

概念教学的一种尝试——数学实验

——“瞬时速度与导数”教学设计

孟庆杰

辽宁省抚顺市四方高级中学 113122

[摘要] 数学概念抽象,导数的概念更抽象,用数学实验教学法可以把抽象变为具体和直观.通过走路实验、计算实验、动点实验、推理实验和分组实验,使导数的概念不再抽象和神秘,从而证实了导数是客观存在的,导数就在我们身边.

[关键词] 走出导数;算出导数;动出导数;推出导数;验出导数

教材分析

本节课是人教B版2003课标版选修2-2第一章“1.1.2瞬时速度与导数”第1课时的内容.这节课是在上节课研究了函数的平均变化率的基础上,从物理学的平均速度入手,演变为瞬时速度即瞬时变化率,从而抽象概括出导数的概念.导数的概念是微积分的核心概念之一,是即将学习的导数的几何意义、导数的运算、导数的应用等知识的基础.导数是研究函数单调性、极值、最值和解决生活中优化问题的有力工具.

学情分析

本节课的教学内容,是在学生已经学习了平均变化率及物理学的平均速度、瞬时速度、匀加速运动等相关知识的基础上展开的.同时,学生已经具备了一定探究经验和解决问题的方法,可以借助已知知识,在教师的引领下,实验、探究平均速度(或平均变化率)与瞬时

速度(或瞬时变化率)的关系,从而认识到瞬时变化率就是导数.

教学目标

(1)知识与技能:了解导数概念的实际背景,弄清平均变化率与瞬时变化率的关系,认清瞬时变化率就是导数;理解导数的概念,能利用导数定义求某点处的导数.

(2)过程与方法:利用学生已经掌握的平均速度或平均变化率的概念,由实验得出某一时刻的速度即瞬时速度就是导数,从而提出问题,引入新课.通过学生亲身经历的由平均速度演变为瞬时速度的数学实验,使学生认识到了瞬时变化率就是导数,感受到了无限逼近思想,从而加深了对导数概念的理解.

(3)情感、态度与价值观:通过学生主动参与实验,动手操作、感知,师生、生生合作交流,提高了学生的学习兴趣,激发了学生的求知欲,从而培养了学生的探索精神和探究能力.

教学重点与难点

(1)教学重点:瞬时变化率、导数的概念.

(2)教学难点:对导数的理解及利用导数定义求某点处的导数.

教学方法与教学手段

(1)教学方法:以教师为主导,以学生为主体,以核心素养为目标,从学生的认知规律出发,进行启发、诱导.让学生参与实验、体验过程和动手操作.充分调动学生的积极性,最大限度地发挥学生的主体作用.

(2)教学手段:采用计算机辅助教学,制作多媒体课件,提高课堂效率;让学生用手机参与计算,使学生体验到平均速度如何演变为瞬时速度;让学生动手操作几何画板的动态演示,使学生感受到无限逼近思想与趋近于常数的过程,从而加深对导数概念的理解.

作者简介:孟庆杰(1966—),本科学历,中学高级教师,从事数学教育研究.

教学过程

课前准备:把全班45人随机分为9组,每组5人;每个学生必须带手机,并且到学校微机教室上课。

1. 走路实验,走出导数

教师:日常生活中,我们走路是匀速还是变速?

学生1:一般情况下是变速,匀速的情况很少。

教师:各组能否选出一名同学,在教室前面演示一下日常生活中的走路?(各组学生非常积极,很快都选出了一名同学参加演示)

教师:9名同学演示得很好,大家能看出来他们的走路都是变速的。这说明9名同学走路的速度是随时变化的,那么这种变化是突然变化的?还是渐渐变化的?

学生2:渐渐变化的。

教师:他们走路时,经过了A位置和B位置。若此时路程与时间的关系为 $s=f(t)$,则从A到B这段时间内的平均速度是多少?

$$\text{学生3: } \frac{f(t_A)-f(t_B)}{t_A-t_B} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

教师:当A与B之间的距离越来越小,或者说A与B之间的距离要多近有多近时,上面的 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 与 t_A (或 t_B)时刻的速度有什么关系?

