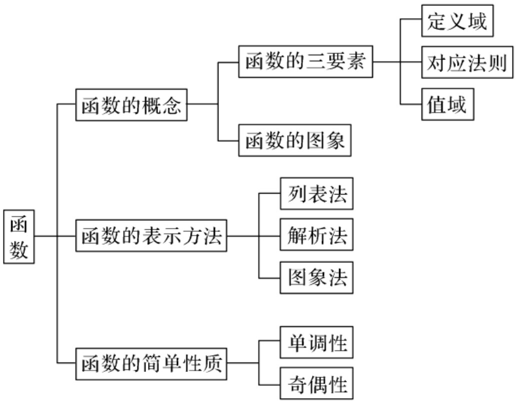
江苏省仪征中学 2022-2023 学年度第一学期高一数学期末复习导学案

函数复习（1）

研制人：李军焰　　审核人：邓迎春

班级：______姓名：______________学号：__________授课日期：2023.1

一、知识框架



二、课前热身

1. 函数 $y=\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{x^3}$ 的定义域是（　）

A. $(-\infty,1]$　　B. $(-1,0)\cup(0,1)$　　C. $[-1,0)\cup(0,1]$　　D. $(0,1]$

2. 定义在 R 上的偶函数 $f(x)$，满足 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，且在 $(0,+\infty)$ 上递减，则 $xf(x)<0$ 的解集为（　）

A. $\left\{x\middle|0<x<\frac{1}{2}\text{或}-\frac{1}{2}<x<0\right\}$　B. $\left\{x\middle|x<-\frac{1}{2}\text{或}x>\frac{1}{2}\right\}$　C. $\left\{x\middle|0<x<\frac{1}{2}\text{或}x<-\frac{1}{2}\right\}$　D. $\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x<0\text{或}x>\frac{1}{2}\right\}$

3.（多选）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2,-2\le x<1\\-x+2,x\ge 1\end{cases}$ 关于函数 $f(x)$ 的结论正确的是（　）

A. $f(x)$ 的定义域为 R　　B. $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,4]$

C. 若 $f(x)=2$，则 x 的值是 $-\sqrt{2}$　　D. $f(x)<1$ 的解集为 $(-1,1)$

4.（多选）已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，当 $x\ge 0$ 时，$f(x)=x-x^2$，则下列说法正确的是(　)

A. $f(x)$ 的最大值为 $\frac{1}{4}$　　B. $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上是增函数

C. $f(x)>0$ 的解集为 $(-1,1)$　　D. $f(x)+2x\ge 0$ 的解集为 $[0,3]$

5. 若不等式 $x^2-ax+1\ge 0$ 对一切 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 都成立，则 a 的最大值为_______.

三、典型例题

例 1.（1）若函数 $y=f\left(x+1\right)$ 的定义域是 $\left(-1,1\right)$，则函数 $g\left(x\right)=f\left(\left|x\right|\right)$ 的定义域是（　　）

A．$\left(-2,2\right)$　　B．$\left(-\frac{1}{2},0\right)$　　C．$\left(-1,0\right)\cup\left(0,1\right)$　　D．$\left(-2,0\right)\cup\left(0,2\right)$

（2）对于 $\forall x\in\left[-2,2\right]$，不等式 $m-x\geq\sqrt{2-x}$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是（　　）

A．$m\geq 0$　　B．$m\geq\sqrt{2}$　　C．$m\geq 2$　　D．$m\geq\frac{9}{4}$

（3）①已知 $f\left(\sqrt{x}+2\right)=x+4\sqrt{x}$，求函数 $f\left(x\right)$ 的解析式；

②已知 $f\left(x\right)$ 是二次函数，且满足 $f\left(0\right)=1$，$f\left(x+1\right)=f\left(x\right)+2x$，求函数 $f\left(x\right)$ 的解析式；

例 2.（1）奇函数 $f\left(x\right)$ 是定义域为 $\left(-2,2\right)$ 上的增函数，且 $f\left(3a-1\right)+f\left(a-1\right)>0$，则 a 的取值范围是____________

（2）已知函数 $f\left(x\right)=ax^2+\left(b-2a\right)x-3b+1$ 是定义在 $\left[a^2-3,2a\right]$ 上的偶函数，且 $f\left(2m-1\right)<f\left(1+3m\right)$，则 m 的取值范围的集合是____________.

例 3.（1）（多选）已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，对任意的 x 都有 $f(x+3)=-f(x)$，且 $f(5)=-2$，对任意的 $x_1,x_2\in[0,3]$，且 $x_1\neq x_2$ 时，$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 恒成立，则（　）

A．函数 $f(x)$ 是周期为 6 的周期函数　　B．$f(29)=-2$

C．$f(x)$ 在 $[8,10]$ 上是减函数　　D．方程 $f(x)+2=0$ 在 $(-7,7)$ 上有 4 个实根

（2）（多选）定义在 R 上函数 $f\left(x\right)$ 满足：$f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$，$f\left(2-x\right)=f\left(x\right)$，$f\left(1\right)=1$，

