

编者按 为密切编辑部与中学的联系,本刊编委第31次“走进课堂”,于2023年3月15日赴江苏省常州高级中学观课议课.江苏省常州高级中学成立于1907年,百余年来培育了大批杰出人才,其中有中国共产党早期领袖瞿秋白、张太雷,史学家钱穆,文学家刘半农,语言学家吕叔湘、周有光,音乐家刘天华,医学病毒学专家侯云德(2017年国家最高科学技术奖获得者),国际宇航科学院院士许教教、吴美蓉和青年数学家恽之玮(2017年数学“新视野奖”获得者)以及中国科学院和工程院院士20多人.学校是江苏省首批国家级示范高中、江苏省首批高品质示范高中建设立项学校(全省20所),新课程新教材国家级示范校(全省3所).2021年7月,国际小行星组织将编号为448988的小行星命名为“常中星”.学校恪守“存诚·能贱”校训,秉承“明德正行,精微致远”办学理念,以培养在未来社会中具有健康生命、理性精神、主动发展的杰出公民为使命.学校采取“多维融通、整体构建、综合育人”的发展策略,开发校本化的“大课程”体系,始终将教学质量作为学校生命线,每年重点本科达线率保持在95%以上,五大学科奥赛获全国金银牌和省赛区一等奖人数位居全省前三.学校以树立“大学识”“大智慧”“大情怀”的大先生形象为目标,“四有”好教师入选省级重点培育团队.近几年有省市名师工作室10多个,名特优教师(五级梯队称号)共115人,占比达63.4%,其中江苏省人民教育家培养对象1名,江苏省特级教师4名,正教授级高级教师5名,江苏省“333工程”培养对象3名,奥赛金牌教练4名.

“三新”背景下的定理课的教学实践与思考

——以“正弦定理”教学为例

刘万稳 (江苏省常州高级中学 213003)



作者简介 刘万稳,毕业于华东师范大学,现任教于江苏省常州高级中学,担任教改班数学教师兼班主任,高中数学奥林匹克竞赛一级教练.平时积极学习先进的教育教学理论,丰富自己的专业视野,在省级期刊上发表论文多篇.在多年的教学过程中,不断积累教育教学经验,不断践行新课改的教学理念,善于启发学生思维,激发学生兴趣.连续多年担任高三毕业班教育教学工作,工作业绩突出,所带学生高考成绩优异,多次荣获班主任工作“校长特别奖”,2021年度受到常州市教育局嘉奖.

摘要 以“正弦定理”的教学为例,对“三新”背景下的定理课教学进行如下几点思考:(1)注重比较,挖掘新教材的编排意图;(2)注重联系,体现思维的深刻性;(3)注重变化,体现思维的灵活性;(4)合情推理,体现思维的自然性;(5)渗透美育,发现与欣赏数学美.

关键词 三新;正弦定理;教学研究

文章编号 1004-1176(2023)06-0032-04

课程标准是教材编写、教学、评估和考试命题的依据,是国家管理和评价课程的基础.自《普通高中数学课程标准(2017年版2020修订)》(下称“新课标”)颁布以来,依据新课标编写的新教材陆续投入使用.由江苏凤凰教育出版社高中数学教材编写组编写的新版教科书也应运而生.全国各省也陆续进入“新高考”阶段,其中江苏省于2018年启动“新高考”,于2021年首次参加“新高考”.“三新”(新课标、新教材、新高考)背景,给高中数学课堂教学的改革带来了机遇与挑战.如何依据新课标、如何使用新教材、如何适应新高考,应该成为普通高中一线数学教师思考的课题.本文以“正弦定理”教学为例,谈谈在“三新”背景下

对定理教学的思考.

苏教版普通高中数学教科书必修第二册(下称“新教材”),“解三角形”一章引言部分从实际生活出发,提出了研究三角形中边角关系的必要性.借助向量等手段,对任意三角形的边角关系进行探索,培养学生的归纳、猜想、论证能力以及分析问题和解决问题的能力,同时让学生在学习中感受数学的对称美与和谐美.

1 教学重难点分析

此次教学对象是四星级高一年级创新班的学生,整体素质较高.“正弦定理”这一节内容教学安排约2课时.第一课时的教学重点是利用向量探究正弦定理的过程、正弦定理及其应用;教学难

点是正弦定理的探究与证明,尤其是利用向量探究正弦定理,对于学生的认知水平有一定的要求.

