

别错失培养创新意识的机遇^{*}——以等差数列前 n 项和公式教学为例

●洪昌强 (台州市第一中学 浙江台州 318000)

摘要: 一个具有创新型的人,一定具有较强的创新意识.在平时教学中,由于缺乏相关经验,导致创新意识的培养机遇错失现象十分普遍,学生的创新意识沉沦不起,创新思维能力得不到发展.文章通过案例指出创新意识的培养机遇不可错失.

关键词: 创新意识;高斯算法;等差数列求和

中图分类号: O122

文献标识码: A

文章编号: 1003-6407(2017)05-01-04

1 问题提出

钱学森之问“为什么我们的学校总是培养不出杰出人才?”虽然这是一个既庞大又复杂的教育工程,但“教师能做什么,数学课堂又能做什么”,这是值得每位教师思考的问题,也是教育工作者的职责.笔者以“等差数列前 n 项和公式”教学为例,谈谈个人的一些教学实践和感悟.

2 过去教学

按教科书编排顺序,先介绍高斯的算法,再由此启发学生如何求一般的等差数列前 n 项和,然后讲解求和公式的应用.课堂中教师的教学比较顺畅,学生的课本作业也能完成.课后反思:为什么要先介绍高斯的算法?怎么不问学生是怎么想?学生有什么获得感?这样的教学能培养出高斯这样大师级的人才吗?

3 教学改进

机遇1 体会简捷算法——好奇

数列求和是一种加减运算,过程是一个化简过程,也是合并过程,但不同的算法所带来的效果不一样.

问题1 如何计算以下数列的各项和?

1) 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13;

2) 11, -7, 2, -1, 5, -4, 8.

问题2 如何计算图1

中的钢管数?对问题1中的2个问题你有何感想?

设计意图 使用学生熟

悉的学习内容来提供支持,即

即使是学习有困难不情愿学习的学生,也可以让他们

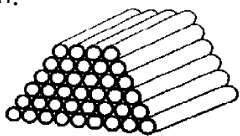


图1

发现自己可以利用过去的知识来参与学习活动,激发学生的原有经验,并在学习讨论中感到惬意.若按教材直接抛出求“ $1 + 2 + 3 + \cdots + 100$ ”,学生对此相当熟悉,甚至能背出结果5 050.这样会导致学生对本节课的学习缺少新鲜度.

问题1、问题2以“如何计算”和“有何感想”提出问题,具有问题性、思考性、启发性,问题1第1)小题之所以求和方便是因为“式子美”,每项相同,也是等差数列求和的归宿.问题1第2)小题中的式子结构没有第1)小题这样良好,不爱思考的学生按习惯思维处理,一个劲地按原式排列顺序然后逐项相加,因此感到繁锁.而爱思考的学生会问:有无简捷的算法?虽然和式中各数排序有点“乱”,但又觉得不乱.通过调整各项次序,让式子变“美”,结果发现“好”的计算方法,体会加减运算也有巧妙方法.问题2以贴近学生日常生活,但又不俗落套,通过情境启发,发现每堆钢管数虽不同,但经过补形可成为一个平行四边形.简单的问题也有值得思考的地方,激起学生学习的好奇心,最大限度地调动学习主动性和自觉性.同时,溯源高斯的算法,为下面探索等差数列求和公式提供支持.

机遇2 亲身经历发现规律——自信

若按教材先介绍高斯的算法,学生听后只是佩服高斯小时候聪明,情感上对高斯进行赞叹,但没有发现自己的能力,没有给自己增加学习自信.其实束缚了学生的思维,把学生的思维捆死在一条路上,严重阻碍了学生的思维发展,创新能力被扼杀.

问题3 如何求 $1 + 2 + 3 + \cdots + n$?

问题3中虽然各项的数是自然数,比较简洁,

* 收文日期:2017-01-09;修订日期:2017-02-20

作者简介:洪昌强(1963-),男,浙江台州人,中学高级教师.研究方向:数学教育.

但项数处于动态中,其和随 n 的变化而变化,变化规律怎样? 学生通过探究得到以下几种处理方法:

思路1 通过估算,发现其和随 n 的变化且逐渐增大,其值比 $1 \times n$ 大,但比 $n \times n$ 小,其和的结果不是幂函数型也不会是指数函数型,猜想 $S_n = an^2 + bn + c$,通过计算可得 $S_n = \frac{1+n}{2} \times n$.

