

高一学生函数学习数学抽象能力的调查研究

夏正华

(江苏省苏州市教育科学研究院 215004)

1 问题提出

数学抽象作为教学核心素养之首,在数学教育中具有举足轻重的地位.数学抽象是指通过对数量关系与空间形式的抽象,得到数学研究的对象.高一数学必修中的主要内容围绕函数开展,首先通过集合、逻辑用语、不等式的学习为函数铺路,而后学习函数的概念、性质、图象以及指、对、幂函数、三角函数等具体函数.在函数相关概念的教学中,最主要的就是引导学生从具体事物的背景中抽象出一般规律和结构(如:函数的概念等),从图象关系中抽象出符号化的语言(如:函数的单调性、奇偶性).因此,函数的学习是培养学生数学抽象素养的重要环节.

在初中学习时,由于数学抽象要求本身不高,因此,教材中以静态的方式来刻画函数的概念以及函数的性质.而在高中函数学习中,教材运用动态的方式刻画函数,从本质上抽象出函数的相关知识,并以符号语言的方式来描述,这对新入学的高一学生在学习上有一定的挑战,那么如何利用函数这一章来有效地帮助学生提升数学抽象能力呢?在两个月的函数学习之后,学生抽象能力的水平又如何?哪些因素会影响学生数学抽象的能力形成呢?这对函数的教学有何启示呢?有鉴于

此,本研究对刚入学两个多月的高一学生进行调查,了解他们经过高中课程的学习数学抽象能力的状况,并通过分析寻求高一年级阶段影响学生数学抽象的因素,并提出一些教学建议.

2 研究过程

2.1 研究对象

选择江苏省某四星级高中刚入学两个多月的学生为调查对象,他们已经学习了集合、简单逻辑用语、不等式、函数等内容.本次调查问卷共计发放 90 份,回收 87 份,其中测试 A 卷共计发放 45 份,学生独立完成 40 分钟,回收 42 份;测试 B 卷共计发放 45 份,回收 45 份.

2.2 问卷设计

为探究学生数学抽象能力水平及影响因素,故设计了一套调查问卷和一套数学抽象能力测试卷.调查问卷主要围绕学生学习情况与对相关数学抽象问题的看法;测试卷主要依据《普通高中数学课程标准(2017 年版)》^[1]中对数学抽象能力的水平划分,设计了 7 道测试题,分别考察学生对于三个水平的达成情况.为避免相互抄袭的情况发生,故设计了两套难度、题型相同的测试卷,分别记为 A 卷和 B 卷.测试卷的内容及评分标准具体如下表:

表 1 测试卷的内容及评分标准

题号	试卷类型	内容	水平	分值	评分标准
1	A	请写出你对“ $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 当 $x_1 > x_2$ 时, $f(x_1) < f(x_2)$ ”的理解	一	3	未做或者完全错误(0 分) 仅指出少部分符号的含义(1 分) 指出大部分符号的含义(2 分) 理解完全正确(3 分)
	B	请写出你对符号“ $y = f(x)$ ”的理解			

