

江苏省仪征中学 2022-2023 学年度第一学期高一数学周练 (12)

班级_____ 学号_____ 姓名_____ 评价_____

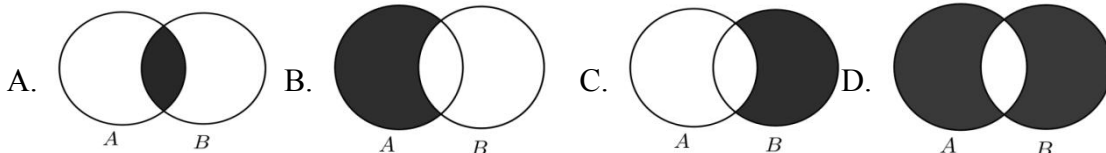
2022.12.24

一、单选题 (本大题共 8 小题, 共 40.0 分。在每小题列出的选项中, 选出符合题目的一项)

1. 命题“ $\forall x > 1, x^2 - x > 0$ ”的否定是 () 故选 C.

A. $\exists x \leq 1, x^2 - x > 0$; B. $\forall x > 1, x^2 - x \leq 0$; C. $\exists x > 1, x^2 - x \leq 0$; D. $\forall x \leq 1, x^2 - x > 0$

2. 集合 $A = \{0, 1, 2, 4, 8\}$, $B = \{x | 2^x \in A\}$, 将集合 A, B 分别用如图中的两个圆表示, 则圆中阴影部分表示的集合中元素个数恰好为 2 的是 ()



解: 集合 $A = \{0, 1, 2, 4, 8\}$, $B = \{x | 2^x \in A\} = \{0, 1, 2, 3\}$, $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 8\}$, A 中阴影部分表示的集合为 $A \cap B$, 即 $\{0, 1, 2\}$, 故 A 错误; B 中阴影部分表示的集合为属于 A 但不属于 B 的元素构成, 即 $\{4, 8\}$, 故 B 正确; C 中阴影部分表示的集合为属于 B 但不属于 A 的元素构成, 即 $\{3\}$, 故 C 错误; D 中阴影部分表示的集合为属于 $A \cup B$ 但不属于 $A \cap B$ 的元素构成, 即 $\{3, 4, 8\}$, 故 D 错误.

3. 已知函数 $y = a^{x+3} + 3$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象恒过点 P , 若角 α 的终边经过点 P , 则 $\cos \alpha =$ ()

A. $\frac{3}{5}$ B. $-\frac{3}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $-\frac{4}{5}$

解: 令 $x + 3 = 0$, 求得 $x = -3$, $y = 4$, 函数 $y = a^{x+3} + 3$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象恒过点 $P(-3, 4)$, 角 α 的终边经过点 P , 则 $\cos \alpha = \frac{-3}{\sqrt{9+16}} = -\frac{3}{5}$, 故选: B.

4. 已知函数 $f(x)$ 为 R 上的偶函数, 对任意 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, 均有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$ 成立, 若 $a = f(\sqrt{2})$, $b = f(3^{\frac{1}{3}})$, $c = f(-\log_2 5)$, 则 a, b, c 的大小关系是 ()

A. $c < b < a$ B. $b < a < c$ C. $a < b < c$ D. $a < c < b$

解: 对任意 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, 均有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$, 即此时函数 $f(x)$ 为减函数,

$\because f(x)$ 是偶函数, $\therefore$ 当 $x > 0$ 时, $f(x)$ 为增函数, $(\sqrt{2})^6 = 8$, $(3^{\frac{1}{3}})^6 = 9$, $2 < \log_2 5 < 3$

$(-\log_2 5)^6 > 9$, 则 $0 < (\sqrt{2})^6 < (3^{\frac{1}{3}})^6 < (-\log_2 5)^6$ 即 $a < b < c$, 故选: C.

5. 荀子《劝学》中说: “不积跬步, 无以至千里; 不积小流, 无以成江海.” 所以说学习是日积月累的过程, 每天进步一点点, 前进不止一小点. 我们可以把 $(1 + 1\%)^{365}$ 看作是每天的 “进步” 率都是 1%, 一年后是 $1.01^{365} \approx 37.7834$; 而把 $(1 - 1\%)^{365}$ 看作是每天 “退步” 率都是 1%, 一年后是 $0.99^{365} \approx 0.0255$. 若 “进步” 的值是 “退步” 的值的 100 倍, 大约经过 (参考数据: $\lg 101 \approx 2.0043$, $\lg 99 \approx 1.9956$) 天. ()

A. 200 天 B. 210 天 C. 220 天 D. 230 天

解: 设经过 x 天 “进步” 的值是 “退步” 的值的 100 倍, 则 $100 \times 0.99^x = 1.01^x$ 即 $(\frac{1.01}{0.99})^x = 100$, $\therefore x =$

$\log_{\frac{1.01}{0.99}} 100 = \frac{\lg 100}{\lg \frac{1.01}{0.99}} = \frac{\lg 100}{\lg \frac{101}{99}} = \frac{2}{\lg 101 - \lg 99} \approx \frac{2}{2.0043 - 1.9956} = \frac{2}{0.0087} \approx 230$. 故选 D.

