

高一数学复习卷

D. $a \geq 1$

二、多项选择题（每小题 5 分，共 20 分）

9. 对于实数 a, b, c ，下列说法正确的是()

A. 若 $a > b > 0$ ，则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

B. 若 $a > b$ ，则 $ac^2 > bc^2$

C. 若 $a > 0 > b$ ，则 $ab < a^2$

D. 若 $c > a > b$ ，则 $\frac{a}{c-a} > \frac{b}{c-b}$

10. 在下列四个命题中，正确的是()

A. 命题“ $\exists x \in R$ ，使得 $x^2 + x + 1 < 0$ ”的否定是“ $\forall x \in R$ ，都有 $x^2 + x + 1 \geq 0$ ”

B. 当 $x > 1$ 时， $x + \frac{4}{x-1}$ 的最小值是5

C. 若不等式 $ax^2 + 2x + c > 0$ 的解集为 $\{x | -1 < x < 2\}$ ，则 $a + c = 2$

D. “ $a > 1$ ”是“ $\frac{1}{a} < 1$ ”的充要条件

11. 若 $x > 0, y > 0$ ，且 $x + y = xy$ ，则()

A. $x + y \geq 4$

B. $xy \geq 2$

C. $x^2 + y^2 \geq 8$

D. $\frac{1}{x} - y \leq -1$

12. 在整数集 Z 中，被5除所得余数为 k 的所有整数组成一个“类”，记为 $[k]$ ，即 $[k] = \{5n + k | n \in Z\}$ ，

$k = 0, 1, 2, 3, 4$ ，给出如下四个结论，其中，正确结论的是()

A. $2021 \in [1]$

B. $-13 \in [3]$

C. 若整数 a, b 属于同一“类”，则 $a - b \in [0]$

D. 若 $a - b \in [0]$ ，则整数 a, b 属于同一“类”

三、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

13. 设集合 $A = \{2, 3\}$ ， $B = \{1, a, a^2 + 2\}$ ，若 $A \cap B = \{3\}$ ，则实数 $a =$ _____.

14. 已知集合 $A = \{x | x < -1, \text{ 或 } x > 2\}$ ， $B = \{x | 2a \leq x \leq a + 3\}$ ，若“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的必要条件，
则实数 a 的取值范围是_____.

15. 已知 $a > 0, b > 0, c > 0$ ， $a^2 - ab + 9b^2 - 5c = 0$ ，则 $\frac{c}{ab}$ 的最小值是_____.当 $\frac{c}{ab}$ 取最小值时，

$m^2 - 3m \geq a + b - \frac{1}{3}c$ 恒成立，则 m 的取值范围是_____.(第一空2分，第二空3分)

16. 已知 $x, y \in R$ ，且满足 $4x + y + 2xy + 1 = 0$ ，则 $x^2 + y^2 + x + 4y$ 的最小值是_____.

四、解答题（共 70 分）

17. （10 分）已知全集 $U=\mathbf{R}$ ，集合 $A=[-2, 4]$ ， $B=[m+1, 2m+3]$ ，其中 $m>-2$.

（1）若 $m=-\frac{1}{2}$ ，求 $A \cap (\complement_U B)$ ；

（2）从① $A \cap B=B$ 、② $A \cap B=\emptyset$ 、③ $A \cup B=A$ 这三个条件中选择一个作为已知条件，求实数 m 的取值范围.

18. （12 分）已知 $p: \frac{8-x}{x+2} \geq 0$ ， $q: x^2 - 4x + 4 - m^2 \leq 0 (m > 0)$.

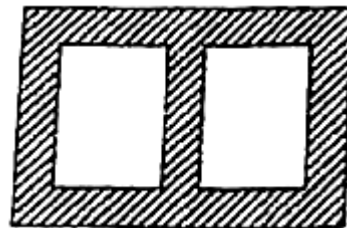
（1）若 p 为真，求实数 x 的取值范围；

（2）若 p 是 q 成立的充分不必要条件，求实数 m 的取值范围.