续表

题号	试卷类型	内容	水平	分值	评分标准
2	A	尝试构建一个情境,使得情境中的两个变量满足函数关系	一	3	未做(0分) 构建了情境,但错误(1分) 构建出情境,与题意相关但不完善(2分) 构建情境完全正确(3分)
	B	尝试构建一个生活情境,使其满足函数关系式 $y=3 \times 4^x$			
3	A	我们都知道:如果今天是星期一,那么过了七天后还是回到星期一,这就是典型的周期现象.自然,函数中也存在着这种周期性质.比如说:本月的5、12、19号都是星期四,可以用 $f(5)=f(12)=f(19)$ 来表示.请尝试利用更一般的数学符号语言刻画函数的周期性,并说明理由.	二	4	未做或刻画完全错误(0分) 尝试例举了更多实例,但未用数学符号语言刻画(1分) 只刻画形式,未说明理由或理由说明错误(2分) 正确利用数学符号语言刻画,但理由说明不全面(3分) 数学符号语言刻画及理由说明完全正确(4分)
	B	我们知道函数 $y=x^2$ 图象类似于向下凹的形式.比如说 $f(1)+f(2)<2f(1.5)$, $f(3)+f(11)<2f(7)$...请尝试利用数学符号语言刻画函数的下凹性,并说明理由.			
4	A	小明考试时遇到不会做的题时突然紧张、心跳加速,而后他跳过了这道题,发现后面的题都会做,心跳慢慢恢复平稳.请绘制小明考试时心率随时间变化图.	一	3	未做(0分) 图象绘制完全不合理(1分) 图象绘制基本合理,但有瑕疵(2分) 图象绘制合理(3分)
	B	某同学在班级上课时,需要回宿舍取重要资料,已知宿舍与班级相距 a 米.该同学从班级出发,快跑3分钟后到达宿舍,2分钟后,从宿舍步行10分钟(匀速)走到班级.请绘制出时间与路程的函数图象.			
5	A	定义: $h(x)=\begin{cases} f(x), & f(x)>g(x) \\ g(x) , & f(x)\leq g(x) \end{cases}$, 已知 $f(x)=x^2+2x-4$, $g(x)=x+2$. 请绘制 $h(x)$ 的函数图象,并说明绘制过程.	二	4	未做或绘制完全错误(0分) 尝试分段绘制,但绘图基本错误(1分) 图象绘制部分准确(2分) 图象绘制基本正确,但有瑕疵或绘图完全正确但未说明绘制理由(3分) 绘图完全正确,理由合理(4分)
	B	已知函数 $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x-3$, 请绘制出 $g(x)= f(-x) $, 并说明绘制过程.			
6	A	要在墙上开一个上半部分为半圆,下半部分为矩形的窗户,在窗框 l 为定长的情况下,要使窗户的透光面积 S 最大,窗户尺寸应当怎样设计?	三	4	未做或理解完全错误(0分) 尝试设出了未知量但关系式未列准确(1分) 准确列出了关系式(2分) 计算了最值,但有瑕疵(3分) 完全正确(4分)
	B	为了落实国务院“提速降费”的要求,某市移动公司预下调移动用户消费资费,已知该公司共有移动用户 a 万人.人均月消费 b 元.经计算,若人均月消费下降 $x\%$,则用户人数会增加 $tx(0<t<1)$ 万人.若使该公司总盈利最大,试求 x 的值.			

续表

题号	试卷类型	内容	水平	分值	评分标准
7	A	学校门口的金山路在早晚上下学高峰时,车流量过大,经常会出现堵车现象.为了更好指导出行,请你设计一个研究方案,试探究车流量与时间的关系,方案的主要内容包括: 1.车流量与时间是否满足函数关系? 2.这个关系可能存在什么性质? 3.如何去探究? 4.还有没有其他的考量因素(如:天气等)?	三	4	未做或理解完全错误(0分) 指出少部分关系,但与问题联系不大(1分) 指出大部分关系,但与问题联系不大(2分) 本质抽象正确,但创新性不强(3分) 本质抽象正确、创新性强(4分)
	B	如图,苏州轨道交通 1 号线干将路段经过广济南路(换乘 2 号线)和乐桥(换乘 4 号线)两个换乘大站,在早晚高峰时期异常的拥堵,为缓解 1 号线运营压力,并串联起留园、山塘街/石路、北寺塔/观前街、平江路等著名景区,现请你尝试设计一段地铁线(在图中标示出来),符合上述要求,并说说设计理由以及支持该理由的探究方案. 			

