

江苏省仪征中学 2022-2023 学年度第一学期午间练 51

一、单选题（本大题共 2 小题，共 10.0 分。在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 函数 $f(x) = \cos^2 2x - \sin^2 2x$ 的最小正周期是()

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. π C. 2π D. 4π

2. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ ，都有 $f(x) = f(1-x)$ ，且函数 $f(x+1)$ 是奇函数，若

$f(-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{2}$ ，则 $f(\frac{2019}{4})$ 的值为()

- A. -1 B. 1 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

二、多选题（本大题共 1 小题，共 5.0 分。在每小题有多项符合题目要求）

已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 在一个周期内的图象如图所示，其

中图象（右下图）最高点、最低点的横坐标分别为 $\frac{\pi}{12}$ 、 $\frac{7\pi}{12}$ ，图象在 y 轴上的截距为 $\sqrt{3}$ 。则

下列结论正确的是() A. $f(x)$ 的最小正周期为 2π B. $f(x)$ 的最大值为 2

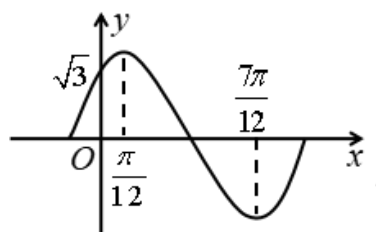
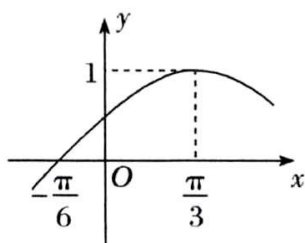
C. $f(x)$ 在区间 $[-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}]$ 上单调递增 D. $f(x + \frac{\pi}{6})$ 为偶函数

三、填空题（本大题共 2 小题，共 10.0 分）

3. 将函数 $f(x) = \sin(x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$) 的图象上所有点的横坐标变为原来的 2 倍，纵坐标不变，再将图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后，所得图象关于原点对称，则 φ 的值为_____。

4. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R ， $f(x+2) = f(x)$ ，已知 $x \in [0, 2]$ 时， $f(x) = x^2 - 2x + 1$ ，则 $f(3) =$ _____； $f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(2020) =$ _____。

四、解答题 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示。



(1) 求 $f(x)$ 的解析式；

(2) 将 $f(x)$ 的图象上所有的点横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ ，纵坐标不变，得到函数 $g(x)$ 的图

象，求方程 $g(x) = \frac{1}{2}$ 在 $[0, \pi]$ 的实数解。

答案和解析

1. 解: 因为 $f(x) = \cos^2 2x - \sin^2 2x = \cos 4x$, 所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, 故选: A.

2. 解: 因为函数 $f(x+1)$ 是奇函数, 所以 $f(-x+1) = -f(x+1)$, 又 $f(x) = f(1-x)$, 所以 $f(x+1) = -f(x)$, 所以 $f(x+2) = -f(x+1) = f(x)$, 即函数 $f(x)$ 的周期为 2, 所以 $f(\frac{2019}{4}) = f(504 + \frac{3}{4}) = f(\frac{3}{4}) = f(\frac{1}{4})$. 因为 $f(-\frac{1}{4}) = f(-\frac{5}{4} + 1) = -f(\frac{5}{4} + 1) = -f(\frac{1}{4})$, 所以 $f(\frac{1}{4}) = -f(-\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$, 所以 $f(\frac{2019}{4}) = \frac{1}{2}$. 故选: D.

3. 解: 由图知, $f(x)$ 的最小正周期 $T = 2(\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{12}) = \pi$, 则 $\omega = 2$. 由 $2 \times \frac{\pi}{12} + \varphi = \frac{\pi}{2}$, 得 $\varphi = \frac{\pi}{3}$. 由 $f(0) = \sqrt{3}$, 得 $A \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, 则 $A = 2$, 所以 $f(x) = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{3})$. 当 $x \in [-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}]$ 时, $2x + \frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 则 $f(x)$ 单调递增. 因为 $f(x + \frac{\pi}{6}) = 2 \sin[2(x + \frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{3}] = 2 \sin(2x + \frac{2\pi}{3})$, 则 $f(x + \frac{\pi}{6})$ 不是偶函数, 选 BC.

4. 解: 将函数 $f(x) = \sin(x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$) 的图象上所有点的横坐标变为原来的 2 倍, 得到 $y = \sin(\frac{1}{2}x + \varphi)$, 再将图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 得 $y = \sin[\frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{6}) + \varphi] = \sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{12} + \varphi)$, $\therefore$ 所得图象关于原点对称, $\therefore y = \sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{12} + \varphi)$ 为奇函数, $\therefore \varphi - \frac{\pi}{12} = k\pi$ ($k \in Z$), $\therefore 0 < \varphi < \pi$, $\therefore$ 当 $k = 0$ 时, 可得 $\varphi = \frac{\pi}{12}$. 故答案为 $\frac{\pi}{12}$.

5. 解: $f(x+2) = f(x)$, 故函数周期为 2, $f(3) = f(1) = 1 - 2 + 1 = 0$, $f(0) = 0 - 0 + 1 = 1$, $f(1) = f(3) = 0$, 故 $f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(2020) = 1010 \cdot (f(0) + f(1)) + f(0) = 1011$. 故答案为: 0; 1011.

6. 【答案】解: (1) 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象可得 $\frac{1}{4} \times \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$, $\therefore \omega = 1$. 再根据图象, 可得 $1 \times (-\frac{\pi}{6}) + \varphi = 2k\pi$, $k \in Z$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 求得 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $\therefore f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6})$. (2) 将 $f(x)$ 的图象上所有的点横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$, 纵坐标不变, 得到函数 $g(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 的图象, 方程 $g(x) = \frac{1}{2}$, 即 $\sin(2x + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, 可得 $2x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ 或 $2x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$, $k \in Z$, 即 $x = k\pi$ 或 $k\pi + \frac{\pi}{3}$, $k \in Z$, 由于 $x \in [0, \pi]$, 可得 $x = 0, \frac{\pi}{3}, \pi$.