思路2 统一思想,虽然各项在变化且逐渐增大,但第1项与最后1项之和,与第2项与倒数第2项之和相同,即第 k 项与第 $n-k$ 项之和为定值 $1+n$,讨论 n 的奇偶性,均可得到 $S_n = \frac{1+n}{2} \times n$.

思路3 上面的求法需要讨论,由问题2启发,原数列与倒序后的数列各对应项之和均为 $n+1$,可得 $S_n = \frac{1+n}{2} \times n$.

接着,教师介绍高斯算法及他的数学研究成果.

设计意图 高斯算法通过加法运算结合律与交换律,对各项重新组合化为统一.学会使用一种方法并不是学习的目的,学习应该超越掌握这个方法本身东西——具有发现创建这些方法的本领.问题3虽然还是求和,但其和随项数变化而变化,起到了从常量到变量的过渡,自然渗透了函数思想,并让学生亲身发现数列的和与 n 的变化关系规律及二次函数有紧密联系.通过开放式教学,让学生发表不同的想法,对于学生个人来说,各种方法都有一定的思维价值.学生完成了与高斯一样的创造活动,感觉自己像科学家一样,伟人能行我也行,增强自我胜任感,鼓足了探索 and 解决新问题的勇气,把教师的知识和责任内化为自己的学习动力.问题3还为等差数列求和公式的推导起到拉动思维引擎的作用.

机遇3 大胆探索新的方法——好胜

学习等差数列求和公式,仅仅是为了得到公式的结果吗?教育是让人去思考、学知识,又让思维技能得到发展.因此,等差数列求和公式教学不能匆促结束,教师要帮助学生对知识重建“再创造”的情境,让学生亲自去经历、探索问题解决的方法.

问题4 你能求等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的和 S_n 吗?希望大家有新的方法发现.对各种推导方法你有什么想法?

在问题3的启发下,得到以下思路:

思路1 根据等差数列通项公式,将问题4化归为问题3进行处理:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \\ &na_1 + (1+2+3+\cdots+n-1)d = \\ &na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d. \end{aligned}$$

思路2 根据等差数列 $\{a_n\}$ 的性质,可得 $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$ (其中 $k \in \mathbf{N}$ 且 $1 \leq k \leq n$),从而 $2S_n = n(a_1 + a_n)$.

以上2种方法多数学生都能独立完成.

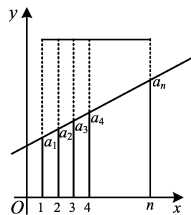


图2

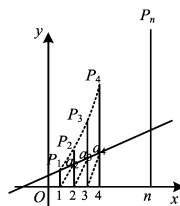


图3

思路3 受问题2的启发,借助图形处理,如图2,将梯形补成矩形,得

$$2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = n(a_1 + a_n).$$

思路4 如图3,在直角坐标系中,通过线段平移及迭加的方法,直接找点 $P_n(n, S_n)$ 的位置,当公差 d 均为正数时,随 n 不断增大点 P_n 不断升高,但上升速度并不是匀速直线上升,而是越来越陡峭,貌似二次函数图像的特征.又因为 $S_1 = a_1$, 所以猜想 $S_n = (n-1)(A_n + B) + a_1$.

思路5 如图4,从面积入手,将大梯形分割成 $n-1$ 个小梯形,由于每个小梯形的高均为1,因此

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot (n-1) &= \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_2 + a_3}{2} + \cdots + \frac{a_{n-1} + a_n}{2}, \end{aligned}$$

从而

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

思路6 类似思路5,也可将大梯形分割成 $n-1$ 个小矩形和 $n-1$ 个全等小三角形进行处理.

以上6种方法均体现了数与形相互协调对称之美.