3 数据分析

3.1 问卷数据分析

根据表 2 中的数据所示,此次调查的男女比例各占 47.13%和 52.87%.就数学学习兴趣而言,大部分学生比较感兴趣,但约有 9.20%的学生对数学不感兴趣.在数学学习习惯中,学生普遍缺乏整理单元知识体系的习惯.在数学概念学习中,对于抽象事物特征形成数学概念的掌握认同感不高.在学习所接受的教学方式上,仅有 20.09%的

学生接受自主式学习,更多的愿意从情境中发现、归纳出发学习数学知识.在信息技术的接受程度上,学生较为认同信息技术能够帮助自己理解概念.对于函数的学习方法上,学生更偏爱以具体实例到抽象概念的方式,约占 88.51%.最后,对于是否课后主动整理知识框架的问题上,10.34%的学生经常整理,59.77%的学生偶尔整理,剩余 29.89%的学生均不整理,但其中大部分学生在教师的要求下会整理.

表 2 调查问卷数据情况

选项 题目	A	B	C	D	E	F
1. 你的性别是什么?	男	女				
	41/47.13	46/52.87				
2. 你对数学感兴趣吗?	感兴趣	比较感兴趣	一般	不感兴趣		
	19/21.84	41/47.13	19/21.84	8/9.20		
3. 在数学学习中你有什么好习惯吗?(可多选)	上课积极思考	课后整理笔记	错题分析整理	整理单元知识体系	无好习惯	其他
	57/65.52	47/54.02	53/60.92	19/21.84	10/11.49	3/3.45

续表

选项 题目	A	B	C	D	E	F
4. 在学习函数的相关内容后,除了掌握数学概念,你还学习到了什么?(可多选)	由抽象事物特征形成数学概念的能力	用符号语言表述数学概念	建立数学模型解决问题的能力	其他		
	47/54.02	72/82.76	61/70.11	5/5.75		
5. 在函数的相关概念教学中,你更愿意接受的教学方式是什么?(可多选)	讲授	从情境中发现归纳	练习法	读书自学法	其他	
	36/41.38	77/88.51	43/49.43	18/20.09	3/3.45	
6. 在函数的相关概念教学中,你所接受的知识导入主要是什么?(可多选)	通过复习导入	通过生活情境导入	通过数学史导入	通过数学问题导入	直接导入	其他
	30/34.48	54/62.07	19/21.84	70/80.46	18/20.69	2/2.30
7. 在函数的相关概念教学中,信息技术能够帮助你更好地理解概念.	非常符合	基本符合	一般	不符合		
	21/24.14	34/39.08	28/32.18	4/4.60		
8. 你认为信息技术能帮助你理解的原因是什么?(可多选)	更直观地发现概念、性质	能促进概念的理解	能够增加趣味性	不能帮助理解	其他	
	60/68.97	29/25.23	32/36.78	5/5.75	3/3.45	
9. 在一些函数模型的学习中你更喜欢哪种学习方法?	由具体实例到抽象概念	由抽象概念到具体实例	都可以			
	43/49.43	10/11.49	34/39.08			
10. 课后你会主动整理知识框架体系吗?	经常整理	偶尔整理	不整理	不整理,但老师要求下会整理		
	9/10.34	52/59.77	7/8.05	19/21.84		

* 频数/频率(%)

3.2 测试卷数据分析

(1) 数学抽象水平测试卷内部相关性分析

通过 SPSS22.0 的可靠性分析发现 A、B 两套测试卷的 Cronbach's Alpha 分别是 0.705 > 0.70 和 0.719 > 0.70, 说明该测试卷的三个水平

得分与总分的内部一致性良好,可以用来进行测试与研究.

(2) 总成绩分析

通过 SPSS22.0 对男、女学生的 A、B 测试卷的总分做了描述性统计,如下表 4.

表 3 可靠性统计量

测试卷类别	Cronbach's Alpha	基于标准化项的 Cronbach's Alpha	项数
A	0.705	0.667	4
B	0.719	0.689	4

表 4 男女生总分统计

测试卷类别	性别	N	极小值	极大值	均值	标准差	偏度
A	男	21	13	22	18.524	2.3371	-0.761
	女	21	13	22	17.286	2.9689	-0.231
B	男	20	13	21	17.350	2.6808	-0.216
	女	25	10	23	17.280	2.8065	-0.201

从表 4 可以看出, A、B 卷的平均成绩相近. 在测试卷 A 中, 男生的平均成绩略高于女生, 在测试卷 B 中, 男女生平均成绩相差不大. 从偏度上看, 4 个偏度均小于 0, 由此可知成绩低于平均值的人数较多, 符合各班期中考试情况, 说明该测试卷效度较好.