学生4: $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 近似为 t_A (或 t_B)时刻的速度。

教师:非常好, t_A 时刻的速度,我们称为 t_A 时刻的瞬时速度,也就是我们今天学习的导数。整理一下就是:当B位置无限靠近A位置即 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,从 t_A 到 t_B 这段时间内的平均速度就演变为 t_A 时刻的瞬时速度,这个瞬时速度就是 t_A 处的导数。这个导数是我们走路走出来的,这说明日常生活中就有导数,导数时刻在我们身边。

设计意图:激活课堂,引出导数的实际背景及“导数”一词。学生从日常生活的走路中,走出导数,不仅使导数的出现显得自然、具体,而且更能说明导

数来源于生活实际,让学生感知越来越近、无限靠近及 $\Delta t \rightarrow 0$ 等无限逼近思想。

2. 统一实验

教师:我们再以具体的10米跳台跳水运动为例,探讨平均速度与瞬时速度的关系。设在10米跳台上,运动员跳离跳台时竖直向上的速度为6.5 m/s。当重力加速度 $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$ 时,运动员在时刻 t 距离水面的高度 $h(t)=$ _____。

学生5: $h(t)=10+6.5t-4.9t^2$ 。

(1)计算实验,算出导数

教师:用手机计算运动员在2 s至2.1 s(记为 $[2, 2.1]$)这段时间内的平均速度 $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ 。

学生6: $\frac{\Delta h}{\Delta t} = -13.59 \text{ (m/s)}$ (很快算完)。

教师:设运动员在 $t=2$ s附近的改变量为 Δt ,计算在 $[2, 2+\Delta t]$ (或 $[2+\Delta t, 2]$)这段时间内的平均速度,并填写在平均速度表上(如表1,教师将准备好的9张表1发

表1

	时间区间/s	时间间隔/s	平均速度/ ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)
例	$[2, 2.1]$	0.1	-13.59
1			
2			
⋮			
8			

给各组),其中 Δt 必须取具体数值(如 $\Delta t=0.1$)且 $|\Delta t|$ 越小越好。各小组分好工,比一比看哪一组 $|\Delta t|$ 找得小、时间段找得多、平均速度计算得准确和填表规范(给班会展示)。同时在计算、填表等实验过程中,认真观察这些平均速度有什么特点,能否发现什么现象或规律。下面给5分钟时间,看一看哪一组完成的好(学生计算过程中,若没有特殊情况,则教师不到学生中去,把课堂全部交给学生)。这里展示3个较好的、有代表性的平均速度表:

表2

	时间区间/s	时间间隔/s	平均速度/($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)
例	$[2, 2.1]$	0.1	-13.59
1	$[2, 2.00000001]$	0.00000001	-13.100000049
2	$[2, 2.000000001]$	0.000000001	-13.1000000049
3	$[2, 2.0000000001]$	0.0000000001	-13.10000000049
4	$[2, 2.00000000001]$	0.00000000001	-13.100000000049
5	$[2, 2.000000000001]$	0.000000000001	-13.1000000000049
6	$[2, 2.0000000000001]$	0.0000000000001	-13.10000000000049
7	$[2, 2.00000000000001]$	0.00000000000001	-13.10000000000005
8	$[2, 2.000000000000001]$	0.000000000000001	-13.1

表3

	时间区间/s	时间间隔/s	平均速度/($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)
例	$[2, 2.1]$	0.1	-13.59
1	$[1.99999999, 2]$	0.00000001	-13.099999951
2	$[1.999999999, 2]$	0.000000001	-13.0999999951
3	$[1.9999999999, 2]$	0.0000000001	-13.09999999951
4	$[1.99999999999, 2]$	0.00000000001	-13.099999999951
5	$[1.999999999999, 2]$	0.000000000001	-13.0999999999951
6	$[1.9999999999999, 2]$	0.0000000000001	-13.09999999999951
7	$[1.99999999999999, 2]$	0.00000000000001	-13.09999999999995
8	$[1.999999999999999, 2]$	0.000000000000001	-13.1