6. 设 $a > 0$, $b > 0$, 且不等式 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{k}{a+b} \geq 0$ 恒成立, 则实数 k 的取值范围是 ()

A. $k \geq 0$ B. $k \leq 0$ C. $k \geq -3$ D. $k \geq -4$

解: 由题意知: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{k}{a+b} \geq 0$, $a > 0$, $b > 0$, $\therefore a + b > 0$, 即: $\frac{a+b}{ab} + \frac{k}{a+b} \geq 0$, 即: $\frac{k}{a+b} \geq -\frac{a+b}{ab}$,

不等式两边同时乘以 $a + b$ 得: $k \geq -\frac{(a+b)^2}{ab}$, 要使 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{k}{a+b} \geq 0$ 恒成立, 则 $k \geq -\frac{(a+b)^2}{ab}$ 恒成立,

则 $k \geq (-\frac{(a+b)^2}{ab})_{\max}$, 又: $-\frac{(a+b)^2}{ab} = -\frac{a^2 + 2ab + b^2}{ab} = -(\frac{a}{b} + 2 + \frac{b}{a}) \leq -(2 + 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}}) = -4$, 当且仅当 $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$,

即 $a = b$ 时取等号, $\therefore -\frac{(a+b)^2}{ab}$ 的最大值为 -4 , $\therefore k \geq -4$. 故选 D.

7. 把函数 $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 的图像向左平移 φ ($0 < \varphi < \pi$) 个单位可以得到函数 $g(x)$ 的图像, 若 $g(x)$ 是偶函数, 则 φ 的值为 ()

A. $\frac{5\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{5\pi}{12}$ 或 $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{5\pi}{12}$ 或 $\frac{11\pi}{12}$

解：把函数 $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 的图象向左平移 $\varphi (0 < \varphi < \pi)$ 个单位，可以得到函数 $g(x) = \sin(2x + 2\varphi - \frac{\pi}{3})$ 的图象，若 $g(x)$ 是偶函数，则 $2\varphi - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ， $\therefore$ 分别令 $k = 0, k = 1$ ，可得 $\varphi = \frac{5\pi}{12}$ ，或 $\varphi = \frac{11\pi}{12}$ ，故选：D.

8. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, |\varphi| \leq \frac{\pi}{2})$ ， $x = -\frac{\pi}{8}$ 是函数 $f(x)$ 的一个零点， $x = \frac{\pi}{8}$ 是函数 $f(x)$ 的一条对称轴，若 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{4})$ 上单调，则 ω 的最大值是 ()

- A. 14 B. 16 C. 18 D. 20

解：设函数 $f(x)$ 的最小正周期为 T ，因为 $x = -\frac{\pi}{8}$ 是函数 $f(x)$ 的一个零点， $x = \frac{\pi}{8}$ 是函数 $f(x)$ 的一条对称轴，则 $\frac{2n+1}{4}T = \frac{\pi}{8} - (-\frac{\pi}{8}) = \frac{\pi}{4}$ ，其中 $n \in \mathbb{N}$ ，所以， $T = \frac{\pi}{2n+1} = \frac{2\pi}{\omega}$ ， $\therefore \omega = 4n + 2$ ，因为函数 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{4})$ 上单调，则 $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{5} \leq \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$ ，所以， $\omega \leq 20$ 。所以， ω 的可能取值有：2、6、10、14、18。

(i) 当 $\omega = 18$ 时， $f(x) = \sin(18x + \varphi)$ ， $f(-\frac{\pi}{8}) = \sin(-\frac{9\pi}{4} + \varphi) = 0$ ，所以， $\varphi - \frac{9\pi}{4} = k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，则 $\varphi = k\pi + \frac{9\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$ ， $\therefore -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ， $\therefore \varphi = \frac{\pi}{4}$ ，所以， $f(x) = \sin(18x + \frac{\pi}{4})$ ，当 $\frac{\pi}{5} < x < \frac{\pi}{4}$ 时， $\frac{77\pi}{20} < 18x + \frac{\pi}{4} < \frac{19\pi}{4}$ ，所以，函数 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{4})$ 上不单调，不合乎题意；(ii) 当 $\omega = 14$ 时， $f(x) = \sin(14x + \varphi)$ ， $f(-\frac{\pi}{8}) = \sin(-\frac{7\pi}{4} + \varphi) = 0$ ，所以， $\varphi - \frac{7\pi}{4} = k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，则 $\varphi = k\pi + \frac{7\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$ ， $\therefore -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ， $\therefore \varphi = -\frac{\pi}{4}$ ，所以， $f(x) = \sin(14x - \frac{\pi}{4})$ ，当 $\frac{\pi}{5} < x < \frac{\pi}{4}$ 时， $\frac{51\pi}{20} < 14x - \frac{\pi}{4} < \frac{13\pi}{4}$ ，所以，函数 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{4})$ 上单调递减，合乎题意。因此， ω 的最大值为 14。故选：A.