19. （12 分）为了持续推进“喜迎生物多样性，相约莞丽春城”计划，在市中心广场旁的一块矩形空地上进行绿化. 如图所示，两块完全相同的长方形种植绿草坪，草坪周围(斜线部分)均种满宽度相同的鲜花. 已知两块绿草坪的面积均为200平方米.

（1）若矩形草坪的长比宽至少多10米，求草坪宽的最大值；

（2）若草坪四周及中间的宽度均为2米，求整个绿化面积的最小值.



20. (12分) 已知实数 a, b 满足 $0 < a < 1, 0 < b < 1$.

(1) 若 $a + b = 1$, 求 $(1 + \frac{1}{a})(1 + \frac{1}{b})$ 的最小值;

(2) 设 $0 < m < 12$, 求 $\frac{1}{m} + \frac{1}{12-m}$ 的最小值.

21. (12分) 设函数 $y = ax^2 + (1-a)x + a - 2$.

(1) 若命题“对任意实数 $x, y \geq -2$ ”为真命题, 求实数 a 的取值范围;

(2) 解关于 x 的不等式 $y < a - 1 (a \in R)$.

22. (12分) 设函数 $y = ax^2 + (1-a)x + a - 2$.

(1) 若不等式 $y \geq -2$ 对于实数 $a \in [-1, 1]$ 时恒成立, 求实数 x 的取值范围;

(2) 命题 $p: \forall x_1 \in \{x | -2 \leq x \leq 2\}, \exists x_2 \in \{x | 1 \leq x \leq 4\},$ 使 $x_1^2 + ax_1 + 3 - a \geq \frac{4x_2^2 + 9}{4x_2}$ 成立.

若 p 为真命题, 求实数 a 的取值范围.

高一数学复习卷

1. 已知命题 $p: \forall x > 1, 2x + 1 > 5$, 则 $\neg p$ 为()

- 【答案】C

- 【答案】C

【答案】B

【答案】B

A. $x > -1$ B. $0 < x < 1$ C. $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ D. $x < 1$

【答案】A

【解析】解不等式 $2x^2 - 3x - 2 < 0$ 得 $-\frac{1}{2} < x < 2$. 对于A, $-\frac{1}{2} < x < 2$ 能推出 $x > -1$, 但 $x > -1$ 不能推出 $-\frac{1}{2} < x < 2$, 故“ $x > -1$ ”是“ $2x^2 - 3x - 2 < 0$ ”的必要不充分条件; 对于B, $-\frac{1}{2} < x < 2$ 不能推出 $0 < x < 1$, 但 $0 < x < 1$ 能推出 $-\frac{1}{2} < x < 2$, 故“ $0 < x < 1$ ”是“ $2x^2 - 3x - 2 < 0$ ”的充分不必要条件; 对于C, $-\frac{1}{2} < x < 2$ 不能推出 $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ 能推出 $-\frac{1}{2} < x < 2$, 故“ $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ ”是“ $2x^2 - 3x - 2 < 0$ ”的充分不必要条件; 对于D, $-\frac{1}{2} < x < 2$ 不能推出 $x < 1$, $x < 1$ 也不能推出 $-\frac{1}{2} < x < 2$, 故“ $x < 1$ ”是“ $2x^2 - 3x - 2 < 0$ ”的既不充分也不必要条件. 故选A.

6. 设自变量 x 对应的因变量为 y , 在满足对任意的 x , 不等式 $y \leq M$ 都成立的所有常数 M 中, 将 M 的最小值叫做 y 的上确界. 若 a, b 为正实数, 且 $a + b = 1$, 则 $-\frac{1}{2a} - \frac{2}{b}$ 的上确界为()