表4

	时间区间/s	时间间隔/s	平均速度/(m·s ⁻¹)
例	[2, 2.1]	0.1	-13.59
1	[1.999999999999, 2]	0.000000000001	-13.0999999999951
2	[1.999999999999, 2]	0.0000000000001	-13.0999999999951
3	[1.999999999999, 2]	0.00000000000001	-13.0999999999995
4	[1.999999999999, 2]	0.000000000000001	-13.1
5	[2, 2.000000000001]	0.000000000001	-13.1000000000049
6	[2, 2.000000000001]	0.0000000000001	-13.1000000000049
7	[2, 2.000000000001]	0.00000000000001	-13.1000000000005
8	[2, 2.000000000001]	0.000000000000001	-13.1

学生A组(如表2),学生B组(如表3),学生C组(如表4).

教师:各组实验和填表都很好,能在这么短的时间内完成了这样的实验,老师都没想到,这说明你们做事认真、实验能力很强(听到老师的夸奖,学生的热情更高).现在回想一下你们的实验过程,研究一下你们填好的平均速度表,能发现什么现象?

学生(全班): $|\Delta t|$ 越小,平均速度越趋近于-13.1(全班异口同声).

教师:每个人是否都参与了实验?观察到的现象是否是一致的?有没有不同的观点?(反复问了几遍)

学生(全班):是!是!没有!(又是异口同声)

教师:这是我们通过计算实验得出的结论,这个-13.1就是2 s时刻的瞬时速度,也是2 s处的导数.整理一下就是:当2 s附近的改变量 $|\Delta t|$ 越来越小即 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,从2 s到 $(2+\Delta t)$ s这段时间内的平均速度趋近于一个常数-13.1,这个常数就是运动员在2 s时刻的瞬时速度,也称为2 s处的导数.这个导数是我们计算出来的,这说明导数并非那么神秘,通过计算能把它算出来.

设计意图:给学生机会自主实验,分工合作.有竞争就有动力,“比一比”是调动学生积极性的最好方法.学生对于手机很感兴趣,用手机亲自计算出来的常数(导数),学生感到真实、可信,这有助于对“无限逼近于导数”的理解,直观感知时间间隔越来越小、 $\Delta t \rightarrow 0$ 、趋近于

常数等无限逼近思想.

(2)动点实验,动出导数

教师:请同学们打开电脑桌面上的“动态逼近与常数”的几何画板(5.06).如图1,点A是运动员2 s时刻的位置,点B是点A附近的动点.拖动B点从A点左、右反复无限靠近A点.每名学生亲自动手操作,能否完成如下实验:①自由拖动B点无限靠近A点,感知无限逼近(即 $\Delta t \rightarrow 0$)与常数(即 $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ 趋近于常数);②在拖动B点的过程中,找到手机计算的平均速度表中的B点的位置;③比一比看谁拖动B点,使 $|\Delta t|$ 最小,当 $|\Delta t|$ 最小时, $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ 为多少?

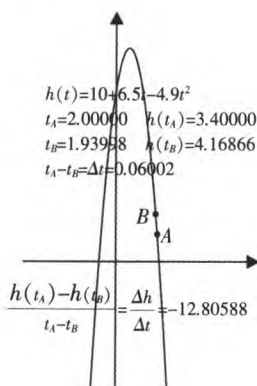


图1

5分钟后,学生开始争先恐后回答.

学生7:真实地出现在眼前的是,B点连续无限靠近A点即 $|\Delta t|$ 越来越小, $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ 不停地变化,但 $\frac{\Delta h}{\Delta t} \approx -13.1$ 是不变的(常数).