(3) 各项目成绩分析

通过数据汇总, 得到了如表 5 的各题平均成绩.

表 5 各项目平均成绩分析

班级	高一(6)班		高一(9)班	
	A	B	A	B
测试卷类别	A	B	A	B
第 1 题平均分	1.39	1.67	1.26	1.58
第 2 题平均分	2.43	2.24	2.53	2.58
第 3 题平均分	2.43	2.76	3.26	2.75
第 4 题平均分	2.87	2.33	3.00	2.33
第 5 题平均分	2.57	3.38	3.00	3.17
第 6 题平均分	2.48	2.29	2.89	3.50
第 7 题平均分	2.91	1.67	2.89	2.33
总平均分	17.09	16.33	18.84	18.25

根据上表中数据可知, 6 班的成绩稍逊于 9 班的成绩, 这与期中考试的成绩差异相符. 在各个水平下, 平均得分率有所差异, 具体如下表 6.

表 6 各水平下平均得分情况

	测试卷类别	平均得分	得分率 (%)	总得分率 (%)
水平一	A	6.74	74.87	72.55
	B	6.38	70.86	
水平二	A	5.57	69.64	72.72
	B	6.02	75.28	
水平三	A	5.57	69.64	65.50
	B	4.96	61.94	

数据说明学生在数学抽象素养水平一、水平二的达成率较好, 水平三的达成率有所欠缺.

3.3 相关性分析

不同学生的数学抽象能力水平可能与性别、兴趣、习惯相关, 故利用 SPSS22.0 与 Excel 软件分别对上述三种可能性进行分析.

(1) 数学抽象水平与性别的相关性

本文采用独立样本 T 检验来考察性别对于学生数学抽象能力是否有显著性差异. 首先, 需要检验数据的正态性, 数据检验结果如下表 7 所示.

表 7 正态性检验

		Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
		统计量	df	Sig.	统计量	df	Sig.
A	男	.165	21	.141	.937	21	.191
	女	.153	21	.200 [*]	.909	21	.053
B	男	.139	20	.200 [*]	.926	20	.128
	女	.140	25	.200 [*]	.970	25	.649

根据上表 Shapiro-Wilk 检验的结果表明, $P(\text{男}_A)=0.191>0.05$, $P(\text{女}_A)=0.053>0.05$, $P(\text{男}_B)=0.128>0.05$, $P(\text{女}_B)=0.649>0.05$,

即在 A、B 卷中男女生的成绩都符合正态分布. 下一步分析男女生在测试卷 A、B 总成绩的差异性.

表8 独立样本检验

		方差方程的 Levene 检验		均值方程的 t 检验						
		F	Sig.	t	df	Sig. (双侧)	均值差值	标准误差值	差分的 95% 置信区间	
									下限	上限
A	假设方差相等	2.623	.113	1.502	40	.141	1.2381	.8245	-.4283	2.9045
	假设方差不相等			1.502	37.910	.141	1.2381	.8245	-.4312	2.9074
B	假设方差相等	.031	.860	.085	43	.933	.0700	.8255	-1.5948	1.7348
	假设方差不相等			.085	41.604	.932	.0700	.8212	-1.5878	1.7278

从 Levene 方差齐性检验的结果表明,在 A 卷中 $p=0.113>0.05$,即两个总体的方差具有齐次性. 双侧假设检验结果是 $p=0.141>0.05$,说明对于性别而言,成绩没有显著性差异. 计算实际

效应大小: $\eta_A = \frac{1.502^2}{1.502^2 + 40} \approx 0.053$,表明成绩差

异中有 5.3% 的变异是由性别差异引起的. 在 B 卷中 $p=0.860>0.05$,即两个总体的方差具有显著的齐次性. 双侧假设检验结果是 $p=0.933>0.05$,说明对于男女生的平均成绩确实相等. 计算

实际效应大小: $\eta_A = \frac{0.085^2}{0.085^2 + 43} \approx 0.00017 <$

0.01,表明成绩差异中仅有 0.017% 的变异是由性别差异引起的. 综上所述,测试卷 A、B 的总成绩与性别无关,即高一学生在函数学习中数学抽象能力与性别相关性不明显.