2 教学实录

为了叙述方便,我们把 $\triangle ABC$ 中的三个角 A, B, C 的对边分别记为 a, b, c .

师:前面已经学习了三角形一个重要的边角关系式——余弦定理.余弦定理本身很重要,探究发现定理的过程也很重要!请大家回顾其探究过程,并简述.

生:利用向量工具,通过向量等式 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ 数量化,即等式两边平方,并化简得到余弦定理.

师:很好!昨天的余弦定理习题课,我们利用向量等式 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ 数量化还可以得出什么三角形边角关系式的结论?怎么获得的?

生:射影定理,如 $a = b\cos C + c\cos B$,可以通过向量等式两边点乘 $\overrightarrow{BC}$ 得到!

师:很好!如果向量等式 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ 两边点乘 $\overrightarrow{CB}$,能有同样的结果 $a = b\cos C + c\cos B$ 吗?

生:(经过计算)是一样的结果.

师:向量等式 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ 两边点乘哪些向量都有同样的结果 $a = b\cos C + c\cos B$?

生1:与 $\overrightarrow{BC}$ 平行的向量!

生2:不能是零向量,应该改为与 $\overrightarrow{BC}$ 平行的非零向量.

师:非常棒!向量作为工具,探究新知、证明结论,简洁、有力、高效!还有其他特殊的数量积将向量等式 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ 数量化吗?

生:向量等式 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ 两边同时点乘一个与已知向量垂直的向量(图1).

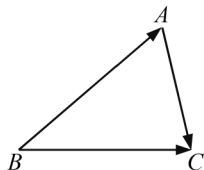


图1

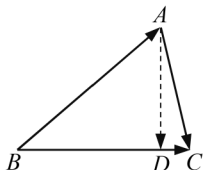


图2

师:太棒了!请你找一个与已知向量 $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}$ 之一垂直的向量.

生:过点A作 $AD \perp BC$ 于点D, AD 与 BC 垂直(图2).

师:非常好!向量等式 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ 两边同时点乘 $\overrightarrow{AD}$,你能化简出怎样的三角形边角关系式?(请举手的学生上黑板演示)

生: $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}, 0 = \overrightarrow{BA} \cdot$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}, \\ 0 = -|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AD}| \cos \angle BAD + |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos \angle CAD, \\ 0 = -c |\overrightarrow{AD}| \cos \left(\frac{\pi}{2} - B \right) + b |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} - C \right), \\ 0 = -c \sin B + b \sin C, \text{ 即 } b \sin C = c \sin B.$$

师:建议给他掌声(学生们赞同,鼓掌).请问该边角关系式 $b \sin C = c \sin B$ 对任意三角形都成立吗?

生:刚才探究过程中 $\angle BAD = \frac{\pi}{2} - B$ 和 $\angle CAD = \frac{\pi}{2} - C$ 对锐角三角形成立,还需要验证直角三角形和钝角三角形.

师:很好!请就这两种情况分别验证.

生:不妨设 C 为最大角.若 C 为直角,则 $\angle BAD = \frac{\pi}{2} - B, \angle CAD = 0 = \frac{\pi}{2} - C$,故 $b \sin C = c \sin B$ 对于直角三角形成立;若 C 为钝角,则 $\angle BAD = \frac{\pi}{2} - B, \angle CAD = C - \frac{\pi}{2}, \cos \angle CAD = \cos \left(C - \frac{\pi}{2} \right) = \sin C, b \sin C = c \sin B$ 对于钝角三角形也成立.

师:所以 $b \sin C = c \sin B$ 对任意三角形都成立.你还能有什么发现吗?

$$\text{生1: } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

师:很好!这个比式比原先的积式更对称,更漂亮!

$$\text{生2: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}.$$

师:依据是什么?

生2:三角形边角的对称性.

师:很好!结合这两位同学的发现,我们得到了一个重要结论: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.这个结论更对称、更简洁、更和谐、更统一,极具数学美感!这么美的结论,我们给它一个专有名称——正弦定理(板书:正弦定理)!你能用文字语言描述该定理吗?

生:三角形的各边与它所对角的正弦的比相等.