学生8:手机计算的平均速度,这里

很难找到B点的位置,因为 Δt 与 $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ 最多能看到小数点后面5位数(几何画板数值精确度最高是十万分之一).

多个学生:动到 $\Delta t = -0.00001$ 时,出现 $\frac{\Delta h}{\Delta t} = -13.10003$, $\frac{\Delta h}{\Delta t} = -13.10004$, $\frac{\Delta h}{\Delta t} = -13.10005$, $\frac{\Delta h}{\Delta t} = -13.10006$, $\frac{\Delta h}{\Delta t} = -13.10007$,等等;动到 $\Delta t = 0.00001$ 时,出现 $\frac{\Delta h}{\Delta t} = -13.09995$, $\frac{\Delta h}{\Delta t} = -13.09996$, $\frac{\Delta h}{\Delta t} = -13.09997$, $\frac{\Delta h}{\Delta t} = -13.09998$, $\frac{\Delta h}{\Delta t} = -13.09999$,等等;动到 $\Delta t = 0.00000$ 时,出现 $\frac{\Delta h}{\Delta t} = -13.10000$, $\frac{\Delta h}{\Delta t} = -13.10001$, $\frac{\Delta h}{\Delta t} = -13.10002$,等等.

教师:你们操作的很好,特别能动的到 $\Delta t = 0.00000$,出现了 $\frac{\Delta h}{\Delta t} = -13.10000$,说明你们具有探索精神和动手、观察能力.整理一下就是:当我们拖动B点无限靠近A点即 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,平均速度 $\frac{\Delta h}{\Delta t} \rightarrow -13.1$.这个常数是运动员2 s时刻的瞬时速度,也称点A处的导数.这个导数是我们“动”出来的,即动到了“无限逼近”,动出了常数(导数),这说明导数是客观存在的,它随时可以出现在我们眼前.

设计意图:几何画板中,拖动B点无限靠近A点,出现在眼前的: $\Delta t \rightarrow 0$, $\frac{\Delta h}{\Delta t} \rightarrow -13.1$,更直观、更真实;它与计算导数相比,更具有连续性和无限性;更能让学生生动地感知“无限逼近与常数”,学生能真正体验到“动中有静”.这样的实验,有利于学生了解导数的实际背景和理解导数的概念,同时激发了学生的学习兴趣,培养了学生动手、观察等能力和探索精神.

(3)推理实验,推出导数

教师:我们由物理学可知,若设物体运动的路程与时间的关系是 $s=f(t)$,则从 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这段时间内的平均速度为 $\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$,那么这个平均速度

与我们上节学的平均变化率有何关系?

学生9:这个平均速度就是函数 $f(t)$ 在区间 $[t_0, t_0+\Delta t]$ 的平均变化率.

①推导2 s处的导数.

教师:我们能否由上节知识,推导出2 s处的导数,即直接由 $\frac{h(2+\Delta t)-h(2)}{\Delta t}$,看出 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\frac{\Delta h}{\Delta t} \rightarrow -13.1$?

通过刚才的实验,学生热情很高,兴趣正浓,这时老师提出什么问题,都能积极接受,并很快完成.

学生10: $\frac{h(2+\Delta t)-h(2)}{\Delta t} = -13.1 - 4.9\Delta t$,当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\frac{h(2+\Delta t)-h(2)}{\Delta t} \rightarrow -13.1$ ($\Delta t \rightarrow 0$ 时, Δt 乘上任何常数仍然趋近于0).

教师:非常好,我们通过严格的计算推理,发现了当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\frac{\Delta h}{\Delta t} \rightarrow -13.1$,这与前面实验得出的结论完全一致.而这个导数-13.1确实是我们推导出来的,这说明导数的出现符合自然规律,它可以从理性思维推导出来.

设计意图:数学是培养理性思维的重要载体,学习数学离不开运算推理和演绎证明.数学实验的结果,用数学的运算推理推出来,体现了理论与实践的统一,这更有说服力,更让人信服.同时,培养学生崇尚数学的理性精神和审慎的思维习惯.