A. $-\frac{9}{2}$

B. $\frac{9}{2}$

C. $\frac{1}{4}$

D. -4

【答案】A

解: 因为 a, b 为正实数, 且 $a + b = 1$,

$$\text{所以 } \frac{1}{2a} + \frac{2}{b} = \left(\frac{1}{2a} + \frac{2}{b}\right) \times (a + b) = \frac{5}{2} + \left(\frac{b}{2a} + \frac{2a}{b}\right) \geq \frac{5}{2} + 2\sqrt{\frac{b}{2a} \times \frac{2a}{b}} = \frac{9}{2},$$

当且仅当 $b = 2a$, 即 $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$ 时等号成立,

因此有 $-\frac{1}{2a} - \frac{2}{b} \leq -\frac{9}{2}$, 即 $-\frac{1}{2a} - \frac{2}{b}$ 的上确界为 $-\frac{9}{2}$. 故选A.

7. 若关于 x 的不等式 $x^2 - (a + 1)x + a < 0$ 的解集中, 恰有3个整数, 则实数 a 的取值范围是()

A. $\{a | -3 < a \leq -2 \text{ 或 } 4 \leq a < 5\}$

B. $\{a | -3 \leq a < -2 \text{ 或 } 4 < a \leq 5\}$

C. $\{a | 4 < a \leq 5\}$

D. $\{a | -3 < a < -2 \text{ 或 } 4 < a < 5\}$

【答案】B

解: 原不等式可化为 $(x - 1)(x - a) < 0$, 当 $a = 1$ 时, 无解, 不满足题意, 所以 $a \neq 1$,

①当 $a > 1$ 时, 解得 $1 < x < a$, 此时解集中的整数为2, 3, 4, 则 $4 < a \leq 5$,

②当 $a < 1$ 时, 解得 $a < x < 1$, 此时解集中的整数为0, -1, -2, 则 $-3 \leq a < -2$,

故 $a \in \{a | -3 \leq a < -2 \text{ 或 } 4 < a \leq 5\}$, 故选: B.

8. 若对任意的 $x, y \in R$, 不等式 $x^2 + y^2 + xy \geq 3(x + y - a)$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为()

A. $a \leq -1$

B. $a \leq 1$

C. $a \geq -1$

D. $a \geq 1$

【答案】D

二、多项选择题（每小题 5 分，共 20 分） AC ABC ACD ACD

9. 对于实数 a, b, c ，下列说法正确的是()

A. 若 $a > b > 0$ ，则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

B. 若 $a > b$ ，则 $ac^2 > bc^2$

C. 若 $a > 0 > b$ ，则 $ab < a^2$

D. 若 $c > a > b$ ，则 $\frac{a}{c-a} > \frac{b}{c-b}$

【答案】AC

解：A. $\because a > b > 0, \therefore \frac{a}{ab} > \frac{b}{ab}, \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ，正确。 B. $\because a > b, c^2 \geq 0$ ，则 $ac^2 \geq bc^2$ ，错误。

C. $a > 0 > b$ ，则 $ab < a^2$ ，正确。

D. $c > a > b$ ，则 $0 < c - a < c - b, \therefore \frac{1}{c-a} > \frac{1}{c-b} > 0$ ，但是 a, b 与0的关系不确定，虽然 $a > b$ ，无法判

断 $\frac{a}{c-a} > \frac{b}{c-b}$ 的正误。综上可得：AC 正确。故选：AC。

10. 在下列四个命题中，正确的是()

A. 命题“ $\exists x \in R$ ，使得 $x^2 + x + 1 < 0$ ”的否定是“ $\forall x \in R$ ，都有 $x^2 + x + 1 \geq 0$ ”

B. 当 $x > 1$ 时， $x + \frac{4}{x-1}$ 的最小值是5

C. 若不等式 $ax^2 + 2x + c > 0$ 的解集为 $\{x | -1 < x < 2\}$ ，则 $a + c = 2$

D. “ $a > 1$ ”是“ $\frac{1}{a} < 1$ ”的充要条件

【答案】ABC

解：命题“ $\exists x \in R$ ，使得 $x^2 + x + 1 < 0$ ”为存在量词命题，

否定是“ $\forall x \in R$ ，都有 $x^2 + x + 1 \geq 0$ ”，A 正确；

$$x > 1 \text{ 时, } x + \frac{4}{x-1} = x - 1 + \frac{4}{x-1} + 1 \geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{4}{x-1}} + 1 = 5,$$

