8\vec{e}_1 - 9\vec{e}_2$.

(1) 求证: A, B, D 三点共线;

(2) 试确定 λ 的值, 使 $2\lambda\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ 和 $\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2$ 共线;

(3) 若 $\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2$ 与 $\lambda\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ 不共线, 试求 λ 的取值范围.

解析: (1) 证明: 因为 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = 4\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 8\vec{e}_1 - 9\vec{e}_2 = 12\vec{e}_1 - 8\vec{e}_2 = 4(3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2) = 4\overrightarrow{AB}$,

所以 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 共线. 因为 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 有公共点 B , 所以 A, B, D 三点共线.

(2) 因为 $2\lambda\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ 与 $\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2$ 共线, 所以存在实数 μ , 使 $2\lambda\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \mu(\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2)$.

因为 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 不共线, 所以 $\begin{cases} 2\lambda = \mu, \\ 1 = \lambda\mu, \end{cases}$ 所以 $\lambda = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

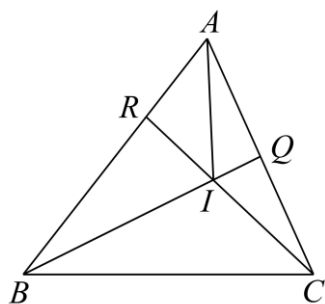
(3) 假设 $\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2$ 与 $\lambda\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ 共线, 则存在实数 m , 使 $\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2 = m(\lambda\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$.

因为 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 不共线, 所以 $\begin{cases} 1 = \lambda m, \\ \lambda = m, \end{cases}$ 所以 $\lambda = \pm 1$.

因为 $\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2$ 与 $\lambda\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ 不共线,

所以 $\lambda \neq \pm 1$.

19. 如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{QC}, \overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, BQ 与 CR 相交于点 I .



(1) 用 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 分别表示 $\overrightarrow{BQ}$ 和 $\overrightarrow{CR}$;

(2) 若 $\overrightarrow{AI} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$, 求实数 m 和 n 的值.

解析: (1) 由 $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, 可得 $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AQ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

$\because \overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \therefore \overrightarrow{CR} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AR} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

(2) 设 $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AC} + \mu \overrightarrow{CR}$, 将 $\overrightarrow{BQ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CR} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$

代入 $\overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AC} + \mu \overrightarrow{CR}$, 则有 $\overrightarrow{AB} + \lambda \left(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \right) = \overrightarrow{AC} + \mu \left(-\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \right)$,

$$\text{即 } (1-\lambda) \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \lambda \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3} \mu \overrightarrow{AB} + (1-\mu) \overrightarrow{AC}, \therefore \begin{cases} 1-\lambda = \frac{1}{3} \mu, \\ \frac{1}{2} \lambda = 1-\mu, \end{cases} \text{解得 } \begin{cases} \lambda = \frac{4}{5}, \\ \mu = \frac{3}{5} \end{cases}$$

故 $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{4}{5} \left(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \right) = \frac{1}{5} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{5} \overrightarrow{AC}$, 即 $m = \frac{1}{5}, n = \frac{2}{5}$.

20. 某市地铁项目正在如火如荼地进行中, 全部通车后将给市民带来很大的便利. 已知地铁 1 号线通车后, 列车的发车时间间隔 t (单位: 分钟) 满足 $2 \leq t \leq 20$, 经市场调研测算, 地铁的载客量与发车的时间间隔 t 相关, 当 $10 \leq t \leq 20$ 时, 地铁为满载状态, 载客量为 500 人; 当 $2 \leq t < 10$ 时, 载量会减少, 减少的人数与 $(10-t)^2$ 成正比, 且发车时间间隔为 2 分钟时的载客量为 372 人, 记地铁的载客量为 $s(t)$.

(1) 求 $s(t)$ 的表达式, 并求发车时间间隔为 5 分钟时列车的载客量;

(2) 若该线路每分钟的净收益为 $Q = \frac{8s(t) - 2656}{t} - 60$ (元). 问: 当列车发车时间间隔为多少分钟时, 该线路每分钟的净收益最大?

解 (1) 当 $10 \leq t \leq 20$ 时, $s(t) = 500$.

当 $2 \leq t < 10$ 时, $s(t) = 500 - k(10-t)^2$,

$\because s(2) = 372, \therefore 372 = 500 - k \times (10-2)^2$,

解得 $k = 2, \therefore s(t) = 500 - 2(10-t)^2$.

$$\therefore s(t) = \begin{cases} 500 - 2(10-t)^2, & 2 \leq t < 10, \\ 500, & 10 \leq t \leq 20, \end{cases}$$

$\therefore s(5) = 500 - 2 \times 5^2 = 450$ (人).

(2) 当 $10 \leq t \leq 20$ 时, $s(t) = 500$.

$$\therefore Q = \frac{8 \times 500 - 2656}{t} - 60 = \frac{1344}{t} - 60 \leq \frac{1344}{10} - 60 = 74.4. \quad \text{可得 } Q_{\max} = 74.4.$$

当 $2 \leq t < 10$ 时, $s(t) = 500 - 2(10-t)^2$.

$$\therefore Q = \frac{4000 - 16(10-t)^2 - 2656}{t} - 60 = -16 \left(t + \frac{16}{t} \right) + 260,$$

$\because$ 函数 $y = t + \frac{16}{t}$ 在 $t \in [2, 4]$ 上为减函数, 在 $t \in (4, 10)$ 上为增函数,

$\therefore$ 当 $t = 4$ 时, $Q_{\max} = 132$.