师:很好!总结得很到位,这样对于正弦定理

的理解又上升了一个层次！

师：接下来，我们简单回顾一下：正弦定理和余弦定理的探究过程都是利用向量作为工具，向量等式 $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$ 数量化，类比余弦定理，除了向量法之外，你还能有其他方法证明正弦定理吗？

生1：几何法。

生2：坐标法。

师：这两种方法分别体现了什么重要的数学思想方法？

生：几何法，化斜为直，化归思想；坐标法，算两次，方程思想。

师：很好！几何法有没有体现算两次的思想？

生：有，对高算两次。

师：非常好。试用几何法证明正弦定理。

生：不妨设 C 为最大角。若 C 为直角（图3），则 $c \sin B = b$ ，即 $\frac{b}{\sin B} = c = \frac{c}{\sin C}$ ；若 C 为锐角（图4），对 BC 边上的高 AD 分别在 $\text{Rt}\triangle ADB$ 和 $\text{Rt}\triangle ADC$ 可得 $c \sin B = AD = b \sin C$ ，即 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ；若 C 为钝角（图5），对 BC 边上的高 AD 分别在 $\text{Rt}\triangle ADB$ 和 $\text{Rt}\triangle ADC$ 可得 $c \sin B = AD = b \sin(\pi - C) = b \sin C$ ，即 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 。再由三角形的对称性可得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 。

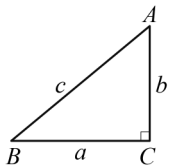


图3

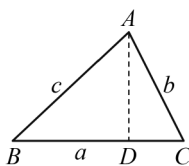


图4

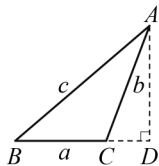


图5

师：很棒！这种对高算两次的思想过程简洁，非常漂亮！还可以对三角形哪些特征量算两次得到正弦定理？

生：面积。

师：很好。请大家完成课后习题第7题(3)利用面积算两次证明正弦定理。三角形还有类似的特征量，对其算两次得到正弦定理吗？

生：(陷入沉思)感觉还有，但是现在想不到！

师：的确有，比如正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 的比值有何意义？能不能作为三角形特征

量，对其算两次得到正弦定理？由于课堂时间有限，留给大家课后继续探究！请参考教材第102页习题第10题。

师：刚才我们探究并证明了正弦定理，接下来我们来应用正弦定理。请问正弦定理有几个等式？

生：3个。

师：每个等式涉及三角形几个基本元素？分别是什么？

生：4个；分别是两边及其两个对角。

师：很好！接下来，请看例题。

例1 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $A = 30^\circ$, $B = 120^\circ$, $b = 12$ ，求 a 。

变式 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $A = 30^\circ$, $B = 120^\circ$, $b = 12$ ，求 c 。

例2 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $c = \sqrt{6}$, $A = 45^\circ$, $a = 2$ ，求 C 。

变式 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $c = \sqrt{6}$, $A = 45^\circ$, $a = 2\sqrt{3}$ ，求 C 。

设计意图 例题主要涉及利用正弦定理可以解决解三角形的两种常见类型，再结合三角形内角和为 180° 进行变式求第三条边；以及已知两边及其一边对角时解的多种情形进行变式。

师：解三角形是已知三角形中3个基本元素（至少有一边），求其他3个基本元素。那么，正弦定理可以解决哪些类型的解三角形问题？

生：已知两角和任意一边，求其他边和角；也可以是已知两边和其中一边的对角，求另一边的对角，进而求出其他边和角。

3 教学反思

(1) 注重比较，挖掘新教材的编排意图

“解三角形”是高中数学的重要内容，也是新高考的重点与热点，近几年大都以解答题的形式呈现。新课标涉及解三角形的“内容与要求”，即“借助向量的运算，探索三角形的边长和角度的关系，掌握余弦定理、正弦定理；能用余弦定理、正弦定理解简单的实际问题”。新课标展现了平面向量研究几何问题的功能性和一般方法，突出了向量的工具性作用。苏教版高中数学新教材与旧教材相比，对“解三角形”的内容和编排顺序做了很大调整，将正弦定理放在余弦定理之后，正弦定理和余弦定理的证明统一用向量法，这体现了新教材对平面向量作为工具的重视。在日常教学中，学

生对于向量作为工具解决问题的意识不强.无论是定理(正弦定理、余弦定理等)、公式(两角和与差的余弦公式等)和结论(如射影定理)的推导证明,还是利用向量解决问题,学生很难想到把向量作为工具.造成这种现象的原因,很大部分是学生没有运用向量作为工具的意识,没有充分体会到向量工具的优越性.