二、多选题（本大题共 4 小题，共 20.0 分。在每小题有多项符合题目要求）

9. 已知集合 $P = \{x | x^2 - 8x - 20 \leq 0\}$ ， $S = \{x | 1 - m \leq x \leq 1 + m\}$ 。若 $x \in P$ 是 $x \in S$ 的必要条件，则实数 m 的取值可以是 ()

- A. -1 B. 1 C. 3 D. 5

解：由题意知，集合 $P = \{x | x^2 - 8x - 20 \leq 0\} = [-2, 10]$ ，集合 $S = \{x | 1 - m \leq x \leq 1 + m\}$ ，因为 $x \in P$ 是 $x \in S$ 的必要条件，所以 $S \subseteq P$ 。当集合 S 为空集时，则 $1 - m > 1 + m$ ，即 $m < 0$ ；当集合 S 不为空集时，则 $\begin{cases} m \geq 0 \\ 1 - m \geq -2 \\ 1 + m \leq 10 \end{cases}$ ，解得 $0 \leq m \leq 3$ 。综上： m 的范围是 $(-\infty, 3]$ 。故 m 的值可以是 -1, 1, 3。故选：ABC.

10. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, 0 < \varphi < \pi)$ ， $f(x)$ 图像一个最高点是 $A(\frac{\pi}{3}, 2)$ ，距离点 A 最近的对称中心坐标为 $(\frac{\pi}{4}, 0)$ ，则下列说法正确的有 ()

- A. ω 的值是 6； B. $x \in (-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12})$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增；
C. $x = \frac{13\pi}{12}$ 时函数 $f(x)$ 图像的一条对称轴；

D. $f(x)$ 的图像向左平移 $\varphi (\varphi > 0)$ 个单位后得到 $g(x)$ 图像，若 $g(x)$ 是偶函数，则 φ 的最小值是 $\frac{\pi}{6}$

解：由题意可知， $A = \pm 2$ ， $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}T$ ，即 $T = \frac{\pi}{3}$ ，其中 T 为 $f(x)$ 的最小正周期，又因为 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ，所以 $\omega = 6$ ，故 A 正确；当 $A = 2$ 时， $f(\frac{\pi}{3}) = 2\sin(6 \times \frac{\pi}{3} + \varphi) = 2$ ，由 $0 < \varphi < \pi$ ，可得 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ，此时 $f(x) = 2\sin(6x + \frac{\pi}{2}) = 2\cos 6x$ ， $f(\frac{\pi}{4}) = 2\cos \frac{3\pi}{2} = 0$ ，满足题意；当 $A = -2$ 时， $f(\frac{\pi}{3}) = -2\sin(6 \times \frac{\pi}{3} + \varphi) = 2$ ，由 $0 < \varphi < \pi$ ，则 φ 无解，综上所述， $f(x) = 2\cos 6x$ ，从而 $f(x)$ 是一个偶函数，故 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12})$ 上不单调，故 B 错误；又因为 $f(\frac{13\pi}{12}) = 2\cos(6 \times \frac{13\pi}{12}) = 0 \neq A = 2$ ，所以 $x = \frac{13\pi}{12}$ 不是函数 $f(x)$ 图像的一条对称轴，故 C 错误；对于选项 D：由题意可得， $g(x) = 2\cos 6(x + \varphi) = 2\cos(6x + 6\varphi)$ ，若 $g(x)$ 是偶函数，则 $6\varphi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，即 $\varphi = \frac{1}{6}k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，又因为 $\varphi > 0$ ，所以 φ 的最小值是 $\frac{\pi}{6}$ ，此时 $k = 1$ ，故 D 正确。故选：AD.

11. 下列命题中正确的是 ()

- A. $\frac{200\pi}{9}$ 和 1711° 均是第一象限角
B. 若 $\sin \alpha \cdot \tan \alpha > 0$ 且 $\cos \alpha \cdot \tan \alpha < 0$ ，则角 $\frac{\alpha}{2}$ 为第二或第四象限角
C. 若某扇形的面积为 2.5cm^2 ，半径为 $r\text{cm}$ ，弧长 l 满足 $2r + l = 7\text{cm}$ ，则该扇形圆心角的弧度数是 $\frac{4}{5}$
D. 若 $\theta \in (0, \pi)$ ，且角 θ 与角 7θ 的终边相同，则 θ 的值是 $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$