设计意图 问题4中求 S_n 涉及到 n 个不同的字母,需要学生寻找这些字母之间的联系以及它们的变化规律.有了问题3的探究经历,绝大多数学生会利用高斯算法或化归为问题3进行处理.问题4中“希望大家有新的方法发现”,对一些会思考的学生,在追求创新目标驱动下,投入到新方法探索中.思路3和思路4通过函数思想和数形结合方法

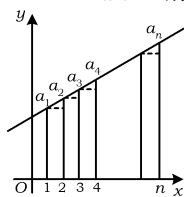


图4

进行处理.思路5和思路6从面积角度着手,对数列各项的“和”理解为区间 $[1, n]$ 函数值之和,其函数值的和与各“小块”的面积之和密切相关(积分就是一种无限分割求和的极限计算).思路3~6角度独特、新颖,跨越经验型思维定势,超越权威.这些方法来自学生经过自己的艰难探索而获得,更坚信我能行.孤立方法形成不了能力,注重学科知识间的融合,加强各种方法的联系,让各种各样的联系滋生出不可思议的美妙问题,有利于提高学生的综合应用能力.因此,在探索各种方法之后,接着让学生总结各方法之间的内在联系,随着学生的深入探究,公式更加鲜活,课堂更富有生命.

机遇4 敢于提出新的问题——创新

教科书上安排的5个例题所涉及的内容都是特殊的等差数列,问题也比较简单,直接应用公式就可解决,其意图是巩固公式,这仅是强调双基的落实.若就此收官,思考力的培养将失去一次肥沃土壤.优质的教学能极大地促进学生持续发展,高成就的学生往往在接受具有挑战的学习任务方能得到发展.

问题5 结合教科书中的4个例题,请你对 $\{a_n\}$ 和 $\{S_n\}$ 这2个数列谈谈哪些问题值得你关注?你发现了哪些结论?你解决了哪些问题?

1)由例1和例2可知确定等差数列只需要2个独立条件.

2)由例3知 $\{a_n\}$ 的通项 a_n 可以由 S_n 确定,并且它们的关系为 $a_n = S_n - S_{n-1}$ (其中 $n \geq 2$).

3)等差数列前 n 项和的形式一定是 $S_n = pn^2 + qn$.反过来, $S_n = pn^2 + qn + r$ 并不是等差数列的前 n 项求和的结果,除非 $r = 0$.

4)若把例3条件中的“ $S_n = n^2 + \frac{1}{2}n$ ”改为“ $S_n = n^2$ ”得到 $a_n = 2n - 1$,若改为“ $S_n = n^4$ ”,猜想 $a_n = (2n - 1)^2$ 为什么不成立?如何求 $\{(2n - 1)^2\}$ 的前 n 项和?

5)在例2的条件下,求 S_{30} 特别方便,因为 S_{10} , $S_{20} - S_{10}$, $S_{30} - S_{20}$ 成等差数列.不仅如此,有更一般的结论: S_n , $S_{2n} - S_n$, $S_{3n} - S_{2n}$ 和 S_m , $S_{2m+t} - S_{m+t}$, $S_{3m+t} - S_{2m+t}$ 仍然成等差数列.

6)若 $\{a_n\}$ 的公差为正数,则 $\{S_n\}$ 一定是递增数列吗?反之,若 $\{S_n\}$ 是递增数列,则 $\{a_n\}$ 的公差一定为正吗?

7)等差数列前 n 项和的最大(小)值是在 $|a_n|$ 最小处或附近达到.

设计意图 学生在自主学习教科书中的4个例题后,教师设计具有挑战性的任务,给充足的思考时间,鼓励学生拓展思路,自由畅想,激发创新热情,对各个问题大胆假设,求索未知,认真求证,创造新事物,让创新成为习惯.

4 感悟

创新意识的培养机遇不是靠等待的,机遇掌握在每位教师心中,需要教师去挖掘、去捕捉、去把握、去落实.因此,教师应长期致力于创造一个有激发力的课堂.

4.1 创新意识人人常有

弗兰登塔尔先生曾说:“即使是儿童,也已经具有某种‘潜在的发现能力’,他们的思维和行为方式已经具备了某些教师甚至研究人员的特征.”主动学习是创新教育的核心,因此,教师首先要走进学生,懂得学生,理解学生,唤醒学生,激活生命内力的教育才算成功教育开始.其次,教师要尊重学生,由于各个学生生活经验背景不同,对问题的理解和想法也存在一定差异,教师设置问题的起点要低,贴近学生实际,激发创新活力,把每位学生的创造力激发出来.第三,课堂上开放学生的思维,给学生留足思考的时空,鼓励求异求活,让各个学生有机会交流对问题的质疑、思维过程及探索过程的各种困难、感受,共同分享.