设 $g(x)=f\left(2x-1\right)$，则（　　）

A．$f(x)$ 的图象关于直线 x=2022 对称　　B．$f\left(x\right)$ 的图象关于点（2022，0）中心对称

C．$g(2022)=-1$　　D．$g(x)$ 为偶函数

四、小结

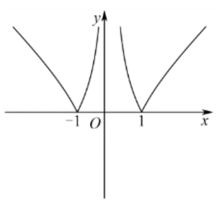
江苏省仪征中学2022-2023学年度第一学期高一数学期末复习作业

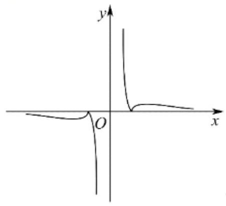
函数复习（1）

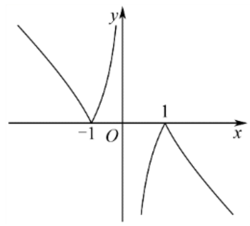
研制人：李军焰　　　审核人：邓迎春　（时长：45分钟）

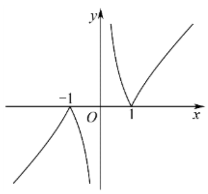
班级：______姓名：____________学号：________完成日期：2023.1

1. 函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\left|x^{2}-1\right|}{x}$ 的图像为（　）

A. 

B. 

C. 

D. 

2. 已知 $f(x)$ 是 R 上的偶函数，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)=-x^{2}+2x$，则 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=$（　）

A．$f(x)=-x^{2}-2x$　　B．$f(x)=-x^{2}+2x$　　C．$f(x)=x^{2}-2x$　　D．$f(x)=x^{2}+2x$

3. 函数 $f\left(x\right)=ax^{2}+a$ 是区间 $\left[2a,a^{2}+1\right]$ 上的偶函数，若函数 $g\left(x\right)=f\left(x-2\right)$，则 $g\left(\frac{4}{3}\right),g\left(\frac{3}{2}\right)$，$g\left(3\right)$ 的大小关系为（　）

A．$\mathrm{g}\left(\frac{3}{2}\right)<\mathrm{g}\left(\frac{4}{3}\right)<\mathrm{g}\left(3\right)$　　B．$\mathrm{g}\left(\frac{3}{2}\right)>\mathrm{g}\left(\frac{4}{3}\right)>\mathrm{g}\left(3\right)$

C．$\mathrm{g}\left(\frac{3}{2}\right)<\mathrm{g}\left(3\right)<\mathrm{g}\left(\frac{4}{3}\right)$　　D．$\mathrm{g}\left(3\right)<\mathrm{g}\left(\frac{3}{2}\right)<\mathrm{g}\left(\frac{4}{3}\right)$

4. 若定义在R上的奇函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 递减，且 $f\left(-7\right)=0$，则满足 $xf\left(x-5\right)\geq 0$ 的解集是（　）

A．$\left[-2,0\right)\cup\left(5,12\right]$　　B．$\left[-2,0\right]\cup\left[5,12\right]$　　C．$\left[-2,0\right]\cup\left[5,+\infty\right)$　　D．$\left(-\infty,-2\right]\cup\left[5,12\right]$

5. 已知函数 $f\left(x\right)=x^{2}-4x+a$，$g\left(x\right)=ax+5-a$，若对任意的 $x_{1}\in\left[-1,3\right]$，总存在 $x_{2}\in\left[-1,3\right]$，、使得 $f\left(x_{1}\right)=g\left(x_{2}\right)$ 成立，则实数 a 的取值范围是（　）

A．$\left(-\infty,-9\right]$　　B．$\left[-9,3\right]$　　C．$\left[3,+\infty\right)$　　D．$\left(-\infty,-9\right]\cup\left[3,+\infty\right)$

6. 定义在$\left(0,+\infty\right)$上的函数$f\left(x\right)$满足$\dfrac{x_2 f\left(x_1\right)-x_1 f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}<0$（$x_1>0,x_2>0,x_1\neq x_2$），且$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=3$，$f\left(2\right)=6$，则不等式$f\left(x\right)>3x$的解集为（　　）

A．$\left(0,2\right)$　　B．$\left(2,+\infty\right)$　　C．$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　　D．$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

7.（多选）已知函数$f\left(\log_2 x\right)=1-\dfrac{2}{x+1}$，下列说法中正确的是（　　）

A．$f\left(x\right)$的定义域为$\left(0,+\infty\right)$　　B．$f\left(x\right)$为奇函数

C．$f\left(x\right)$在定义域内为增函数　　D．若$f\left(m^2\right)\leq f\left(2m+3\right)$，则$m\in\left[-1,3\right]$

8.（多选）已知$f(x)$的定义域为R，其函数图象关于直线$x=-3$对称，且$f(x+3)=f(x-3)$，若当$x\in[0,3]$时，$f(x)=4^x+2x-11$，则下列结论正确的是(　　)

A．$f(x)$为偶函数　　B．$f(x)$在$[-6,-3]$上单调递减

C．$f(x)$关于$x=3$对称　　D．$f(100)=9$

9. 若函数$f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{mx^2+2mx+4}}$的定义域为$R$，则实数$m$的取值范围是____________.

10. 已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2, & x>1,\\ \left(4-\dfrac{a}{2}\right)x-1, & x\leqslant 1.\end{cases}$若$f(x)$是$R$上的增函数，则实数$a$的取值范围为________.