解：对于 A， $\frac{200\pi}{9} = 22\pi + \frac{2\pi}{9}$ ，因为 $\frac{2\pi}{9}$ 为第一象限角，所以 $\frac{200\pi}{9}$ 为第一象限角，由于 $1711^\circ = 4 \times 360^\circ + 271^\circ$ ，因为 271° 不是第一象限角，所以 1711° 不是第一象限角，故 A 错误；对于 B 选项， $\therefore \sin \alpha \cdot \tan \alpha > 0$ ，

$\cos \alpha \cdot \tan \alpha < 0$, 则角 α 为第四象限角, 则 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 则 $-\frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{\alpha}{2} < k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 为第二或第四象限角, B 选项正确; 对于 C , 可得 $\begin{cases} l+2r=7 \\ \frac{1}{2}lr=2.5 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} r=\frac{5}{2} \\ l=2 \end{cases}$, 或 $\begin{cases} r=1 \\ l=5 \end{cases}$, 所以圆心角的弧度数为 $\frac{l}{r}=\frac{4}{5}$ 或 5 , 故 C 错误; 对于 D , 因为角 θ 的与角 7θ 的终边相同, 所以 $7\theta = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 所以 $\theta = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$, 令 $0 < \frac{k\pi}{3} < \pi, k \in \mathbb{Z}$, 所以 $k=1, 2$, 所以 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$, 故 D 正确. 故选 BD

12. 已知函数 $f(x) = 1 - \frac{2}{2^{\sin x} + 1} (x \in \mathbb{R})$, 下列说法正确的是. ()

A. 函数 $f(x)$ 是奇函数

B. 函数 $f(x)$ 的值域为 $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

C. 函数 $f(x)$ 是周期为 π 的周期函数

D. 函数 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ 上单调递减

解: 定义域为 $\mathbb{R}$, $f(-x) = 1 - \frac{2}{2^{-\sin x} + 1} = 1 - \frac{2}{\frac{1}{2^{\sin x}} + 1} = 1 - \frac{2 \cdot 2^{\sin x}}{2^{\sin x} + 1} = 1 - \frac{2 \cdot (2^{\sin x} + 1) - 2}{2^{\sin x} + 1} = -1 + \frac{2}{2^{\sin x} + 1} = -f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 是奇函数, 故 A 正确; $-\frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq 2^{\sin x} \leq 2 \Rightarrow \frac{3}{2} \leq 2^{\sin x} + 1 \leq 3 \Rightarrow \frac{2}{3} \leq \frac{2}{2^{\sin x} + 1} \leq \frac{4}{3}, \Rightarrow -\frac{4}{3} \leq -\frac{2}{2^{\sin x} + 1} \leq -\frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq 1 - \frac{2}{2^{\sin x} + 1} \leq \frac{1}{3}$, 所以函数 $f(x)$ 的值域为 $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, 故 B 正确; $f(x + \pi) = 1 - \frac{2}{2^{\sin(x+\pi)} + 1} = 1 - \frac{2}{2^{-\sin x} + 1} = -f(x) \neq f(x)$, 所以 C 错误; $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, $y = \sin x$ 单调递减, $y = 2^{\sin x} + 1$ 单调递减, $y = \frac{2}{2^{\sin x} + 1}$ 单调递增, $f(x) = 1 - \frac{2}{2^{\sin x} + 1} (x \in \mathbb{R})$ 单调递减, 所以函数 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ 上单调递减, 故 D 正确; 故选 ABD .

三、填空题 (本大题共 4 小题, 共 20.0 分)

13. 已知 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - ax + 3a)$ 在区间 $(2, +\infty)$ 上是减函数, 则实数 a 的取值范围是_____.

解: 令 $t = x^2 - ax + 3a$, 则由函数 $f(x) = g(t) = \log_{\frac{1}{2}} t$ 在区间 $(2, +\infty)$ 上为减函数, 可得函数 t 在区间 $[2, +\infty)$ 上为增函数且 $t(2) \geq 0$, 故有 $\begin{cases} \frac{a}{2} \leq 2 \\ t(2) = 4 - 2a + 3a \geq 0 \end{cases}$, 解得 $-4 \leq a \leq 4$, 故实数 a 的取值范围是 $-4 \leq a \leq 4$.

故答案为: $-4 \leq a \leq 4$.

14. $\frac{1}{\sin^2 \alpha + 1} + \frac{4}{\cos^2 \alpha + 1}$ 的最小值为_____.