4.2 创新意识处处常在

教材在很大程度上决定着学生的学和教师的教,而每个概念、定理、公式、例题,每种解法都蕴涵着深厚的意义,有其发生、形成的过程.《课标》指出:“使学生的学习过程成为在教师引导下的‘再创造’过程”“让学生体验数学发现和创造的历程,发展他们的创新意识.”因此,教师首先要读懂教材,理解教材,挖掘教材,用好教材.教学时通过创设反映数学事实的恰当情境,引导和组织学生经历和体验知识再创造的过程.其次,开启数学思想方法的导航灯,数学思想方法是数学的灵魂,也是培养创新意识的基础和源泉,数学创新思维是以数学思想为支撑点.本节课的教学展现了数列求和公式的认识过程:算式→变化→对应,在公式探索过程中,运用化归、函数、数形结合等重要数学思想方法发现问题、提出问题、解决问题,展示数学思维的美妙,体验数学力量感,满足了学生求新求异的欲望,孕育了不断创新意识.

(下转第4页)

揭示本质,找准突破,让思维回归“自然”^{*}

●章林海

(严州中学新安江校区 浙江建德 311600)

摘要:把数学教好是落实核心素养的前提,关键是要“示以学生思维之道”.文章从运用概念思考、善于数形互助、合理建立模型、善于联系迁移这4个方面力求还学生以数学思维的“自然”形象,使学生能用数学的方式认识问题和解决问题,真正提升学生的解题能力和数学素养.

关键词:数学解题;数学本质;数学思维

中图分类号:0123.1

文献标识码:A

文章编号:1003-6407(2017)05-04-05

0 引言

数学离不开解题,著名数学家波利亚曾经说过:“掌握数学就意味着善于解题”^[1].罗增儒教授说:“数学学习中发生数学的地方无一例外地充满着解题活动.”解题教学不仅是“题型+技巧”,更要注重解题思想和方法的渗透,暴露思维过程,还学生以数学是“自然”的形象,真正提升学生的解题能力.

普通高中课程标准实验教科书的主编寄语指出:数学是自然的,数学教材内容都是在人类长期的实践中经过千锤百炼的数学精华和基础,如果感觉不自然的概念,那么只要想一下它的背景、它的形成过程和应用,以及与其他概念的联系,都是水到渠成的、合情合理的.

教师应该给引导学生认识到:数学是一门科学,数学是有规律可循的;数学概念、数学方法和数学思想的起源与发展都是自然的;数学问题的解决

也应是自然的、水到渠成的过程,并不总是依靠一时的灵感,如果学生都能合情合理地去思考、分析,就能学会怎样解题.自然的解题方法,就应该在教学中有体现,让学生从自然的解题过程中,慢慢体会数学的自然性,从而提高数学的解题能力.数学是思维的科学,具有追求最大限度的一般性模式特别是一般性算法的倾向,数学的自然性主要体现在数学内容的自然性和数学思维的自然性上.

《新课标》指出:在数学教学中要强调对数学本质的认识,否则会将生动活泼的数学思维淹没在形式化的海洋里.因此在解题教学中要高度重视方法的本质探究,揭示方法的本质,找准问题的突破口,让数学解题思维回归自然,让学生真正学会独立分析和解题,从而提升学生的数学核心素养.

1 策略研究

1.1 运用概念思考,让思维回归“自然”

(上接第3页)

4.3 创新意识时时常问

维系创新意识运行的生命是问题,问题是思维的起点.刘绍学先生语:“问题使我们的学习更主动、更生动、更富探索性.要善于提问,学会提问,‘凡事问个为什么’,用自己的问题和别人的问题带动自己的学习.”让问题始终伴随着创新思维的发展,如何让学生学会问?提出“好”的问题?学起源思,思起源疑.首先,要鼓励学生敢于质疑.在

想每一件事时要有疑:疑大与小,疑新与老,疑异与同,疑优与劣,疑静与动,疑有与无.其次,要引导学生善于发问.在做每一件事时要会问:是什么?做什么?会什么?为什么?怎么做?还有什么?经常这样疑和问,不仅把当前的问题弄明白了,而且把相关的问题加深了理解.长期下去,不仅可以提高思维能力,还可以提升思维品质,养成科学的思维态度,最后不知不觉发现自己聪明起来了,为继续学习打下扎实的基础,创新热情也愈来愈高.

^{*} 收文日期:2016-11-23;修订日期:2016-12-30

作者简介:章林海(1972-),男,浙江建德人,中学高级教师.研究方向:数学教育.