11. 已知函数$f\left(x\right)=\ln\left(1+x\right)-\ln\left(1-x\right)$

（1）判断$f\left(x\right)$的奇偶性并证明；　（2）写出$f\left(x\right)$的单调增区间（直接写结果，不要过程）；

（3）解不等式$f\left(m-1\right)+f\left(2m\right)<0$.

12. 已知函数$f\left(x\right)=x+\dfrac{1}{x}$.

（1）根据函数单调性的定义，证明$f\left(x\right)$在区间$\left(0,1\right)$上单调递减，在区间$\left(1,+\infty\right)$上单调递增；

（2）令$g\left(x\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}-2kf\left(x\right)\left(k>\dfrac{5}{2}\right)$，若对$\forall x_1$，$x_2\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$，都有$\left|g\left(x_1\right)-g\left(x_2\right)\right|\leq\dfrac{19}{4}$成立，求实数$k$的取值范围.

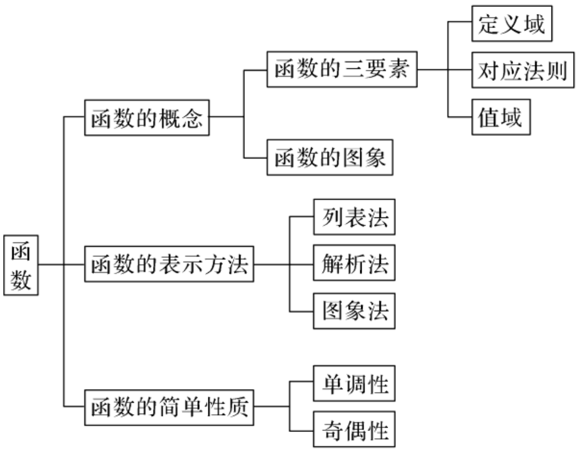
江苏省仪征中学 2022-2023 学年度第一学期高一数学期末复习导学案

函数复习（1）

研制人：李军焰　　　　审核人：邓迎春

班级：______姓名：______________学号：_________授课日期：2023.1

一、知识框架



二、课前热身

1．函数 $y=\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{x^3}$ 的定义域是（　）

A．$(-\infty,1]$　　　　*B*．$(-1,0)\cup(0,1)$　　　　*C*．$[-1,0)\cup(0,1]$　　　　*D*．$(0,1]$

【答案】*C*

【解析】由题，函数定义域满足 $\begin{cases}1-x^2\geq 0\\ x^3\neq 0\end{cases}$，解得 $x\in[-1,0)\cup(0,1]$.

故选：*C*

2.定义在R上的偶函数 $f(x)$，满足 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，则 $xf(x)<0$ 的解集为(　)

A．$\left\{x\middle|0<x<\frac{1}{2}\text{或}-\frac{1}{2}<x<0\right\}$　　　　B．$\left\{x\middle|x<-\frac{1}{2}\text{或}x>\frac{1}{2}\right\}$

C．$\left\{x\middle|0<x<\frac{1}{2}\text{或}x<-\frac{1}{2}\right\}$　　　　D．$\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x<0\text{或}x>\frac{1}{2}\right\}$

【答案】D

【解析】因为函数 $f(x)$ 是偶函数，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，且 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，

所以 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$，且在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增，

当 $x>\frac{1}{2}$ 或 $x<-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)<0$，当 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ 时，$f(x)>0$，

又当 $x>0$，$xf(x)<0$ 可化为 $f(x)<0$，所以 $x>\frac{1}{2}$，

当 $x<0$ 时，不等式 $xf(x)<0$ 可化为 $f(x)>0$，所以 $-\frac{1}{2}<x<0$，

所以不等式 $xf(x)<0$ 的解集为 $\left\{x\left|-\frac{1}{2}<x<0\text{或}x>\frac{1}{2}\right.\right\}$.

故选：D.

3.（多选题）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2,-2\le x<1\\-x+2,x\ge 1\end{cases}$ 关于函数 $f(x)$ 的结论正确的是（　）

A. $f(x)$ 的定义域为 R　　B. $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,4]$

C. 若 $f(x)=2$，则 x 的值是 $-\sqrt{2}$　　D. $f(x)<1$ 的解集为 $(-1,1)$

【答案】BC

【解析】函数 $f(x)=\begin{cases}x^2,-2\le x<1\\-x+2,x\ge 1\end{cases}$ 的定义域是 $[-2,+\infty)$，故 A 错误；

当 $-2\le x<1$ 时，$f(x)=x^2$，值域为 $[0,4]$，当 $x\ge 1$ 时，$f(x)=-x+2$，值域为 $(-\infty,1]$，故 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,4]$，故 B 正确；

当 $x\ge 1$ 时，令 $f(x)=-x+2=2$，无解，当 $-2\le x<1$ 时，令 $f(x)=x^2=2$，得到 $x=-\sqrt{2}$，故 C 正确；

当 $-2\le x<1$ 时，令 $f(x)=x^2<1$，解得 $x\in(-1,1)$，当 $x\ge 1$ 时，令 $f(x)=-x+2<1$，解得 $x\in(1,+\infty)$，

故 $f(x)<1$ 的解集为 $(-1,1)\cup(1,+\infty)$，故 D 错误.