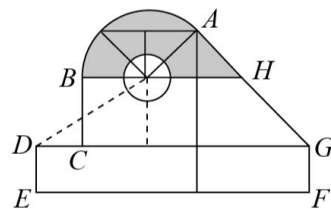
解: 因为 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \sin^2 \alpha + 1 > 0, \cos^2 \alpha + 1 > 0$

所以 $\frac{1}{\sin^2 \alpha + 1} + \frac{4}{\cos^2 \alpha + 1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha + 1} + \frac{4}{\cos^2 \alpha + 1} \right) (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha + 1} + \frac{4}{\cos^2 \alpha + 1} \right) [(\sin^2 \alpha + 1) + (\cos^2 \alpha + 1)] = \frac{1}{3} \left(1 + 4 + \frac{\cos^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha + 1} + \frac{4(\sin^2 \alpha + 1)}{\cos^2 \alpha + 1} \right) \geq \frac{1}{3} \left(5 + 2 \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha + 1} \cdot \frac{4(\sin^2 \alpha + 1)}{\cos^2 \alpha + 1}} \right) = 3$ 当且仅当 $\frac{\cos^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha + 1} = \frac{4(\sin^2 \alpha + 1)}{\cos^2 \alpha + 1}$ 即 $\sin^2 \alpha = 0, \cos^2 \alpha = 1$ 时取等号, 故答案为 3.

15. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的单调函数 $f(x)$ 满足: $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 若 $F(x) = f(\sin x) + f(\sin x + \cos^2 x - 3)$ 在 $(0, \pi)$ 上有零点, 则 a 的取值范围是_____

解: ①令 $x = y = 0$, 则 $f(0) = 2f(0)$, 则 $f(0) = 0$; 再令 $y = -x$, 则 $f(x-x) = f(x) + f(-x) = 0$, 且 $f(x)$ 定义域为 $\mathbb{R}$, 关于原点对称, $\therefore f(x)$ 是奇函数. ② $F(x) = f(\sin x) + f(\sin x + \cos^2 x - 3)$ 在 $(0, \pi)$ 上有零点, $\therefore f(\sin x) + f(\sin x + \cos^2 x - 3) = 0$ 在 $(0, \pi)$ 上有解, $\therefore f(\sin x) = -f(\sin x + \cos^2 x - 3) = f(-\sin x - \cos^2 x + 3)$ 在 $(0, \pi)$ 上有解, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的单调函数, $\therefore \sin x = -\sin x - \cos^2 x + 3$ 在 $(0, \pi)$ 上有解. $\therefore x \in (0, \pi), \therefore \sin x \neq 0, \therefore a = \frac{-\sin x - \cos^2 x + 3}{\sin x} = \sin x + \frac{2}{\sin x} - 1$, 令 $t = \sin x, t \in (0, 1]$, 则 $a = t + \frac{2}{t} - 1$, 令 $y = t + \frac{2}{t}, t \in (0, 1]$, 则根据对勾函数性质可知 $y_{\min} = 3, \therefore y \geq 3$, 从而 $a \geq 2$. 故答案为 $[2, +\infty)$.

16. 某中学开展劳动实习, 学生加工制作零件, 零件的截面如图所示, O 为圆孔及轮廓圆弧 AB 所在圆的圆心, A 是圆弧 AB 与直线 AG 的切点, B 是圆弧 AB 与直线 BC 的切点, 四边形 $DEFG$ 为矩形, $BC \perp DG$, 垂足为 C , $\tan \angle ODC = \frac{3}{5}$, $BH \parallel DG$, $EF = 12\text{cm}$, $DE = 2\text{cm}$, A 到直线 DE 和 EF 的距离均为 7cm , 圆孔半径为 1cm , 则图中阴影部分的面积为_____ cm^2 .



解: 设上面的大圆弧的半径为 x , 由题意中的长度关系易知 $\angle AGD = 45^\circ$, 同理 $\angle AHO = 45^\circ$, 可得 $\triangle AOH$ 为等腰直角三角形, 可得 $OJ = AJ = \frac{\sqrt{2}}{2}x$, $OL = JK = 5 - \frac{\sqrt{2}}{2}x$, $DL = DK - LK = DK - OJ = 7 - \frac{\sqrt{2}}{2}x$,

其中 $\tan \angle ODC = \frac{OL}{DL} = \frac{3}{5}$, 可得 $\frac{5 - \frac{\sqrt{2}}{2}x}{7 - \frac{\sqrt{2}}{2}x} = \frac{3}{5}$, 解得 $x = 2\sqrt{2}$, $S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形AOB}} + S_{\triangle AOH} - \frac{1}{2}S_{\text{圆O}} = \frac{1}{2} \times \frac{3\pi}{4} \times$

$(2\sqrt{2})^2 + \frac{1}{2} \times (2\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2}\pi = (\frac{5}{2}\pi + 4)cm^2$, 故答案为 $\frac{5}{2}\pi + 4$.

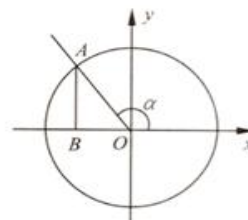
四、解答题 (本大题共 7 小题, 共 84.0 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

17. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 钝角 α 的始边与 x 轴的非负半轴重合, 终边与半径为 3 的圆相交于点 A , 过点 A 作 x 轴的垂线, 垂足为点 B , $OB = 2$.