答: 当列车发车时间间隔为 4 分钟时, 该线路每分钟的净收益最大为 132 元.

21. 已知函数 $f(x) = x^2 - 3mx + n (m > 0)$ 的两个零点分别为 1 和 2.

(1) 求 m, n 的值;

(2) 令 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 若函数 $F(x) = g(2^x) - r \cdot 2^x$ 在 $x \in [-1, 1]$ 上有零点, 求实数 r 的取值范围.

解 (1) 由函数 $f(x) = x^2 - 3mx + n (m > 0)$ 的两个零点分别为 1 和 2,

可得 $\begin{cases} 1 - 3m + n = 0, \\ 4 - 6m + n = 0, \end{cases}$ 可得 $m = 1, n = 2$.

(2) 由题意得 $g(x) = \frac{f(x)}{x} = x + \frac{2}{x} - 3$, 函数 $F(x) = g(2^x) - r \cdot 2^x$ 在 $x \in [-1, 1]$ 上有零点, 即 $g(2^x)$

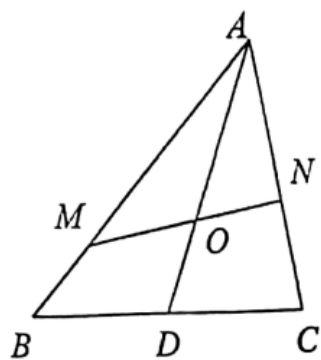
$- r \cdot 2^x = 0$ 在 $x \in [-1, 1]$ 上有解, 即 $r = 1 + 2 \left(\frac{1}{2^x} \right)^2 - 3 \frac{1}{2^x}$ 在 $x \in [-1, 1]$ 上有解, 设 $t = \frac{1}{2^x}$, 当 $x \in [-1, 1]$ 时, 可得 $t \in \left[\frac{1}{2}, 2 \right]$,

$r = 2t^2 - 3t + 1$, 即 $r = 2t^2 - 3t + 1$ 在 $t \in \left[\frac{1}{2}, 2 \right]$ 上有解,

可得 $r = 2t^2 - 3t + 1 = 2 \left(t - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} \leq t \leq 2 \right)$, 可得 $-\frac{1}{8} \leq r \leq 3$,

故 r 的取值范围为 $\left[-\frac{1}{8}, 3 \right]$.

14. 如图所示, AD 是 $\triangle ABC$ 的一条中线, 点 O 满足 $\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{OD}$, 过点 O 的直线分别与射线 AB , 射线 AC 交于 M, N 两点.



(1) 求证: $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$;

(2) 设 $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = n\overrightarrow{AC}$, $m > 0, n > 0$, 求 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 的值;

(3) 如果 $\triangle ABC$ 是边长为 $a (a > 0)$ 的等边三角形, 求 $OM^2 + ON^2$ 的取值范围.

证明: 因 $\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{OD}$, 所以 $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$, 又因 D 为 BC 的中点, 所以 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, 所

以 $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

(2) 因 $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = n\overrightarrow{AC}$, $m > 0$, $n > 0$, 所以 $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{m}\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{n}\overrightarrow{AN}$, 又因 $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, 所以 $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3m}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{3n}\overrightarrow{AN}$, 又因 M, O, N 三点共线, 所以 $\frac{1}{3m} + \frac{1}{3n} = 1$, 即 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 3$.

(3) 设 $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = n\overrightarrow{AC}$, $m > 0$, $n > 0$, 由(1)(2)可知 $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 3$, 即 $m + n = 3mn$.

因 $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AO} = \frac{3m-1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AO} = \frac{3n-1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$,

所以 $OM^2 + ON^2 = \left(\frac{3m-1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2 + \left(\frac{3n-1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)^2$
 $= \frac{1}{9} \left[(9m^2 - 6m + 2)\overrightarrow{AB}^2 + (9n^2 - 6n + 2)\overrightarrow{AC}^2 - 2(3m + 3n - 2)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \right],$

又因 $\triangle ABC$ 是边长为 a ($a > 0$) 的等边三角形,

所以 $OM^2 + ON^2 = a^2 \left(m^2 + n^2 - m - n + \frac{2}{3} \right),$

令 $t = mn$, 因 $3mn = m + n \geq 2\sqrt{mn}$, 即 $mn \geq \frac{4}{9}$, 当且仅当 $m = n$ 时, 等号成立, 所以 $t \geq \frac{4}{9}$.

因此 $m^2 + n^2 - m - n + \frac{2}{3} = (m + n)^2 - 5mn + \frac{2}{3} = 9(mn)^2 - 5mn + \frac{2}{3} = 9t^2 - 5t + \frac{2}{3},$

又因 $t \geq \frac{4}{9}$, 所以 $9t^2 - 5t + \frac{2}{3} \geq \frac{2}{9}$, 所以 $OM^2 + ON^2 = a^2 \left(m^2 + n^2 - m - n + \frac{2}{3} \right) \geq \frac{2a^2}{9}.$