故选：BC．

4.（多选题）已知函数 $f(x)$是定义在 **R** 上的偶函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x-x^2$，则下列说法正确的是(　　)

A. $f(x)$的最大值为$\frac{1}{4}$

B. $f(x)$在$(-1，0)$上是增函数

C. $f(x)>0$ 的解集为$(-1，1)$

D. $f(x)+2x\geqslant 0$ 的解集为$[0，3]$

答案　AD

解析　$x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x-x^2=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$，易求得 $x<0$ 时，$f(x)=-x-x^2=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$，

∴$f(x)$的最大值为$\frac{1}{4}$，A 正确；$f(x)$在$\left(-\frac{1}{2}，0\right)$上是减函数，B 错误；$f(x)>0$ 的解集为$(-1，0)\cup(0，1)$，C 错误；$x\geqslant 0$ 时，$f(x)+2x=3x-x^2\geqslant 0$ 的解集为$[0，3]$，$x<0$ 时，$f(x)+2x=x-x^2\geqslant 0$ 无解，故 D 正确．故选 AD.

5. 若不等式$x^2-ax+1\geq 0$对一切$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$都成立，则 a 的最大值为________.

【详解】因为不等式$x^2-ax+1\geq 0$对一切$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$恒成立，

所以对一切$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$ax\leq x^2+1$，即$a\leq\frac{x^2+1}{x}$恒成立.

令$g\left(x\right)=\frac{x^2+1}{x}=x+\frac{1}{x}\left(x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\right)$.

易知$g\left(x\right)=x+\frac{1}{x}$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$内为减函数．所以$g\left(x\right)>g(\frac{1}{2})=\frac{5}{2}$，

故$a\leq\frac{5}{2}$，所以a的最大值是$\frac{5}{2}$.

三、典型例题

例 1.（1）若函数$y=f\left(x+1\right)$的定义域是$\left(-1,1\right)$，则函数$g\left(x\right)=f\left(\left|x\right|\right)$的定义域是（　　）

A．$\left(-2,2\right)$　　B．$\left(-\frac{1}{2},0\right)$　　C．$\left(-1,0\right)\cup\left(0,1\right)$　　D．$\left(-2,0\right)\cup\left(0,2\right)$

【答案】D

【解析】函数 $y=f(x+1)$ 的定义域是 $(-1,1)$，故 $x\in(-1,1)$，

所以 $x+1\in(0,2)$，故 $|x|\in(0,2)$，解得：$x\in(-2,0)\cup(0,2)$.故选：D

（2）对于 $\forall x\in[-2,2]$，不等式 $m-x\geq\sqrt{2-x}$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是（　）

A．$m\geq 0$　　B．$m\geq\sqrt{2}$　　C．$m\geq 2$　　D．$m\geq\frac{9}{4}$

【答案】D

【解析】因为 $\forall x\in[-2,2]$，不等式 $m-x\geq\sqrt{2-x}$ 恒成立，

所以 $m\geq x+\sqrt{2-x}$ 对 $\forall x\in[-2,2]$ 恒成立，

令 $t=\sqrt{2-x}$，则 $t\in[0,2]$，$x=2-t^2$，所以 $x+\sqrt{2-x}=2-t^2+t=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$，

所以当 $t=\frac{1}{2}$ 时 $2-t^2+t$ 取得最大值 $\frac{9}{4}$，即当 $x=\frac{7}{4}$ 时 $x+\sqrt{2-x}$ 取得最大值 $\frac{9}{4}$，

即 $\left(x+\sqrt{2-x}\right)_{\max}=\frac{9}{4}$，所以 $m\geq\frac{9}{4}$.故选：D

（3）①已知 $f\left(\sqrt{x}+2\right)=x+4\sqrt{x}$，求函数 $f(x)$ 的解析式；

②已知 $f(x)$ 是二次函数，且满足 $f(0)=1$，$f(x+1)=f(x)+2x$，求函数 $f(x)$ 的解析式；

①方法一　设 $t=\sqrt{x}+2$，则 $t\geq 2$，$\sqrt{x}=t-2$，即 $x=(t-2)^2$，

所以 $f(t)=(t-2)^2+4(t-2)=t^2-4$，所以 $f(x)=x^2-4(x\geq 2)$.

方法二　因为 $f\left(\sqrt{x}+2\right)=\left(\sqrt{x}+2\right)^2-4$，所以 $f(x)=x^2-4(x\geq 2)$.

②因为 $f(x)$ 是二次函数，所以设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$．由 $f(0)=1$，得 $c=1$.

由 $f(x+1)=f(x)+2x$，得 $a(x+1)^2+b(x+1)+1=ax^2+bx+1+2x$，

整理得$(2a-2)x+(a+b)=0$，所以$\begin{cases}2a-2=0\\a+b=0\end{cases}$，所以$\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$，所以 $f(x)=x^2-x+1$.