(1) 求 $\tan \alpha$ 的值; (2) 求 $\frac{2\sin(\alpha - \frac{3\pi}{2}) + \sin(\pi + \alpha)}{\cos(\alpha + 5\pi)}$ 的值.

解: (1) 由题意可得 $OA = 3$, $OB = 2$, $AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = \sqrt{5}$, 可得 $A(-2, \sqrt{5})$, 可得 $\tan \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

(2) 由 (1) 可得 $\tan \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\frac{2\sin(\alpha - \frac{3\pi}{2}) + \sin(\pi + \alpha)}{\cos(\alpha + 5\pi)} = \frac{2\cos \alpha - \sin \alpha}{-\cos \alpha} = \frac{2 - \tan \alpha}{-1} = -\frac{4 + \sqrt{5}}{2}$.



18. 已知 $1 < a < b < c$, 且 $\log_a b + \log_b c = \frac{1}{2} + \log_a c$.

(1) 若 $c = a^3$, 求 $\log_a b$ 的值; (2) 求 $\log_a b + \log_b c$ 的最小值.

解: (1) 由 $c = a^3$, $\log_a b + \log_b c = \frac{1}{2} + \log_a c$, 得 $\log_a b + \log_b a^3 = \frac{1}{2} + \log_a a^3$, 即 $\log_a b + \frac{3}{\log_a b} = \frac{7}{2}$, 所以 $2(\log_a b)^2 - 7\log_a b + 6 = 0$, 解得 $\log_a b = 2$ 或 $\frac{3}{2}$, 又 $1 < a < b < c = a^3$, 所以 $1 < \log_a b < 3$, 即 $\log_a b = 2$ 或 $\frac{3}{2}$ 满足题意.

(2) 因为 $1 < a < b < c$, 所以 $\log_a b > 1$, $\log_b c > 1$, $\log_a c > 1$, 所以 $\frac{1}{2} + \log_a c = \log_a b + \log_b c \geq 2\sqrt{\log_a b \cdot \log_b c}$, 因此 $\frac{1}{2} + \log_a c \geq 2\sqrt{\log_a c}$, 即 $(\log_a c)^2 - 3\log_a c + \frac{1}{4} \geq 0$, 解得 $\log_a c \geq \frac{3}{2} + \sqrt{2}$ 或 $\log_a c \leq \frac{3}{2} - \sqrt{2}$, 因为 $\log_a c > 1$, 所以 $\log_a c \geq \frac{3}{2} + \sqrt{2}$, 因此 $\log_a b + \log_b c = \frac{1}{2} + \log_a c \geq 2 + \sqrt{2}$, 当且仅当 $\log_a b = \log_b c = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号, 所以 $\log_a b + \log_b c$ 的最小值为 $2 + \sqrt{2}$.

19. 扬州市某研学基地, 因地制宜划出一片区域, 打造成“生态水果特色区”. 经调研发现: 某水果树的单株产量 W (单位: 千克) 与施用肥料 x (单位: 千克) 满足如下关系: $W(x) = \begin{cases} 2(x^2 + 17), & 0 \leq x \leq 2 \\ 50 - \frac{8}{x-1}, & 2 < x \leq 5 \end{cases}$, 且单株施用肥料及其它成本总投入为 $20x + 10$ 元. 已知这种水果的市场售价大约为 10 元/千克, 且销路畅通供不应求. 记该水果树的单株利润为 $f(x)$ (单位: 元).

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 当施用肥料为多少千克时, 该水果树的单株利润最大? 最大利润是多少?

解: (1) 由已知 $f(x) = 10W(x) - (20x + 10)$, 又 $W(x) = \begin{cases} 2(x^2 + 17), & 0 \leq x \leq 2 \\ 50 - \frac{8}{x-1}, & 2 < x \leq 5 \end{cases}$,

$\therefore f(x) = \begin{cases} 20(x^2 + 17) - (20x + 10), & 0 \leq x \leq 2 \\ 500 - \frac{80}{x-1} - (20x + 10), & 2 < x \leq 5 \end{cases}$, 整理得: $f(x) = \begin{cases} 20x^2 - 20x + 330, & 0 \leq x \leq 2 \\ 490 - \frac{80}{x-1} - 20x, & 2 < x \leq 5 \end{cases}$;

(2) 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, $f(x) = 20x^2 - 20x + 330 = 20(x - \frac{1}{2})^2 + 325$, $\therefore$ 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, $f(x) \leq f(2) = 370$; 当 $2 < x \leq 5$ 时, $f(x) = 490 - \frac{80}{x-1} - 20x = 490 - [\frac{80}{x-1} + 20(x-1) + 20] = 470 - [\frac{80}{x-1} + 20(x-1)] \leq 470 - 2\sqrt{\frac{80}{x-1} \cdot 20(x-1)} = 390$, 当且仅当 $\frac{80}{x-1} = 20(x-1)$, 即 $x = 3$ 时等号成立, $f(x)_{\max} = 390$, $\therefore 370 < 390$, $\therefore f(x)$ 的最大值为 390. 故当施用肥料为 3 千克时, 该水果树的单株利润最大, 最大利润是 390 元.

