

加强变式与关联, 促进核心素养发展

——以高三第一轮复习课“椭圆及其标准方程”为例

李 翠¹, 刘玉华^{1, 2}

(1. 山东省滨州实验中学; 2. 临沂大学士博数学教育研究院)

摘 要: 以高三第一轮复习课“椭圆及其标准方程”的教学为例, 就课堂教学中如何从教材中的题目出发设计题组, 加强问题的变式与关联, 落实数学核心素养, 给出做法和看法.

关键词: 椭圆及其标准方程; 思维导图; 一题多变

《普通高中数学课程标准(2017年版)》(以下简称《标准》)指出, 高中数学教学要以发展学生数学核心素养为导向, 创设合适的教学情境, 启发学生思考, 引导学生把握数学内容的本质. 美国著名数学家、教育家乔治·波利亚曾指出, 一个专心的、认真备课的教师能够拿出一个有意义但又不太复杂的题目, 去帮助学生挖掘该问题的各个方面, 使得通过这道题就像通过一道门户, 将学生引入一个完整的理论领域.

在“四新”(新高考、新课程、新课标、新教材)背景下, 传统的“灌输+记忆”“题型+训练”教学模式满足不了课堂教学的要求. 笔者反思自己的课堂教学, 尝试从教材中最基础的题目入手, 通过对一道题或一个材料的深入研究, 纵横联系, 根据其内在的学习线索将孤立的问题“串”起来, 科学、合理、有序地组织学生进行相关数学探索活动, 揭示数学问题的本质, 从而完成一节课的教学任务, 达成该节课的多维目标. 下面以高三第一轮复习课“椭圆及其标准方程”的教学为例, 就课堂教学中如何从教材中的题目出发, 设计题组, 加强问题的变式与关联, 让数学核心素养在复习课中得到落实, 浅谈一些自己的看法.

一、立足基础, 思维导图串主线

笔者出示的第一个题组为基础题组, 题目设置宜简不宜繁、宜少不宜多, 《标准》要求的内容为该题组设置的依据. 师生利用该题组, 把其中蕴含的知识、技能、方法、思想提炼出来, 形成思维导图, 构建知识网络, 发展学生的数学抽象和逻辑推理素养.

教学片断1: 教师出示相对简单的四道练习题, 让学生回答其中蕴含的椭圆的定义、椭圆的标准方程等知识点及用到的数学思想方法等, 由学生构建出关于椭圆及其标准方程的思维导图, 然后由教师补充完善.

练习1: 平面内动点 $P(x, y)$ 满足以下条件, 则动点 P 的轨迹是椭圆的是 ().

(A) $\sqrt{x^2 + (y+4)^2} + \sqrt{x^2 + (y-4)^2} = 8$

(B) $\frac{\sqrt{(x-4)^2 + y^2}}{\left|x - \frac{25}{4}\right|} = \frac{4}{5}$

(C) $\frac{\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}} = \sqrt{2}$

(D) 已知 $A(-4, 0)$, $B(4, 0)$, 直线 AP 的斜率与

收稿日期: 2022-03-22

基金项目: 山东省教育科学“十四五”规划课题——高中数学“一题一课”教学模式的实践研究(2021zc285);

滨州市“学科育人工程”研究专项课题——如何实现高中数学育人价值的研究(BZXKYR-216).

作者简介: 李翠(1982—), 女, 一级教师, 主要从事高中数学教学研究.

直线 BP 的斜率的商是2

练习2: 已知中心在坐标原点的椭圆长轴长为10, 短轴长为6, 则椭圆的标准方程为_____.

练习3: 若方程 $\frac{x^2}{m-2} + \frac{y^2}{6-m} = 1$ 表示椭圆, 则 m 的取值范围是_____.

练习4: 设椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上一点 P 的横坐标是3, 则点 P 到椭圆左焦点的距离 $|PF_1|$ = _____, 点 P 到椭圆右焦点的距离 $|PF_2|$ = _____.