例 2.（1）奇函数 $f(x)$ 是定义域为$(-2,2)$上的增函数，且 $f(3a-1)+f(a-1)>0$，则 a 的取值范围是______

【解析】因为 $f(x)$ 是定义域为$(-2,2)$上的增函数，且为奇函数，

所以，$f(3a-1)+f(a-1)>0 \Leftrightarrow f(3a-1)>-f(a-1)=f(1-a)$，

所以$\begin{cases}3a-1>1-a\\-2<3a-1<2\\-2<a-1<2\end{cases}$，解得$\begin{cases}a>\dfrac{1}{2}\\-\dfrac{1}{3}<a<1\\-1<a<3\end{cases}$，即 $a\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　所以，a 的取值范围是$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

（2）已知函数 $f(x)=ax^2+(b-2a)x-3b+1$ 是定义在$\left[a^2-3,2a\right]$上的偶函数，且 $f(2m-1)<f(1+3m)$，则 m 的取值范围的集合是______.

【答案】$\{m\mid m>0$ 或 $m<-2\}$.

【解析】由题得$\begin{cases}a^2-3+2a=0\\a^2-3<2a\end{cases}$$,\therefore a=1$.所以 $f(x)=x^2+(b-2)x-3b+1$，

因为函数是偶函数，所以 $f(-x)=f(x),\therefore x^2-(b-2)x-3b+1=x^2+(b-2)x-3b+1,\therefore b=2$.

所以 $f(x)=x^2-5$.所以函数在$(-\infty,0)$单调递减，在$(0,+\infty)$单调递增.

因为 $f(2m-1)<f(1+3m)$，所以$|2m-1|<|1+3m|$，

平方得 $m^2+2m>0,\therefore m>0$ 或 $m<-2$.

所以 m 的取值范围的集合是$\{m\mid m>0$ 或 $m<-2\}$.

故答案为：$\{m\mid m>0$ 或 $m<-2\}$.

例 3.（1）（多选题）已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，对任意的 x 都有 $f(x+3)=-f(x)$，且

$f(5)=-2$，对任意的$x_1,x_2\in[0,3]$，且$x_1\neq x_2$时，$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$恒成立，则（　）

A．函数$f(x)$是周期为 6 的周期函数　　B．$f(29)=-2$

C．$f(x)$在$[8$，$10]$上是减函数　　D．方程$f(x)+2=0$在$(-7,7)$上有 4 个实根

【答案】ABD

【解析】由$f(x+3)=-f(x)$，可得$f(x+6)=-f(x+3)=f(x)$，所以函数$f(x)$是周期为 6 的周期函数，

所以 A 正确；

因为$f(5)=-2$，可得$f(29)=f(4\times6+5)=f(5)=-2$，所以 B 正确；

因为对任意的$x_1,x_2\in[0,3]$，且$x_1\neq x_2$时，$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$恒成立，所以函数$f(x)$在$[0,3]$上为单调递增函数，又由函数$f(x)$为偶函数，

所以$[-3$，$0]$上为单调递减函数，所以函数在$[6$，$9]$上单调递增，在区间$[9$，$12]$上单调递减，

所以函数$f(x)$在区间$[8$，$10]$先增后减，所以 C 不正确；

由$f(5)=-2$，可得$f(-1+6)=-2$，

所以$f(\pm1)=-2$，$f(\pm5)=-2$，可得在区间$(-7,7)$内，

方程$f(x)+2=0$的实根为$x=\pm1$，$x=\pm5$，

故$f(x)+2=0$在$(-7,7)$上有 4 个实根，故 D 正确．

故选：ABD．

（2）（多选题）定义在 R 上函数$f\left(x\right)$满足：$f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$，$f\left(2-x\right)=f\left(x\right)$，$f\left(1\right)=1$，设

$g(x)=f\left(2x-1\right)$，则（　　）

A．$f(x)$的图象关于直线x=2022 对称　B．$f\left(x\right)$的图象关于点（2022，0）中心对称

C．$g(2022)=-1$　　　　　　D．$g(x)$为偶函数

【答案】BCD

【解析】$f(-x)=-f(x)$，函数为奇函数，图象关于原点对称，

又$f(2-x)=f(x)$，$\therefore f(2+x)=f(-x)=-f(x)$，$f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，

$\therefore f(x)$是周期函数，4 是它的一个周期，函数图象关于$(0,0)$中心对称，

由$f(2-x)=f(x)$得函数$f(x)$的图象关于直线x=1 轴对称，

$f(4044-x)=f(-x)=-f(x)$，∴ $f(x)$ 图象关于（2022，0）中心对称，B 正确，A 错误；

又 $g(2022)=f(4043)=f(3)=-f(1)=-1$，C 正确；

$g(x)=f(2x-1)$，

则 $g(-x)=f(-2x-1)=-f(-2x-1+2)=-f(1-2x)=f(2x-1)=g(x)$，所以 $g(x)$ 是偶函数，D 正确

故选：BCD．

四、小结

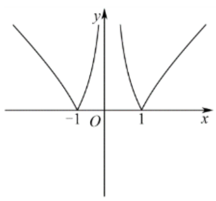
江苏省仪征中学 2022-2023 学年度第一学期高一数学期末复习作业

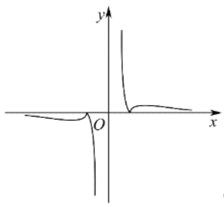
函数（1）

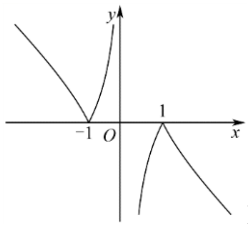
研制人：李军焰　　　审核人：邓迎春　（时长：45 分钟）

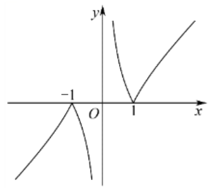
班级：_______姓名：______________学号：_________完成日期：2023.1