(2) 数学抽象水平测试卷总分与对数学感兴趣程度的相关性

为了考察数学抽象水平测试的总分与对数学感兴趣程度是否相关,首先利用 Excel 分析了学生对数学感兴趣程度占比以及不同兴趣程度下学生测试卷平均总成绩分布,如图 1 所示:

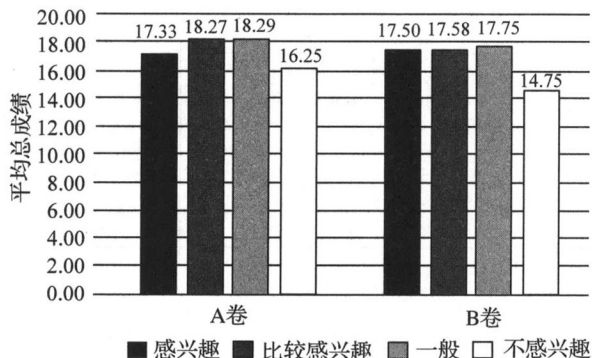


图1 不同兴趣程度下学生测试卷平均总成绩柱状图

根据图 1 所示,对于对数学感兴趣、比较感兴趣、一般的学生在 A、B 测试卷下的平均总成绩相差明显,但对于不感兴趣的学生来说,在 A、B 测试卷下的平均总成绩相对于其他学生差距较大. 这说明兴趣对数学抽象水平有一定的影响.

(3) 数学抽象水平与习惯的相关性

表 9 表明有无好习惯的差别在 A 卷中表现明显,均分差距在 2.08 分,但是在 B 卷中是否有好习惯对数学抽象能力的水平没有显著性影响. 综上,对于该问题的探究仍需要更大的样本数量.

表9 有无好习惯下的平均总成绩

	测试卷 A	测试卷 B
有好习惯	18.08/38	17.31/39
无好习惯	16.00/4	17.67/6

* 成绩/频数

4 建议与启示

人类是通过不断的抽象获得对自然界本质认识的,正是抽象才能将人们的思想从特殊向一般推进,才能真正地、深刻地理解和把握现实世界^[1]. 数学抽象能力的培养是函数学习的重中之重,也是落实立德树人根本任务的重要途径. 根据本次调查,得出以下几点建议:

(1) 教学情境应直击知识本质且具有趣味性

在函数教学中,创设的情境应紧扣主题,如函数单调性中创设新冠疫情趋势图的情景,既贴近时政话题,又能以“形”的方式引出研究单调性的知识需求. 同时,为提高学生的学习兴趣,也可以将情境趣味化,如:空集的讲解中以骗局——“高价回收 1960、1962、1965、1966、1969、1970 的 1 分硬币”开篇,既拓宽学生视野,又揭示空集本质且极具趣味性.

(2)将信息技术充分融入教学中

近年来,随着科技迅速发展,信息技术已得到了充分的认可和广泛的应用.在函数教学中,教师可以借助几何画板、GGB等软件动态地展示函数的动态变化,如:探究当 a 不同时, $y=a^x$ 图象变化趋势问题.信息技术的融入可以促进学生以“形”定“质”,更好地培养学生的数学抽象能力.

(3)有意识地培养学生整理总结的习惯

《普通高中数学课程标准(2017年版)》中指出数学抽象能力水平三的划分包括“感悟高度概括、有序多级的数学知识体系.”^[1]因此,养成数学知识的整理、归纳、总结等习惯,对数学抽象能力的提升有很大帮助.同时教师也可以根据情况,在教学的引入和总结环节有意识地来建构数学知识体系,定期或单元教学结束后,主动引导学生自主整理,绘制思维导图等.