②推导 t_0 处的导数.

教师:一般地,对任意时刻 t_0 是否可以推导出 t_0 处的导数,即直接由 $\frac{h(t_0+\Delta t)-h(t_0)}{\Delta t}$,看出 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\frac{\Delta h}{\Delta t} \rightarrow$ 常数?(学生的积极性,又一次被调动了起来,很快就推导出 t_0 处的导数)

学生11: $\frac{h(t_0+\Delta t)-h(t_0)}{\Delta t} = -9.8t_0 + 6.5 - 4.9\Delta t$,当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\frac{h(t_0+\Delta t)-h(t_0)}{\Delta t} \rightarrow -9.8t_0 + 6.5$,所以 t_0 处的导数为 $-9.8t_0 + 6.5$.

教师:-9.8 t_0 +6.5是常数吗?这个结论与我们前面实验的结论一致吗?

学生12:因为 t_0 为常数,所以 $-9.8t_0 + 6.5$ 是常数.当 $t_0=2$ 时,这个常数为-13.1,

与实验结果一致.

教师:很好,我们通过计算推理,得到了运动员任一时刻 t_0 的瞬时速度为 $-9.8t_0 + 6.5$,也就是运动员在任意时刻 t_0 处的导数.这说明导数是普遍存在的,可以在运动员的任意运动时刻找到它.

设计意图:进一步理性思维推理,体现由特殊到一般、由具体到抽象的数学思想方法,为导数概念的形成做好了准备.

3. 分组实验

教师在课前做好了9个几何画板课件,即把上面实验中的A点,改为如下定点C(1,11.6),D(1.2,10.744),E(1.4,9.496),F(1.6,7.856),G(1.7,6.889),H(1.8,5.824),I(1.9,4.661),J(2.09,2.1813),K(2.18,0.883),B点还是这些点附近的动点.让各组采用抓阄的方式,选择一个课件,进行分组实验(公平竞争,调动学生的积极性).

教师:各组按照你们选择的课件,每个人完成如下实验:(1)计算所给定点附近的一个平均速度($|\Delta t|$ 越小越好);(2)拖动B点无限靠近所给定点,找到最小的 $|\Delta t|$ 及对应的 $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ 趋近的常数;(3)

将所给定点的 t_0 (横坐标)代入上面实验中推导的 t_0 时刻的瞬时速度“ $-9.8t_0 + 6.5$ ”中,看一看你计算的数值与拖动B点无限靠近时, $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ 趋近的常数是否一致?最后看一看哪一组完成得好、快, $|\Delta t|$ 找得小,B点靠得更近(有了上面的统一实验的经历,分组实验进行得很顺利).

学生13(D组):(1)区间 $[1.2, 1.200000001]$, $\Delta t = 0.000000001$, $\frac{\Delta h}{\Delta t} = -5.2600000049$;(2)当B点无限靠近D点即 $\Delta t = 0.00002$ (或 -0.00001)时, $\frac{\Delta h}{\Delta t} = -5.25989$ (或 -5.26004);(3)将 $t_0 = 1.2$ 代入 $-9.8t_0 + 6.5$,得-5.26.

学生14(F组):(1)区间 $[1.6, 1.600000001]$, $\Delta t = 0.000000001$, $\frac{\Delta h}{\Delta t} = -9.1800000049$;(2)当B点无限靠近F点即 $\Delta t = 0.00000$ (或 -0.00001)时, $\frac{\Delta h}{\Delta t} =$

-9.17998 (或 -9.18007);(3)将 $t_0 = 1.6$ 代入 $-9.8t_0 + 6.5$,得-9.18.

学生15(J组):(1)区间 $[2.09, 2.090000001]$, $\Delta t = 0.000000001$, $\frac{\Delta h}{\Delta t} = -13.9820000049$;(2)当B点无限靠近J点即 $\Delta t = 0.00000$ (或 -0.00002)时, $\frac{\Delta h}{\Delta t} = -13.98199$ (或 -13.98212);(3)将 $t_0 = 2.09$ 代入 $-9.8t_0 + 6.5$,得-13.982.