1．函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\left|x^2-1\right|}{x}$ 的图像为（　）

A． 

B． 

C． 

D． 

【答案】D

【解析】函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\left|x^2-1\right|}{x}$ 的定义域为 $\left\{x\left|x\neq 0\right.\right\}$，且 $f\left(-x\right)=\dfrac{\left|(-x)^2-1\right|}{-x}=-\dfrac{\left|x^2-1\right|}{x}=-f\left(x\right)$，

函数 $f\left(x\right)$ 为奇函数，A 选项错误；又当 $x<0$ 时，$f\left(x\right)=\dfrac{\left|x^2-1\right|}{x}\leq 0$，C 选项错误；

当 $x>1$ 时，$f\left(x\right)=\dfrac{\left|x^2-1\right|}{x}=\dfrac{x^2-1}{x}=x-\dfrac{1}{x}$ 函数单调递增，故 B 选项错误；故选：D.

2.已知 $f(x)$ 是 R 上的偶函数，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)=-x^2+2x$，则 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=$（　）

A． $f(x)=-x^2-2x$　　　　B． $f(x)=-x^2+2x$

C． $f(x)=x^2-2x$　　　　D． $f(x)=x^2+2x$

【答案】A

【分析】利用偶函数将 $x\in(0,+\infty)$ 的情况转化为 $x\in(-\infty,0)$ 的情形，代入解析式即可.

【详解】当 $x\in(0,+\infty)$ 时， $-x\in(-\infty,0)$， 则 $f(-x)=-x^2-2x$ ①

又因为 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，

所以 $f(-x)=f(x)$ ②

所以由①②得：当 $x\in(0,+\infty)$ 时， $f(x)=-x^2-2x$.

故选：A.

3.函数 $f(x)=ax^2+a$ 是区间 $[2a,a^2+1]$ 上的偶函数，若函数 $g(x)=f(x-2)$， 则 $g\left(\frac{4}{3}\right),g\left(\frac{3}{2}\right)$, $g(3)$ 的大小关系为（　　）

A． $g\left(\frac{3}{2}\right)<g\left(\frac{4}{3}\right)<g(3)$　　　　B． $g\left(\frac{3}{2}\right)>g\left(\frac{4}{3}\right)>g(3)$

C． $g\left(\frac{3}{2}\right)<g(3)<g\left(\frac{4}{3}\right)$　　　　D． $g(3)<g\left(\frac{3}{2}\right)<g\left(\frac{4}{3}\right)$

【答案】B

【分析】首先根据偶函数的性质求 a， 再求函数 $g(x)$， 利用函数的对称性，以及单调性判断选项.

【详解】由条件可知， $2a+a^2+1=(a+1)^2=0$， 得 $a=-1$，

所以 $f(x)=-x^2-1$， $g(x)=-(x-2)^2-1$，

函数开口向下，对称轴为 $x=2$， $\left|\frac{3}{2}-2\right|<\left|\frac{4}{3}-2\right|<|3-2|$，

所以 $g\left(\frac{3}{2}\right)>g\left(\frac{4}{3}\right)>g(3)$，

故选：B

4．若定义在R上的奇函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 单调递减，且 $f\left(-7\right)=0$，则满足 $xf\left(x-5\right)\geq 0$ 的解集是（　）

A．$\left[-2,0\right)\cup\left(5,12\right]$　　B．$\left[-2,0\right]\cup\left[5,12\right]$

C．$\left[-2,0\right]\cup\left[5,+\infty\right)$　　D．$\left(-\infty,-2\right]\cup\left[5,12\right]$

【答案】B

【解析】定义在R上的奇函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 单调递减

所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,0\right)$ 单调递减，且 $f(0)=0$， $f\left(7\right)=0$

当 $x>5$ 时， $xf\left(x-5\right)\geq 0$ 可变为 $f\left(x-5\right)\geq 0$， $f(x-5)\geq f(7)$，即 $0<x-5\leqslant 7$，解得 $5<x\leqslant 12$；

当 $0<x<5$ 时，$-5<x-5<0$，则 $xf\left(x-5\right)\geq 0$ 可变为 $f\left(x-5\right)\geq 0$， $f(x-5)\geq f(-7)$，即 $x-5\leqslant -7$，不满足 $-5<x-5<0$；

当 $x=5$ 时， $xf\left(x-5\right)=0$，满足题意；

当 $x=0$ 时， $xf\left(x-5\right)=0$，满足题意；

当 $x<0$ 时， $x-5<-5$， $xf\left(x-5\right)\geq 0$ 可变为 $f\left(x-5\right)\leqslant 0$， $f(x-5)\leqslant f(-7)$， $-7\leq x-5<-5$，解得 $-2\leq x<0$；

综上， $xf\left(x-5\right)\geq 0$ 的解集 $\left[-2,0\right]\cup\left[5,12\right]$

故选：B

5．已知函数 $f\left(x\right)=x^2-4x+a$， $g\left(x\right)=ax+5-a$，若对任意的 $x_1\in\left[-1,3\right]$，总存在 $x_2\in\left[-1,3\right]$，使得 $f\left(x_1\right)=g\left(x_2\right)$ 成立，则实数 a 的取值范围是（　）