(4)引导学生经历数学抽象的全过程

教师应加强教学文本的解读能力,准确理解数学知识,真正领悟教材编写意图,设计合理的探究活动来发展学生的数学抽象素养,学生的抽象经验需要在探究活动中积累,抽象能力需要到探究活动中发展,数学抽象素养需要在数学抽象经验的积淀和升华中培育.将探究活动与数学抽象过程的程序方式相对应,由浅而深设计有关探究活动,逐步实现从具体到抽象的过程,让学生体验

并熟悉数学抽象的“基本套路”,不断在活动中提升数学抽象素养.

(5)注重同化在数学抽象意义建构中的作用

涂荣豹教授在文[4]中指出:概念的意义建构并不是在一节课中、一次活动中就能够完成,它必须经过不断地运用,多次地反思,反复地辨析,而且有时还需对概念进行必要的解构和重构,才能对知识本质的理解逐渐清晰和深刻.这里要着重指出的是,数学抽象的发生需要经历概念的同化过程,而且这不是在概念生成的初始阶段的一节课中就能全部达成,概念的意义的综合贯通更多的是需要个人的体验与感悟.因此,需要在后续教学和解题感悟中,继续发挥同化在数学抽象中的作用,并通过学习者的反思内化达到概念的“对象”与“过程”的平衡共存,真正实现概念建构中的数学抽象素养的形成.

参考文献

- [1]中华人民共和国教育部制定.普通高中数学课程标准(2017年版)(2020年修订版)[M].北京:人民教育出版社,2020
- [2]钱珮玲,邵光华.数学思想方法与中学数学[M].北京:北京师范大学出版社,2017:36-45
- [3]吕增锋.数学微课的教学设计策略[J].中学数学(高中版),2016(19):48-50
- [4]涂荣豹.“教与学对应”原理的实践——对“函数单调性”教学设计的思考[J].数学教育学报,2014(11):5-9
- cation[A]. In Lerman, S. (Eds.), Encyclopedia of Mathematics Education. Netherlands: Springer, 2014: 255-260
- [17]Clark, K., Kjeldsen, T. F., Schorcht, S., et al. History of mathematics in mathematics education: Recent developments[C]//Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting. Montpellier: IREM de Montpellier, 2016: 135-180
- [18]沈中宇,李霞,汪晓勤. HPM 课例评价框架的建构——以“三角形中位线定理”为例[J].教育研究与评论(中学教育教),2017(01):35-41
- [19]中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(实验稿)[M].北京:人民教育出版社,2005:2
- [20](日)市川博.社会科的使命与魅力——日本社会科教育文选[M].沈晓敏译.北京:教育科学出版社,2006
- [21]范文豪.高中数学《立体几何》序言课教学的实践与研究[J].现代基础教育研究,2014,14(02):148-152
- [22]岳增成,汪晓勤. HPM 案例驱动下的小学数学教师专业发展[J].基础教育,2017,14(2):96-103,112

(上接第12页)

- [12]汪晓勤. HPM 视角下的小学数学教学[J].小学数学教师,2017(Z1):77-83+2
- [13]汪晓勤,张小明. HPM 研究的内容与方法[J].数学教育学报,2006(01):16-18
- [14]Jankvist, U. T. An implementation of two historical teaching modules: outcomes and perspectives[A]. In: Barbin E, Kronfellner M, Tzanakis C, editors. History and epistemology in mathematics education—Proceedings of the 6th European Summer University. Vienna: Holzhausen Publishing, 2011: 139-152
- [15]Huang, R., Shimizu, Y. Improving teaching, developing teachers and teacher educators, and linking theory and practice through lesson study in mathematics: an international perspective[J]. ZDM Mathematics Education, 2016, 48(4): 393-409
- [16]Barbin, E., Tzanakis, C. History of Mathematics and Edu-