当且仅当 $x - 1 = \frac{4}{x-1}$ ，即 $x = 3$ 时取等号，B 正确；

由不等式 $ax^2 + 2x + c > 0$ 的解集为 $\{x | -1 < x < 2\}$ ，

得 $ax^2 + 2x + c = 0$ 的解为 $x = -1, x = 2$ ，

$$\text{所以 } \begin{cases} -1 + 2 = -\frac{2}{a} \\ -1 \times 2 = \frac{c}{a} \end{cases}, \text{ 所以 } a = -2, c = 4, a + c = 2, C \text{ 正确;}$$

当 $a = -1$ 时， $\frac{1}{a} < 1$ ，D 显然错误。故选：ABC。

11. 若 $x > 0, y > 0$ ，且 $x + y = xy$ ，则(ACD)

A. $x + y \geq 4$

B. $xy \geq 2$

C. $x^2 + y^2 \geq 8$

D. $\frac{1}{x} - y \leq -1$

【答案】ACD

解：由 $x > 0$, $y > 0$ 且满足 $x + y = xy$, 得 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$,

对于 A, $x + y = (x + y)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) \geq 2 + 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 4$, 当且仅当 $x = y = 2$ 时等号成立, 故 A 正确;

对于 B, 由 $x + y = xy$, 故 $xy \geq 4$, 故 B 错误,

对于 C, $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = (xy)^2 - 2xy = (xy - 1)^2 - 1$, 又 $xy \geq 4$, 故 $(xy - 1)^2 - 1 \geq 8$, 故 C 正确;

对于 D, $\frac{1}{x} - y = 1 - \frac{1}{y} - y = 1 - (\frac{1}{y} + y) \leq 1 - 2\sqrt{\frac{1}{y} \cdot y} = -1$, 故 D 正确. 故选: ACD.

12. 在整数集 Z 中, 被 5 除所得余数为 k 的所有整数组成一个“类”, 记为 $[k]$, 即 $[k] = \{5n + k | n \in Z\}$,

$k = 0, 1, 2, 3, 4$, 给出如下四个结论, 其中, 正确结论的是()

A. $2021 \in [1]$

B. $-13 \in [3]$

C. 若整数 a, b 属于同一“类”, 则 $a - b \in [0]$

D. 若 $a - b \in [0]$, 则整数 a, b 属于同一“类”

【答案】ACD

解：因为 $2021 = 5 \times 404 + 1$, 所以 $2021 \in [1]$, 故 A 正确;

因为 $-13 = -3 \times 5 + 2$, 所以 $-13 \in [2]$, 故 B 错误;

若整数 a, b 属于同一“类”, 则整数 a, b 被 5 除所得的余数相等, 所以 $a - b$ 为被 5 整除的数, 即余数为 0, 所以 $a - b \in [0]$, 故 C 正确;

若 $a - b \in [0]$, 即 $a - b$ 为被 5 整除的数, 即余数为 0, 所以整数 a, b 被 5 除所得的余数相等, 所以整数 a, b 属于同一“类”, 故 D 正确. 故选 ACD.

四、填空题 (每小题 5 分, 共 20 分)

13. 设集合 $A = \{2, 3\}$, $B = \{1, a, a^2 + 2\}$, 若 $A \cap B = \{3\}$, 则实数 $a =$ _____.

【答案】3 或 -1

解： $A = \{2, 3\}$, $B = \{1, a, a^2 + 2\}$, 若 $A \cap B = \{3\}$, 则 $a = 3$ 或 $a^2 + 2 = 3$,

① $a = 3$ 时, $a^2 + 2 = 11$, 符合题意,

② $a^2 + 2 = 3$ 时, $a = 1$ (舍) 或 $a = -1$, 故答案为: 3 或 -1.