其他组略.

教师:你们的实验做得非常成功,虽说各组从不同位置进行实验,但实验得到的结果是一致的,即 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\frac{\Delta h}{\Delta t} \rightarrow$ 常数.该常数就是各组所选位置的瞬时速度即该位置处的导数,各组的实验再次验证了在运动员的每一时刻都能找到导数.

设计意图:给学生更多的时间和空间感知无限逼近与常数(导数),实验的位置改变了,但实验的结果是一致的,这能加深对无限逼近、常数和导数的理解,增加了导数出现的可信度.

4. 导数的概念

教师:(1)按照牛顿的研究方向,从物理学的平均速度入手.平均速度 $\xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0}$ 瞬时速度 $\Leftrightarrow$ 导数.其中,平均速度:设路程 s 与时间 t 的关系为 $s=f(t)$,则从 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这段时间内的平均速度为 $\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t} =$

$\frac{\Delta s}{\Delta t}$;瞬时速度:设路程 s 与时间 t 的关系

为 $s=f(t)$,则当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t} \rightarrow l$ (常数),常数 l 称为 t_0 时刻的瞬时速度;导数: t_0 时刻的瞬时速度,通常称为 $f(t)$ 在点 t_0 处的导数,即 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t} = f'(t_0)$.

(2)按照莱布尼茨的研究方向,从数学的平均变化率入手.平均变化率 $\xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0}$ 瞬时变化率 $\Leftrightarrow$ 导数.其中,平均变化率:设函数 $y=f(x)$,则函数 $f(x)$ 在区间 $[x_0, x_0+\Delta x]$ 的平均变化率为 $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} =$

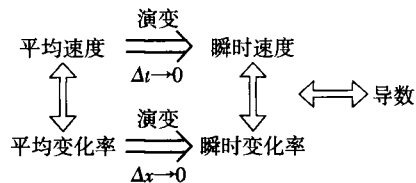
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$;瞬时变化率:设函数 $y=f(x)$,则当

$\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \rightarrow l$ (常数), 常

数 l 称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的瞬时变化率; 导数: 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的瞬时变化率, 通常称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数, 即

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

(3) 物理与数学的统一:



设计意图: 此时给出导数的概念恰到好处, 学生亲身经历了导数产生的实验, 很容易理解导数的概念. 按照教材意图, 理清两条线给出导数, 再将两条线合二为一, 这不仅让学生理解好导数的概念, 而且也符合导数概念的发生、发展过程.

5. 实践运用, 巩固深化

教师: 根据导数定义, 如何求某点处的导数?

学生16: 先求某点附近的平均变化率, 再找当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 平均变化率趋近于的那个常数, 这个常数就是该点处的导数.

教师: 说得非常好, 下面利用导数定义解决下列问题.

例1: 已知质点按照规律 $s(t) = 2t^2 + 4t$ (距离单位: m, 时间单位: s) 运动, 求质点在 3 s 时的瞬时速度.

例2: 求下列函数在指定点的导数:

- (1) 求函数 $y = ax + b$ 在 $x = 1$ 处的导数;
- (2) 求函数 $y = 3x^2 - 2x$ 在 $x = 0$ 处的导数;
- (3) 求函数 $y = ax^2 + bx + c$ 在 $x = x_0$ 处的导数.

例3: 已知函数 $y = -2x^2$, 求 $f'(2)$.

例4: (1) 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 则

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad ()$$

- 与 x_0 和 h 都有关
- 仅与 x_0 有关而与 h 无关
- 仅与 h 有关而与 x_0 无关
- 与 x_0 和 h 均无关

(2) 已知函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[f(x)]^2 - [f(x_0)]^2}{x - x_0} = ()$$

- $f'(x_0)$
- $f(x_0)$
- $f'(x_0)f(x_0)$
- $2f'(x_0)f(x_0)$

解答过程略.

