

编者按 为密切编辑部与中学的联系,本刊编委第27次“走进课堂”,于2021年10月25日赴江苏省太仓高级中学观课议课。江苏省太仓高级中学建校于1907年,“废科举,力行新学”,初名为太仓州属中学堂。办学115年来,虽十六易名,三迁校址,却不改太仓高中是江苏省内独树一帜、不可或缺的优质中学校本色,1997年学校被确认为江苏省重点高中,1999年率先成为国家级示范性普通高中,2004年3月被评为江苏省首批四星级高中。学校秉承“循正守真,志远业精”规划发展总体思路,谋求项目化、特色化创新发展之路,逐步形成“志远育德,业精育才”课程体系,建成彰显“人文奠基,科技见长”办学特色课程基地群,强化办学理念、师资队伍、课程实施、学校治理、育人模式和办学特色建设,形成了可资借鉴和可供推广的高品质高中经验。

理性精神引领下的数学课堂教学研究

——以“正弦函数、余弦函数的图象”为例*

杨 龙 (江苏省太仓高级中学 215411)



作者简介 杨龙,江苏省太仓高级中学校长助理,太仓市学科带头人,多次承担高三毕业班教学任务和分管高三教学工作,有着扎实的教学基本功和先进的教学理念,先后获得第十一届全国中小学创新课堂教学课评比二等奖、苏州市基本功竞赛一等奖、苏州市微课比赛一等奖、苏州市评优课二等奖,被评为太仓市优秀教育工作者,任苏州数学学会理事。在工作中,始终坚持立德树人根本任务,先后获评苏州市周氏德育奖、苏州市中学中职共青团工作先进个人,所带班级还曾获江苏省活力团支部。工作以来,多篇文章在省级以上期刊发表,参与两项省级课题且顺利结题。

摘 要 本文以函数研究的一般观念为指导,引导学生自主构建三角函数的研究内容、过程和方法。在探究正弦与余弦函数图象过程中,突出理性精神的引领,对正弦函数图象的构造和认识过程不断优化。同时注重信息技术的使用,突出知识的发生发展过程,加深对概念的理解与认识。

关键词 理性精神;一般观念;信息技术

文章编号 1004-1176(2022)11-0032-03

1 学情分析

教学对象是四星级高中的高一普通班学生,基础良好,有较强的自主学习能力、运算能力和综合运用知识解决问题的能力。

2 内容解读

本节课是人教A版数学必修第一册第5章“三角函数”中的第4节“三角函数的图象与性质”第1课时的内容。之前,学生已经有了学习指数函数、对数函数、幂函数的图象与性质的经验,针对一个新函数可以应用对比、类比的方法进行研究,将已有经验迁移到对三角函数图象与性质的研究中,形成研究思路。正弦函数、余弦函数是一类基

本初等函数,作为函数的下位知识,对于它们的研究基本遵从函数图象与性质的一般研究思路:绘制函数图象→观察图象、发现性质→证明性质。

教学目标 (1)经历绘制正弦函数图象的过程,掌握描点法,掌握绘制正弦函数图象的“五点法”;(2)经历绘制余弦函数图象的过程,理解其中运用的函数图象变换的思想;(3)通过三角函数的概念、三角函数诱导公式等知识间的联系体现事物之间的普遍联系与辩证统一。

教学重点 正弦函数、余弦函数的图象画法。

教学难点 掌握准确绘制函数图象一个点的方法,并由此绘制出正弦函数的图象。

* 本文系江苏省基础教育前瞻性教学改革实验项目“指向理性精神培育的数学创新实验课程研究”(2020JSQZ0146)研究成果。

3 过程实录

3.1 拟定研究思路

问题 1 前面我们学习了三角函数的定义以及基本运算,延用之前的指数函数、对数函数、幂函数的研究思路,接下来我们应该研究什么问题?怎样研究?

教师提出问题,学生回忆函数研究的一般思路,师生共同交流、规划、完善方案.预设的答案如下.

研究函数的一般思路:函数的定义—函数的定义域、值域—函数的图象—函数的性质—函数的应用.

鉴于前面已有研究,接下来重点是绘制三角函数的图象,各个击破,首先我们从画正弦函数的图象开始今天的探究之旅.