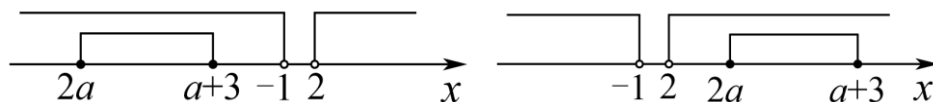
14. 已知集合 $A = \{x | x < -1, \text{ 或 } x > 2\}$, $B = \{x | 2a \leq x \leq a + 3\}$, 若“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的必要条件, 则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】 $(-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$

【解析】 $\because$ “ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的必要条件, $\therefore B \subseteq A$,

当 $B = \emptyset$ 时, $2a > a + 3$, 则 $a > 3$;

当 $B \neq \emptyset$ 时, 根据题意作出如图所示的数轴,



由图可知 $\begin{cases} a+3 > 2a \\ a+3 < -1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a+3 > 2a \\ 2a > 2 \end{cases}$, 解得 $a < -4$ 或 $1 < a \leq 3$,

综上可得, 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$.

15. 已知 $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a^2 - ab + 9b^2 - 5c = 0$, 则 $\frac{c}{ab}$ 的最小值是_____. 当 $\frac{c}{ab}$ 取最小值时,

$m^2 - 3m \geq a + b - \frac{1}{3}c$ 恒成立, 则 m 的取值范围是_____. (第一空2分, 第二空3分)

【答案】1 ; $\{m | m \leq -1 \text{ 或 } m \geq 4\}$

解: 因为 $a^2 - ab + 9b^2 - 5c = 0$, 所以 $\frac{c}{ab} = \frac{1}{5} \cdot \frac{a^2 - ab + 9b^2}{ab} = \frac{1}{5} \left(\frac{a}{b} + \frac{9b}{a} - 1 \right) \geq \frac{1}{5} (2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{9b}{a}} - 1) = 1$, 当且仅

当 $\frac{a}{b} = \frac{9b}{a}$, 即 $a = 3b$ 时, 等号成立.

当 $a = 3b$ 时, $c = 3b^2$, $a + b - \frac{1}{3}c = -b^2 + 4b = -(b-2)^2 + 4$, 所以当 $b = 2$ 时, $a + b - \frac{1}{3}c$ 取得最大值4, 所

以由 $m^2 - 3m \geq a + b - \frac{1}{3}c$ 恒成立可得 $m^2 - 3m \geq 4$, 解得 $m \geq 4$ 或 $m \leq -1$,

故 m 的取值范围是 $\{m | m \leq -1 \text{ 或 } m \geq 4\}$.

16. 已知 $x, y \in \mathbb{R}$, 且满足 $4x + y + 2xy + 1 = 0$, 则 $x^2 + y^2 + x + 4y$ 的最小值是_____.

【答案】 $-\frac{13}{4}$

解: 由 $4x + y + 2xy + 1 = 0$, 得 $(2x+1)(y+2) = 1$,

令 $2x+1 = m$, $y+2 = n$, 则 $mn = 1$.

$$\therefore x^2 + y^2 + x + 4y = \frac{1}{4}m^2 + n^2 - \frac{17}{4} \geq 2 \cdot \frac{1}{2}mn - \frac{17}{4} = 1 - \frac{17}{4} = -\frac{13}{4}. \quad \text{①}$$

当且仅当 $\frac{1}{2}m = n$, 即 $x + \frac{1}{2} = y + 2$ 时等号成立,

联立 $\begin{cases} x = y + \frac{3}{2} \\ 4x + y + 2xy + 1 = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = \frac{-1-\sqrt{2}}{2} \\ y = -2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{2}}{2} \\ y = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$, 说明①中“=”成立.

$\therefore x^2 + y^2 + x + 4y$ 的最小值是 $-\frac{13}{4}$. 故答案为: $-\frac{13}{4}$.

四、解答题 (共 70 分)

17. (10分) 已知全集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $A=[-2, 4]$, $B=[m+1, 2m+3]$, 其中 $m>-2$.