20. 已知函数 $f(x) = 2\cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$), 其图象中相邻的两个对称中心的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 再从条件(1), 条件(2), 条件(3)这三个条件中选择一个作为已知. 条件(1): 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{\pi}{3}$ 对称; 条件(2): 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{12}, 0)$ 对称; 条件(3): 对任意实数 $x, f(x) \leq |f(-\frac{5\pi}{6})|$ 恒成立.

(1) 求出 $f(x)$ 的解析式;

(2) 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到曲线 $y = g(x)$, 若方程 $g(x) = a$ 在 $[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$ 上有两根 α, β , 求 $\alpha + \beta$ 的值及 a 的取值范围.

解: (1) 因为函数 $f(x) = 2\cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 图象中相邻的两个对称中心的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 所以 $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$, 即周期 $T = \pi$, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$, 所以 $f(x) = 2\cos(2x + \varphi)$.

若选择①: 因为函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{\pi}{3}$ 轴对称, 所以 $2(-\frac{\pi}{3}) + \varphi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 即 $\varphi = k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$, 因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$, 所以函数 $y = f(x)$ 的解析式为 $f(x) = 2\cos(2x - \frac{\pi}{3})$.

若选择②, 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{12}, 0)$ 对称, 所以 $f(-\frac{\pi}{12}) = 2\cos[2 \times (-\frac{\pi}{12}) + \varphi] = 0$, 所以 $2(-\frac{\pi}{12}) + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 即 $\varphi = k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$, 因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$, 所以函数 $v = f(x)$ 的解析式为 $f(x) = 2\cos(2x - \frac{\pi}{3})$.

若选③: 对任意实数 $x, f(x) \leq |f(-\frac{5\pi}{6})|$ 恒成立, 所以 $2(-\frac{5\pi}{6}) + \varphi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 即 $\varphi = k\pi + \frac{5\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$, 因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$, 所以函数 $y = f(x)$ 的解析式为 $f(x) = 2\cos(2x - \frac{\pi}{3})$.

(2) 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到曲线 $y = g(x)$, 所以 $g(x) = 2\cos(2x - \frac{\pi}{6})$,

当 $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$ 时, $2x - \frac{\pi}{6} \in [\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}]$, 当 $2x - \frac{\pi}{6} = \pi$ 时, $g(x)$ 有最小值 -2 且关于 $x = \frac{7\pi}{12}$ 对称, 所以 $\alpha + \beta = 2 \times \frac{7\pi}{12} = \frac{7\pi}{6}$, 因为 $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, f(\frac{2\pi}{3}) = -\sqrt{3}$, 所以 $-2 < a \leq -\sqrt{3}$, 即 a 的取值范围为 $(-2, -\sqrt{3}]$.

21. 设函数 $f(x) = ka^x - a^{-x}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 是奇函数.

(1) 求常数 k 的值;

(2) 若 $a > 1$, 试判断函数 $f(x)$ 的单调性, 并加以证明;

(3) 若已知 $f(1) = \frac{8}{3}$, 且函数 $g(x) = a^{2x} + a^{-2x} - 2mf(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上的最小值为 -2 , 求实数 m 的值.

解: (1) 函数 $f(x) = ka^x - a^{-x}$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, $\because$ 函数 $f(x) = ka^x - a^{-x}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 是奇函数,

$\therefore f(0) = k - 1 = 0, \therefore k = 1$;

(2) 函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为单调增函数. 证明: $f(x) = a^x - a^{-x}$, 任取 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 且 $x_1 < x_2$,

$$f(x_1) - f(x_2) = (a^{x_1} - a^{-x_1}) - (a^{x_2} - a^{-x_2}) = (a^{x_1} - a^{x_2}) + (\frac{1}{a^{x_2}} - \frac{1}{a^{x_1}}) = (a^{x_1} - a^{x_2}) + \frac{a^{x_1} - a^{x_2}}{a^{x_1}a^{x_2}} =$$

$$(a^{x_1} - a^{x_2}) \left(1 + \frac{1}{a^{x_1}a^{x_2}}\right). \because a > 1, x_1 < x_2, \therefore 0 < a^{x_1} < a^{x_2}, \therefore f(x_1) - f(x_2) < 0, \text{ 即 } f(x_1) < f(x_2),$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为单调增函数;