设计意图 规划研究方案,构建本单元的研究路径,以便从整体上掌握整个单元的学习过程,形成整体观念.

3.2 绘制正弦曲线

问题 2 你打算如何绘制正弦函数 $y = \sin x$ 的图象?

绘制一个新函数图象的基本方法是描点法.对于三角函数,单位圆上任意一点在圆周上旋转一周又回到原来的位置,这一特性体现了周而复始的规律,所以我们只要先画出函数 $y = \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$ 的图象即可.

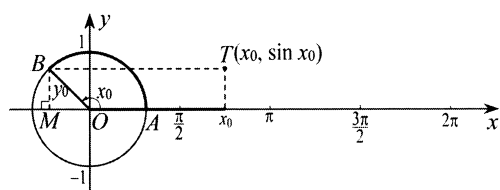


图 1

追问 1 对于正弦函数,在 $[0, 2\pi]$ 上任取一个值 x_0 ,如何精准绘制点 $T(x_0, \sin x_0)$?

本质在于对三角函数定义的理解以及弧度制的概念理解.如图 1,在平面直角坐标系中画出以原点 O 为圆心的单位圆, $\odot O$ 与 x 轴正半轴的交点为 $A(1, 0)$. 在单位圆上,将点 A 绕着点 O 旋转 x_0 弧度至点 B . 根据正弦函数的定义,点 B 的纵坐标 $y_0 = \sin x_0$. 由此,以 x_0 为横坐标, y_0 为纵坐标画点,即得到函数图象上的点 $T(x_0, \sin x_0)$. 根据弧度制的概念可知,弧长 $\widehat{AB} = x_0$, 因此可以使用“手工细线缠绕”的方法找到弧长 $\widehat{AB}$ 与横

坐标 x_0 的一一对应.

精准绘制一个点的问题解决之后,即可用相同的方法描出其他的点,这里可以借助信息技术工具得到比较精确的函数 $y = \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$ 的图象(图 2).

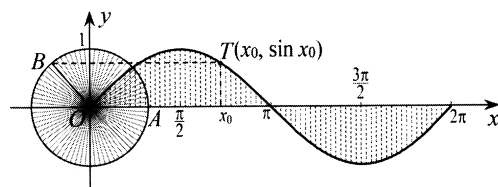


图 2

设计意图 教师引导学生剖析一个点的画法,深化对正弦函数定义的理解.通过分析点的坐标的几何意义,准确描点,同时体会信息技术给数学研究带来的便捷.

追问 2 根据函数 $y = \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$ 的图象,你能想象函数 $y = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$ 的图象吗?

根据诱导公式一可知,函数 $y = \sin x$, $x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi]$ ($k \in \mathbf{Z}, k \neq 0$) 的图象与 $y = \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$ 的图象形状完全一致. 因此将 $y = \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$ 的图象不断向左、向右平移(每次移动 2π 个单位长度),就可以得到正弦函数 $y = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$ 的图象.

正弦函数的图象叫做正弦曲线(sine curve),是一条“波浪起伏”的连续光滑曲线.

设计意图 绘制函数 $y = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$ 的图象,并培养说理的习惯,体会周而复始的特性.

追问 3 在确定正弦函数的图象形状时,应抓住哪些关键点?

为了画出函数 $y = \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$ 图象的简图,只要描出五个关键点,按照正弦函数图象的走势,并用光滑的曲线将之连接就可以画出正弦函数的简图,称为“五点法”.

设计意图 观察函数图象,概括其特征,获得“五点法”画图的简便画法.

3.3 绘制余弦曲线

问题 3 如何画出余弦函数 $y = \cos x$ 的图象?

学生可能会类比正弦函数图象的画法,提出用类似的方法画余弦函数的图象.教师可以适时追问,提示正弦函数、余弦函数是一对密切相关的函数.诱导公式表明,余弦函数和正弦函数可以互化.

$$\text{记 } f(x) = \sin x, \text{ 则 } \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, 因此函数 $y = \cos x$ 的图象, 可以由函数 $y = \sin x$ 的图象上的点向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位得到.

追问 1 你能在两个函数图象上选择一对具体的点, 解释这种平移变换吗?