(1) 若 $m=-\frac{1}{2}$, 求 $A \cap (\complement_U B)$;

(2) 从① $A \cap B=B$ 、② $A \cap B=\emptyset$ 、③ $A \cup B=A$ 这三个条件中选择一个作为已知条件, 求实数 m 的取值范围.

解: (1) 若 $m=-\frac{1}{2}$, 则 $B=[\frac{1}{2}, 2]$, 故 $\complement_U B=(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$,

故 $A \cap (\complement_U B)=[-2, \frac{1}{2}) \cup (2, 4]$.

(2) 选_____.

①若 $A \cap B=B$, 即 $B \subseteq A$, 则 $\begin{cases} m+1 \geq -2 \\ 2m+3 \leq 4 \end{cases}$, 解得: $-3 \leq m \leq \frac{1}{2}$,

又 $m>-2$, 故 m 的取值范围是 $(-2, \frac{1}{2}]$.

②若 $A \cap B=\emptyset$, 则 $m+1>4$ 或 $2m+3<-2$, 解得: $m<-\frac{5}{2}$ 或 $m>3$,

又 $m>-2$, 所以 m 的取值范围是 $(3, +\infty)$.

③若 $A \cup B=A$, 则 $B \subseteq A$, 则 $\begin{cases} m+1 \geq -2 \\ 2m+3 \leq 4 \end{cases}$, 解得: $-3 \leq m \leq \frac{1}{2}$,

又 $m>-2$, 故 m 的取值范围是 $(-2, \frac{1}{2}]$.

18. (12分) 已知 $p: \frac{8-x}{x+2} \geq 0$, $q: x^2 - 4x + 4 - m^2 \leq 0 (m>0)$.

(1) 若 p 为真, 求实数 x 的取值范围;

(2) 若 p 是 q 成立的充分不必要条件, 求实数 m 的取值范围.

解(1) 由 $\frac{8-x}{x+2} \geq 0$ 得 $\begin{cases} (x-8)(x+2) \leq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases}$, 解得 $-2 < x \leq 8$,

所以 p 为真时, 实数 x 的取值范围是 $-2 < x \leq 8$;

(2) 由 $x^2 - 4x + 4 - m^2 \leq 0 (m>0)$, 解得 $2-m \leq x \leq 2+m (m>0)$,

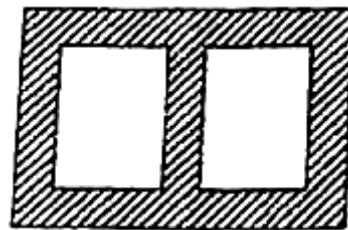
若 p 是 q 成立的充分不必要条件,

则 $[-2, 8]$ 是 $[2-m, 2+m]$ 的真子集,

所以 $\begin{cases} m > 0 \\ 2-m \leq -2 \\ 2+m \geq 8 \end{cases}$, 解得 $m \geq 6$.

所以实数 m 的取值范围是 $[6, +\infty)$.

19. (12分) 为了持续推进“喜迎生物多样性, 相约莞丽春城”计划, 在市中心广场旁的一块矩形空地上进行绿化. 如图所示, 两块完全相同的长方形种植绿草坪, 草坪周围(斜线部分)均种满宽度相同的鲜花. 已知两块绿草坪的面积均为200平方米.



(1) 若矩形草坪的长比宽至少多10米, 求草坪宽的最大值;

(2) 若草坪四周及中间的宽度均为2米, 求整个绿化面积的最小值.