设计意图: 检验和巩固实验成果, 加深理解导数定义及应用. 例1从导数实际背景入手, 加深理解某时刻的瞬时速度就是该位置处的导数; 例2从不同函数和点入手, 运用导数定义求某点处的导数; 例3从具体函数入手, 考查某点处导数的符号; 例4从极限符号入手, 了解极限的意义, 会用极限等符号表述导数.

6. 交流体会, 反思提升

教师: 通过本节课的数学实验, 你有哪些收获?

学生17: 了解了导数概念的实际背景; 经历了由平均速度(或平均变化率)演变为瞬时速度(或瞬时变化率), 从而找到导数的实验过程; 弄清了某一点的瞬时速度就是该点的瞬时变化率, 也就是该点处的导数; 通过亲身实验知道导数是普遍存在的, 它就在我们身边.

学生18: 学习和理解了导数定义, 学会了用导数定义求某点处的导数; 通过实验感知了无限逼近思想(极限思想).

设计意图: 通过交流和反思, 引导学生从导数概念的发生、发展过程进行小结, 把亲身经历的数学实验得到的成果总结出来, 这既培养了学生自主反思的习惯, 又能让学生学会交流、学会评价, 从而在知识、能力和情感三方面得到提高.

7. 教学反思

(1) 按照教材意图教学

①通过具体实例(如跳台跳水运动)分析瞬时速度(或瞬时变化率)与平均速度(或平均变化率)的关系; ②从导数的实际背景出发引出导数概念; 按照牛顿的研究方向, 从物理学的平均速度入手, 即平均速度演变为瞬时速度即为导数; 按照莱布尼茨的研究方向, 从数学的平均变化率(上一节内容)入手, 即平均变化率演变为瞬时变化率即为导数; ③体现无限逼近思想即极限思想.

(2) 以“数学实验”为课堂主线

心理学研究表明: 听可以记住10%的信息; 看可以记住30%的信息; 动手做可以记住90%的信息. 这就说明在获取信息的过程中, 动手做的效果最佳^[1].

“数学实验”是通过动手动脑“做”数学的一种数学学习活动, 是学生运用有关工具(如模型、测量工具、作图工具、手机、数学软件及计算机等), 在数学目标的指导下进行的一种以实际操作为主要特征的数学验证或探究活动. 其目的是让学生在活动中直观形象地看清数学知识, 并逐步对其适度抽象, 进行更高层次上的“再实验”. “数学实验”可以培养学生的理性思维, 提高实践能力和创新精神, 这正是新课标所提倡的数学素养和数学的人文价值之所在^[2].

本节课做了如下数学实验尝试: ①走路实验, 走出导数; ②计算实验, 算出导数; ③动点实验, 动出导数; ④推导实验, 推出导数; ⑤验证实验, 验出导数. 这样实验下的导数概念, 学生很难忘记, 甚至终生难忘.

(3) 回归课堂, 深层思考

①数学实验中的几个问题: 其一, 实验时间. 由于受到教学任务和一节课45分钟等因素的限制, 各环节的实验时间不足, 其效果不是最佳. 其二, 学生参与程度. 由于实验的环节多、参与的人多, 因此不能确定每个学生都充分参与实验, 达到预期的效果. 其三, 成果展示. 由于时间有限, 没能给每个学生展示的机会, 因此不能百分百地把握认为每个学生都实验出了成果. ②数学实验需要科技的支持: 手机中的计算器一般小数点后到15位, 几何画板(5.06)小数点后是5位, 这达不到 $|\Delta t|$ 任意小和“计算实验”与“动点实验”的一致性, 因此数学实验效果要大打折扣.

参考文献:

- [1] 王有茂. 数学实验教学初探[J]. 中学数学, 2015(13): 46-48.
- [2] 郑琰. 基于“数学实验”下的“均值不等式”教学与思考[J]. 中学数学, 2016(15): 4-6.