设 (x_0, y_0) 是函数 $y = \cos x$ 图象上任意一点, 则有 $y_0 = \cos x_0 = \sin\left(x_0 + \frac{\pi}{2}\right)$. 令 $x_0 + \frac{\pi}{2} = t_0$, 则 $y_0 = \sin t_0$, 即在函数 $y = \sin x$ 图象上有对应点 (t_0, y_0) . 因为 $x_0 + \frac{\pi}{2} = t_0$, 即 $x_0 = t_0 - \frac{\pi}{2}$, 所以点 (x_0, y_0) 可以看作是点 (t_0, y_0) 向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位得到的, 只要将函数 $y = \sin x$ 图象上的点向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位即可得到函数 $y = \cos x$ 的图象.

教师指出, 余弦函数的图象叫做余弦曲线 (cosine curve), 它是与正弦曲线具有相同形状的“波浪形”曲线.

设计意图 利用诱导公式, 通过图象变换, 由正弦函数的图象获得余弦函数图象, 增强对两个函数图象之间的联系性的认识.

追问 2 类似于用“五点法”作正弦函数图象, 如何作出余弦函数的简图?

让学生写出一个周期范围内余弦函数图象上的五个关键点坐标.

3.4 例题精析

画出下列函数的图象:

(1) $y = 1 + \sin x, x \in [0, 2\pi]$;

(2) $y = -\cos x, x \in [0, 2\pi]$;

(3) $y = |\sin x|$.

设计意图 巩固学生对正弦函数、余弦函数图象特征的掌握, 熟练“五点法”画图, 掌握画图的基本技能. 通过分析图象变换, 深化对函数图象关系的理解, 并为后续的学习作好铺垫.

3.5 课堂小结(略)

4 教学感悟

4.1 一般观念指导数学研究

在《普通高中数学课程标准(2017年版 2020年修订)》中, 将三角函数内容安排在必修课程主题二“函数”中, 把“函数概念与性质”“幂函数、指

数函数、对数函数”“三角函数”“函数应用”视为一个整体. 三角函数作为一类最典型的周期函数, 是学生在高中阶段系统学习的最后一个基本初等函数, 所以教学中可注重引导学生以前面学到的研究函数的方法来指导学习. 本节课首先通过问题 1 拟定研究三角函数的路径, 以函数研究的一般观念为指导, 引导学生自主构建三角函数的研究内容、过程和方法, 同时还引导学生关注三角函数的特殊性, 充分利用周期性简化研究过程.

4.2 理性精神引领数学探究

本节课在探究正弦与余弦函数图象过程中, 突出理性精神的引领, 对正弦函数图象的构造和认识过程不断优化. 突出正弦函数的周期性(本课时中并未提出周期性的概念, 只是让学生通过圆周运动周而复始的直观形象和诱导公式的代数特征作感性认识)的特点, 将实数集范围的作图问题归结为区间 $[0, 2\pi]$ 内的作图问题; 精准画出正弦函数上的任意一点, 构建了函数图象与三角函数定义之间内在的逻辑联系, 使得画出的函数图象不仅有“形”, 还更加有“魂”, 有利于知识的整体性与联系性. 理性精神引领学生深度思考, 使得本节课的教学任务——绘制函数图象更加优化, 周期让图象绘制由局部到整体, 定义让描点作图由点到线, 五点作图让简图更方便快捷, 为后续借助图象直观分析问题、得到解题思路提供有效方法.

4.3 信息技术辅助数学学习

注重信息技术的使用, 加强知识的发生发展过程, 有助于学生加深对概念的理解与认识. 本节课在利用信息技术通过单位圆画函数图象时, 将三角函数的定义、三角函数的图象等内容紧密联系在一起, 并通过角的变化, 将这种联系直观地、动态地表现出来, 突出了信息技术在函数作图中的优势, 有效突破数学学习中的重难点. 本节课借助信息技术从一个点到任意多个点的描点, 利用信息技术的连续动画功能, 可以得到更多的图象上的点, 达到点动成线的直观效果, 使学生进一步理解任意一点与整体图形之间的关系, 理解图象形成的内在道理.

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版 2020年修订)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.