(3) $\because f(1) = \frac{8}{3}, \therefore a - a^{-1} = \frac{8}{3}$, 解得 $a = 3$ 或 $a = -\frac{1}{3}$. $\because a > 0$ 且 $a \neq 1, \therefore a = 3, \therefore g(x) = 3^{2x} + 3^{-2x} - 2m(3^x - 3^{-x}) = (3^x - 3^{-x})^2 - 2m(3^x - 3^{-x}) + 2(x \geq 1)$. 令 $t = 3^x - 3^{-x}$, 由(2)可知函数 $t = 3^x - 3^{-x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $t \geq \frac{8}{3}$, 则 $y = t^2 - 2mt + 2 = (t - m)^2 - m^2 + 2, (t \geq \frac{8}{3})$, 当 $m \geq \frac{8}{3}$ 时, 当 $t = m$ 时, 函数取最小值, $y_{\min} = -m^2 + 2 = -2$, 解得 $m = \pm 2$, 与 $m \geq \frac{8}{3}$ 矛盾, 舍去; 当 $m < \frac{8}{3}$ 时, 则函数 $y = t^2 - 2mt + 2$ 在 $[\frac{8}{3}, +\infty)$ 上单调递增, 所以, 当 $t = \frac{8}{3}$ 时, 函数取最小值, $y_{\min} = (\frac{8}{3})^2 - 2m \times \frac{8}{3} + 2 = -2$,

解得 $m = \frac{25}{12}$, 综上可得 $m = \frac{25}{12}$.

22. 已知函数 $f(x) = 4 - m\sin x - 3\cos^2 x$ ($m \in \mathbb{R}$).

(1) 若关于 x 的方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(0, \pi)$ 上有三个不同解 x_1, x_2, x_3 , 求 m 与 $x_1 + x_2 + x_3$ 的值;

(2) 对任意 $x \in [-\frac{\pi}{6}, \pi]$, 都有 $f(x) > 0$, 求 m 的取值范围.

解: (1) $f(x) = 4 - m\sin x - 3\cos^2 x = 3\sin^2 x - m\sin x + 1$, 设 $t = \sin x$, 因为 $x \in (0, \pi)$, 所以 $t \in (0, 1]$, 由 $f(x) = 0$ 得, $3t^2 - mt + 1 = 0$, 因为 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 有且只有三个零点, 所以方程 $3t^2 - mt + 1 = 0$ 中存在两根 t_1, t_2 , 且其中一根为 1, 另一根在区间 $(0, 1)$ 内, 不妨设 $t_1 = 1$, 则 $3 \times 1^2 - m + 1 = 0$, 解得 $m = 4$, 此时 $t_2 = \frac{1}{3}$ 适合题意. 所以 $m = 4$, 由 $\sin x = 1$ 得, $x_1 = \frac{\pi}{2}$; 由 $\sin x = \frac{1}{3}$ 得, $x_2 + x_3 = \pi$, 所以 $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{3\pi}{2}$.

(2) 当 $x \in [-\frac{\pi}{6}, \pi]$ 时, $t \in [-\frac{1}{2}, 1]$, $f(x) > 0$ 等价于 $3t^2 - mt + 1 > 0$, 设 $g(t) = 3t^2 - mt + 1, t \in [-\frac{1}{2}, 1]$, 所以 $g(t)_{\min} > 0$, ①当 $\frac{m}{6} < -\frac{1}{2}$, 即 $m < -3$ 时, $g(t)$ 在 $[-\frac{1}{2}, 1]$ 上递增, $g(t)_{\min} = g(-\frac{1}{2}) = \frac{m}{2} + \frac{7}{4}$, 所以 $\frac{m}{2} + \frac{7}{4} > 0, m > -\frac{7}{2}$, 又 $m < -3$, 所以 $-\frac{7}{2} < m < -3$, ②当 $-\frac{1}{2} \leq \frac{m}{6} \leq 1$, 即 $-3 \leq m \leq 6$ 时, $g(t)$ 在 $[-\frac{1}{2}, \frac{m}{6}]$ 上递减, 在 $[\frac{m}{6}, 1]$ 上递增, 所以 $g(t)_{\min} = g(\frac{m}{6}) = 1 - \frac{m^2}{12}$, 所以 $1 - \frac{m^2}{12} > 0, m^2 < 12$, 又 $-3 \leq m \leq 6$, 所以 $-3 \leq m < 2\sqrt{3}$. ③当 $\frac{m}{6} > 1$, 即 $m > 6$ 时, $g(t)$ 在 $[-\frac{1}{2}, 1]$ 上递减, $g(t)_{\min} = g(1) = 4 - m$, 所以 $4 - m > 0, m < 4$, 又 $m > 6$, 所以 m 无解. 综上, 实数 m 的取值范围是 $(-\frac{7}{2}, 2\sqrt{3})$.