解: (1) 设草坪的宽为 x 米, 长为 y 米, 由题意可得, $xy = 200$, 则 $y = \frac{200}{x}$,

又因为矩形草坪的长比宽至少多10米,

则 $\frac{200}{x} \geq x + 10$, 即 $(x + 20)(x - 10) \leq 0$, 解得 $-20 \leq x \leq 10$,

由 $x > 0$, 所以 $0 < x \leq 10$, 故草坪宽的最大值为10米;

(2) 设草坪的宽为 x 米, 长为 y 米, 由题意可得, $xy = 200$, 则 $y = \frac{200}{x}$,

因为草坪四周及中间的宽度均为2米, 则整个绿化面的长为 $2x + 6$ 米, 宽为 $\frac{200}{x} + 4$ 米,

所以绿化面积为 $(2x + 6)(\frac{200}{x} + 4) = 424 + 8x + \frac{1200}{x} \geq 424 + 2\sqrt{8x \cdot \frac{1200}{x}} = 424 + 80\sqrt{6}$,

所以整个绿化面积的最小值为 $424 + 80\sqrt{6}$ 平方米.

20. (12分) 已知实数 a, b 满足 $0 < a < 1, 0 < b < 1$.

(1) 若 $a + b = 1$, 求 $(1 + \frac{1}{a})(1 + \frac{1}{b})$ 的最小值;

(2) 设 $0 < m < 12$, 求 $\frac{1}{m} + \frac{1}{12-m}$ 的最小值.

解: 已知实数 a, b 满足 $0 < a < 1, 0 < b < 1$.

(1) 若 $a + b = 1, (1 + \frac{1}{a})(1 + \frac{1}{b}) = (1 + \frac{a+b}{a})(1 + \frac{a+b}{b}) = (2 + \frac{a}{b})(2 + \frac{b}{a}) = 4 + \frac{2b}{a} + \frac{2a}{b} + 1 \geq 4 + 4 + 1 = 9$,

当且仅当 $a = b = \frac{1}{2}$ 时, 等号成立, 故所求最小值为9.

(2) $\because 0 < m < 12, \therefore m > 0, 12 - m > 0$,

$\because m + (12 - m) = 12, \therefore \frac{m}{12} + \frac{12-m}{12} = 1$,

$\therefore \frac{1}{m} + \frac{1}{12-m} = (\frac{1}{m} + \frac{1}{12-m})(\frac{m}{12} + \frac{12-m}{12}) = \frac{1}{6} + \frac{12-m}{12m} + \frac{m}{12(12-m)} \geq \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$, 当且仅当 $m = 6$ 时, 等号成立,

$\therefore \frac{1}{m} + \frac{1}{12-m}$ 的最小值为 $\frac{1}{3}$.

21. (12分) 设函数 $y = ax^2 + (1-a)x + a - 2$.

(1) 若命题“对任意实数 x , $y \geq -2$ ”为真命题, 求实数 a 的取值范围;

(2) 解关于 x 的不等式 $y < a - 1$ ($a \in R$).

【解析】(1) $\because$ 命题“对任意实数 x , $y \geq -2$ ”为真命题,
 $\therefore ax^2 + (1-a)x + a - 2 \geq -2$ 恒成立, 即 $ax^2 + (1-a)x + a \geq 0$ 恒成立.

当 $a=0$ 时, $x \geq 0$, 不满足题意;

当 $a \neq 0$ 时, 知 $\begin{cases} a > 0, \\ \Delta \leq 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a > 0, \\ (1-a)^2 - 4a^2 \leq 0, \end{cases}$ 解得 $a \geq \frac{1}{3}$.

故实数 a 的取值范围为 $a \geq \frac{1}{3}$.

(2) $\because y < a - 1$ ($a \in R$), $\therefore ax^2 + (1-a)x + a - 2 < a - 1$, 即 $ax^2 + (1-a)x - 1 < 0$.