A．$\left(-\infty,-9\right]$　　B．$\left[-9,3\right]$　　C．$\left[3,+\infty\right)$　　D．$\left(-\infty,-9\right]\cup\left[3,+\infty\right)$

【答案】D

【解析】要使对任意的$x_1\in[-1,3]$，总存在$x_2\in[-1,3]$，使得$f(x_1)=g(x_2)$成立，

即$f(x)$在$[-1,3]$上值域是$g(x)$在$[-1,3]$上值域的子集，

$f(x)=(x-2)^2+a-4$开口向上且对称轴为$x=2$，则$[-1,3]$上值域为$[a-4,a+5]$；

对于$g(x)=ax+5-a$；

当$a<0$时$g(x)$在$[-1,3]$上值域为$[2a+5,5-2a]$，

此时，$\begin{cases}a<0\\2a+5\le a-4\\5-2a\ge a+5\end{cases}$，可得$a\le-9$；

当$a=0$时$g(x)$在$[-1,3]$上值域为$\{5\}$，不满足要求；

当$a>0$时$g(x)$在$[-1,3]$上值域为$[5-2a,2a+5]$；

此时，$\begin{cases}a>0\\2a+5\ge a+5\\5-2a\le a-4\end{cases}$，可得$a\ge3$；

综上，a的取值范围$(-\infty,-9]\cup[3,+\infty)$.

故选：D

6．定义在$(0,+\infty)$上的函数$f(x)$满足$\dfrac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_1-x_2}<0$（$x_1>0,x_2>0,x_1\ne x_2$），且$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=3$，$f(2)=6$，则不等式$f(x)>3x$的解集为（　）

A．$(0,2)$　　B．$(2,+\infty)$　　C．$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　　D．$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

【答案】A

【分析】通过构造函数法，结合函数的单调性求得不等式$f(x)>3x$的解集.

【详解】构造函数$F(x)=\dfrac{f(x)}{x}(x>0)$，

任取 $0<x_1<x_2$， $F(x_1)-F(x_2)=\frac{f(x_1)}{x_1}-\frac{f(x_2)}{x_2}=\frac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_1x_2}$，

由于 $\frac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_1-x_2}<0$， $x_1-x_2<0$，所以 $x_2f(x_1)-x_1f(x_2)>0$，

所以 $F(x_1)-F(x_2)>0, F(x_1)>F(x_2)$，

所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减.

$f(x)>3x$， $\frac{f(x)}{x}>3$， $\frac{f(x)}{x}>\frac{f(2)}{2}$， $F(x)>F(2)$，所以 $0<x<2$，

所以不等式 $f(x)>3x$ 的解集为 $(0,2)$.

故选：A

7.（多选题）已知函数 $f(\log_2 x)=1-\frac{2}{x+1}$，下列说法中正确的是（　）

A． $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$

B． $f(x)$ 为奇函数

C． $f(x)$ 在定义域内为增函数

D．若 $f(m^2)\le f(2m+3)$，则 $m\in[-1,3]$

【答案】BCD

【解析】设 $\log_2 x=t, t\in\mathrm{R}$，则 $x=2^t$，故 $f(t)=1-\frac{2}{2^t+1}=\frac{2^t-1}{2^t+1}$，

所以 $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$， $x\in\mathrm{R}$，故 A 错误，

$f(-x)=\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\frac{1-2^x}{2^x+1}=-\frac{2^x-1}{2^x+1}=-f(x)$，且定义域关于原点对称，所以 $f(x)$ 为奇函数，故 B 正确，

$f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}=1-\frac{2}{2^x+1}$， $y_1=2^x+1$ 为增函数，且 y_1 恒大于 0，则 $y_2=\frac{2}{2^x+1}$ 为减函数，则 $y_3=-\frac{2}{2^x+1}$ 为增函数，则 $f(x)=1-\frac{2}{2^x+1}$ 为增函数，故 C 正确，

$f(m^2)\le f(2m+3)$，根据 $f(x)$ 为增函数，所以 $m^2\le 2m+3$，解得 $-1\leqslant m\leqslant 3$，

故 D 正确.　　故选：BCD.

8. (多选题) 已知 $f(x)$的定义域为 **R**，其函数图象关于直线 $x=-3$ 对称，且 $f(x+3)=f(x-3)$，若当 $x\in[0,3]$时，$f(x)=4^x+2x-11$，则下列结论正确的是(　　)

A．$f(x)$为偶函数　　　　B．$f(x)$在$[-6，-3]$上单调递减

C．$f(x)$关于 $x=3$ 对称　　　　D．$f(100)=9$

【答案】ACD

9.若函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{mx^2+2mx+4}}$ 的定义域为 R，则实数 m 的取值范围是______________.

【答案】 $0\le m<4$

【解析】要使定义域为 R，则 $mx^2+2mx+4>0$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 上恒成立，

当 $m=0$时， $4>0$ 恒成立，满足题设；

当$\begin{cases}m>0\\ \Delta=4m^2-16m<0\end{cases}$时，可得$0<m<4$.综上， $0\le m<4$.

10. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2，x>1，\\ \left(4-\dfrac{a}{2}\right)x-1，x\leqslant 1.\end{cases}$ 若 $f(x)$是 **R** 上的增函数，则实数 a 的取值范围为________.

答案　[4，8)

解析　当 $x>1$ 时，$f(x)=x^2$是增函数，若 $f(x)$是 **R** 上的增函数，则 $f(x)=\left(4-\dfrac{a}{2}\right)x-1$ 在$(-\infty，1]$上是增函数，且满足$\left(4-\dfrac{a}{2}\right)\times1-1\leqslant1^2$，因此$\begin{cases}4-\dfrac{a}{2}>0，\\ 4-\dfrac{a}{2}-1\leqslant1，\end{cases}$　解得 $4\leqslant a<8$.

11.已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$

(1)判断 $f(x)$的奇偶性并证明；　(2)写出 $f(x)$的单调增区间（直接写，不要过程）；

(3)解不等式 $f(m-1)+f(2m)<0$.

【解析】(1) $f(x)$为奇函数，下证明：

由已知，$\begin{cases}1+x>0\\ 1-x>0\end{cases}\Rightarrow -1<x<1$，即定义域为$(-1,1)$，关于原点对称

又$\because f(-x)=\ln(1-x)-\ln(1+x)=-[\ln(1+x)-\ln(1-x)]=-f(x)$ $\therefore f\ \ x$ 为奇函数，

（2） $f(x)$的单调增区间为$(-1,1)$，

证明：设$-1<x_1<x_2<1$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\ln(1+x_1)-\ln(1-x_1)-\ln(1+x_2)+\ln(1-x_2)=\ln\left(\frac{1+x_1}{1+x_2}\cdot\frac{1-x_2}{1-x_1}\right)$

因为$-1<x_1<x_2<1$，所以$0<1+x_1<1+x_2, 0<1-x_2<1-x_1$，于是$0<\frac{1+x_1}{1+x_2}<1, 0<\frac{1-x_2}{1-x_1}<1$.则

$0<\frac{1+x_1}{1+x_2}\cdot\frac{1-x_2}{1-x_1}<1$,所以$\ln\left(\frac{1+x_1}{1+x_2}\cdot\frac{1-x_2}{1-x_1}\right)<0$ 所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

即函数 $f(x)$ 是 $(-1,1)$ 上的增函数.

（3） $f(m-1)<-f(2m)$ 即 $f(m-1)<f(-2m)$

又 $f(x)$在定义域$(-1,1)$上为增函数$\Rightarrow\begin{cases}-1<m-1<1\\-1<-2m<1\\m-1<-2m\end{cases}\Rightarrow 0<m<\frac{1}{3}$ 即不等式的解为：$\left(0,\frac{1}{3}\right)$.

12.已知函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$.

(1)根据函数单调性的定义，证明 $f(x)$在区间$(0,1)$上单调递减，在区间$(1,+\infty)$上单调递增；

(2)令 $g(x)=x^2+\frac{1}{x^2}-2kf(x)\left(k>\frac{5}{2}\right)$，若对$\forall x_1$，$x_2\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，都有$|g(x_1)-g(x_2)|\le\frac{19}{4}$成立，求实数$k$的取值范围.

【详解】（1）证明：设x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，且$x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)-\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)=(x_1-x_2)\left(\frac{x_1x_2-1}{x_1x_2}\right)$，

当$0<x_1<x_2<1$时，$\therefore x_1-x_2<0$，$0<x_1x_2<1$，

$\therefore x_1x_2-1<0$，$\therefore f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，

∴函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减.

当 $1<x_1<x_2$ 时，∴ $x_1-x_2<0$， $x_1x_2>1$， ∴ $x_1x_2-1>0$， ∴ $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

∴函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

综上，函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

（2）解：由题意知 $g(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}-2k\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$，

令 $z=x+\dfrac{1}{x}$， $y=z^2-2kz-2$，由（1）可知函数 $z=x+\dfrac{1}{x}$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上单调递减，在 $[1,2]$ 上单调递增，

∴ $2\le z\le\dfrac{5}{2}$，∵函数 $y=z^2-2kz-2$ 的对称轴方程为 $z=k>\dfrac{5}{2}$，

∴函数 $y=z^2-2kz-2$ 在 $\left[2,\dfrac{5}{2}\right]$ 上单调递减，

当 $z=2$ 时， $y=z^2-2kz-2$ 取得最大值， $y_{\max}=-4k+2$，

当 $z=\dfrac{5}{2}$ 时， $y=z^2-2kz-2$ 取得最小值， $y_{\min}=-5k+\dfrac{17}{4}$，

所以 $g(x)_{\max}=-4k+2$， $g(x)_{\min}=-5k+\dfrac{17}{4}$，

又∵对 $\forall x_1$， $x_2\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$，都有 $|g(x_1)-g(x_2)|\le\dfrac{19}{4}$ 恒成立，

∴ $g(x)_{\max}-g(x)_{\min}\le\dfrac{19}{4}$，即 $-4k+2-\left(-5k+\dfrac{17}{4}\right)\le\dfrac{19}{4}$，解得 $k\le 7$，

又∵ $k>\dfrac{5}{2}$，∴ k 的取值范围是 $\left(\dfrac{5}{2},7\right]$.