本章第一节通过向量的数量积运算将向量等式转化为数量等式,得到余弦定理;第二节正弦定理的探究过程让学生进一步感受这种转化方法的价值.向量等式两边同时点乘不同的向量可能得到不同的数量关系,这种方法有利于培养学生的“数学探究”“自主研究”的能力,激发学生的求知欲,增强思维的发散性,提高学生数学学习的兴趣.

(2) 注重联系,体现思维的深刻性

高中数学中的定理不是孤立存在的,而是共存于相关重要数学内容的定理体系之中.在定理体系中,用联系的观点去学习定理,有利于让学生形成定理体系,有利于让学生对定理体系有一个宏观的认识和整体的把握.相反,让学生孤立地学习定理,往往会造成学生脑海中定理体系的碎片化,无法形成相应的知识网络.

在本例中,新教材正弦定理的导入问题是“还有其他途径将向量等式 $BC = BA + AC$ 数量化吗?”正弦定理的这种导入设计是本章第一节余弦定理导入设计的延续,都是向量等式数量化.而在旧教材中,则是从特殊的直角三角形入手,先得到正弦定理,再提出一般化的猜想.相比之下,旧教材的导入更符合学生的认知规律,突出数学的思想方法.那为何新教材还是要作这样的调整呢?新课标在课程结构的设计依据中明确指出,要“依据数学学科特点,关注知识之间的关联”.新教材将正弦定理和余弦定理两者联系起来看待,采用同一个问题导入,自然而然地揭示它们之间内在的关联性.

(3) 注重变化,体现思维的灵活性

高中数学定理的教学不仅要注重定理本身证明方法的变化,还要注意定理运用的情境的变化,以定理的教学为载体培养学生思维的灵活性与发散性.在本例中,正弦定理的证法多样,灵活性强.新教材将正弦定理的证明方法以不同形式呈现,沿用了前一节的“向量式”问题导入,顺其自然给出了向量法证明过程,并将作高法(化斜为直)作

为思考题呈现给学生,而将面积法以课后证明题出现,外接圆法以课后探究题出现,具有一定的发散性.而作高法、面积法和外接圆法这些证法又可以统一,都可以看作是利用三角形的特征量算两次得到正弦定理.具体而言,作高法是对三角形一边上高算两次,面积法是对三角形面积算两次,外接圆法是对三角形外接圆的直径算两次.因此,正弦定理的证法呈现出多维性、灵活性、发散性,也具有一定的聚敛性.

(4) 合情推理,体现思维的自然性

演绎推理往往用于证明,而合情推理往往用于发现.高中数学定理的教学要注重合情推理的运用,这样可以使定理的获得更为自然.例如,对于向量等式数量化的处理,即向量等式作哪些特殊的数量积运算,学生首先想到的是两边平方得到余弦定理,然后两边同时点乘一个已知向量,进而引导学生将此推广到两边同时点乘一个与已知向量平行的非零向量都可以得到射影定理,而平行和垂直是两种特殊的位置关系,学生自然会联想到两边同时点乘一个与已知向量垂直的向量.

(5) 渗透美育,发现与欣赏数学美

余弦定理本质上是直角三角形勾股定理的推广,体现了一般三角形边角关系的“统一性质”,体现了“统一美”.正弦定理也体现了一般三角形边角关系的“统一性质”,也体现了“统一美”.但是从教学价值角度看其内涵更为丰富.比如,正弦定理的推导过程可以让学生充分感受三角形的边角关系的对称性;对公式结构特征的分析,将推导过程中的三个结果 $b\sin C = c\sin B$, $a\sin B = b\sin A$, $c\sin A = a\sin C$ 统一为 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$,让学生充分感受公式形式上的对称美、简洁美、和谐美和统一美,引导学生发现、欣赏数学之美,进一步发挥数学在美育上的育人价值.

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[M].北京:人民教育出版社,2020:26,69-70.
- [2] 章建跃.利用几何图形建立直观通过代数运算刻画规律——“平面向量及其应用”内容分析与教学思考[J].数学通报,2020(12):4-13,29.
- [3] 章建跃.如何理解用向量法推导余弦定理和正弦定理的设计意图[J].中小学数学(高中版),2021(4):66,64.