当 $a=0$ 时, $x < 1$, $\therefore$ 不等式的解集为 $\{x | x < 1\}$;

当 $a > 0$ 时, $ax^2 + (1-a)x - 1 < 0 \Rightarrow (ax+1)(x-1) < 0$, 此时方程 $(ax+1)(x-1)=0$ 的解分别为 $-\frac{1}{a}$, 1 ,

$\because -\frac{1}{a} < 1$, $\therefore$ 不等式的解集为 $\{x | -\frac{1}{a} < x < 1\}$,

当 $a < 0$ 时, 不等式可化为 $(ax+1)(x-1) < 0$,

① 当 $a=-1$ 时, $-\frac{1}{a}=1$, $\therefore$ 不等式的解集为 $\{x | x \neq 1\}$;

② 当 $-1 < a < 0$ 时, $-\frac{1}{a} > 1$, 此时不等式的解集为 $\{x | x > -\frac{1}{a} \text{ 或 } x < 1\}$;

③ 当 $a < -1$ 时, $-\frac{1}{a} < 1$, 此时不等式的解集为 $\{x | x > 1 \text{ 或 } x < -\frac{1}{a}\}$

综上所述, 当 $a < -1$ 时, 不等式的解集为 $\{x | x > 1 \text{ 或 } x < -\frac{1}{a}\}$

当 $a=-1$ 时, 不等式的解集为 $\{x | x \neq 1\}$;

当 $-1 < a < 0$ 时, 不等式的解集为 $\{x | x > -\frac{1}{a} \text{ 或 } x < 1\}$;

当 $a=0$ 时, 不等式的解集为 $\{x | x < 1\}$;

当 $a > 0$ 时, 不等式的解集为 $\{x | -\frac{1}{a} < x < 1\}$

22. (12分) 设函数 $y = ax^2 + (1-a)x + a - 2$.

(1) 若不等式 $y \geq -2$ 对于实数 $a \in [-1, 1]$ 时恒成立, 求实数 x 的取值范围;

(2) 命题 $p: \forall x_1 \in \{x | -2 \leq x \leq 2\}, \exists x_2 \in \{x | 1 \leq x \leq 4\},$ 使 $x_1^2 + ax_1 + 3 - a \geq \frac{4x_2^2 + 9}{4x_2}$ 成立.

若 p 为真命题, 求实数 a 的取值范围.

解: (1) 原式可化为 $ax^2 + (1-a)x + a \geq 0$ 对实数 $a \in [-1, 1]$ 恒成立,

即 $(x^2 - x + 1)a \geq -x$ 对实数 $a \in [-1, 1]$ 恒成立,

因为 $x^2 - x + 1 > 0$ 恒成立,

则只需满足 $a \geq \frac{-x}{x^2 - x + 1}$ 对实数 $a \in [-1, 1]$ 恒成立,

因为 $a \in [-1, 1]$, 故 $\frac{-x}{x^2 - x + 1} \leq -1$ 即可,

所以 $-x \leq -(x^2 - x + 1)$ 则 $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \leq 0$,

解得 $x = 1$;

(2) 由题意知: $y_1 = x^2 + ax + 3 - a$ 在 $\{x | -2 \leq x \leq 2\}$ 的最小值大于等于 $y_2 = \frac{4x^2 + 9}{4x}$ 在 $\{x | 1 \leq x \leq 4\}$ 上的最小值即可,

$$y_2 = \frac{4x^2 + 9}{4x} = x + \frac{9}{4x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{9}{4x}} = 3, \text{ 当且仅当 } x = \frac{9}{4x}, \text{ 即 } x = \frac{3}{2} \text{ 时, 取等号,}$$

所以 $y_2 = \frac{4x^2 + 9}{4x}$ 在 $\{x | 1 \leq x \leq 4\}$ 上的最小值为3,

若 $-\frac{a}{2} \geq 2$ 即 $a \leq -4$, 则 $4 + 2a + 3 - a \geq 3$, 则 $a \geq -4$, 易得 $a = -4$,

若 $-\frac{a}{2} \leq -2$ 即 $a \geq 4$, 则 $4 - 2a + 3 - a \geq 3$, 则 $a \leq \frac{4}{3}$ 矛盾,

$-2 < \frac{a}{2} < 2$, 即 $-4 < a < 4$, 则 $\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + 3 - a \geq 3$, 易得 $-4 < a \leq 0$.

综上所述: $-4 \leq a \leq 0$.