思维导图如图1所示.

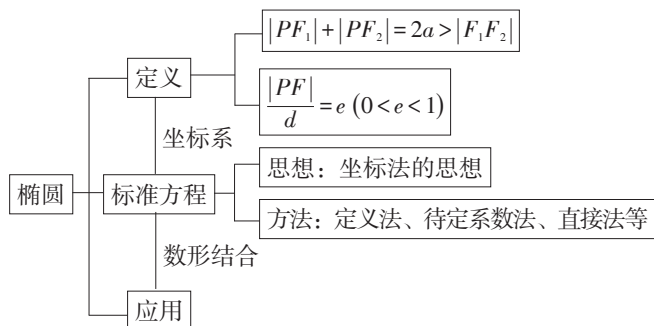


图1

该题组中的题目原型均来源于教材, 练习1回顾了椭圆的第一定义、第二定义及形成椭圆的常见方法; 练习2回顾了椭圆的标准方程的两种形式及求椭圆标准方程的方法; 练习3帮助学生进一步认识椭圆标准方程的特点; 练习4强化巩固椭圆的定义和标准方程. 由此可见, 该题组始终围绕椭圆及其标准方程这一核心内容进行设置, 通过思维导图的构建, 让学生进一步体会知识的整体性和系统性, 提高学生的抽象概括能力, 发展学生的逻辑推理素养.

二、扎根教材, 典例导解现内涵

以一道典型题目为抓手, 充分进行前挂后联、纵横联系, 师生一起寻找解决此类问题的常见思路和方法, 进一步深化坐标法思想, 发展学生的逻辑推理素养.

教学片断2: 教师出示例题, 学生给出此题的解法, 师生共同讨论, 补充完善.

例 如图2, 已知圆 A 的半径为10, 点 B 为圆 A 内一定点, 且 $|AB| = 8$, 建立合适的平面直角坐标

系, 回答下列问题.

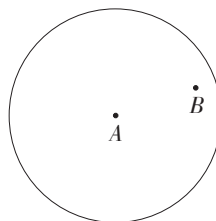


图2

(1) 点 P 是圆 A 上任意一点, 线段 BP 的垂直平分线 l 和半径 AP 相交于点 M . 当点 P 在圆上运动时, 动点 M 的轨迹方程为_____.

(2) 点 P 是圆 A 上任意一点, 过点 P 作 AB 所在直线的垂线段 PD , 垂足为点 D , 点 M 在线段 DP 上, 且 $\frac{|DM|}{|MP|} = \frac{3}{2}$. 当点 P 在圆上运动时, 动点 M 的轨迹方程为_____.

(3) 直线 AM , BM 相交于点 M , 且它们的斜率之积为 $-\frac{9}{25}$, 动点 M 的轨迹方程为_____.

师: 三道小题都是要求动点 M 的轨迹方程, 分别用到了什么方法?

生₁: 第(1)小题中动点 M 满足等量关系 $|MP| = |MB|$ 且 $|MA| + |MP| = |AP|$, 所以 $|MA| + |MB| = |AP| = 10 > |AB|$, 所以点 M 的轨迹为以 A, B 为焦点的椭圆, 所以此题是用定义法求得椭圆的轨迹方程.

生₂: 第(2)小题中动点 M 满足等量关系 $\frac{|DM|}{|MP|} = \frac{3}{2}$, 由于动点 M 的运动与点 P 的运动息息相关, 故此题选用的方法是相关点法.

生₃: 第(3)小题中动点 M 满足等量关系 $k_{AM}k_{BM} = -\frac{9}{25}$, 此题根据题意可以直接建立动点 M 坐标满足的方程, 所以此题选用的方法是直接法.

教师PPT展示三道小题的规范解题步骤, 具体过程略.

教师进一步提出问题: 这三道小题都是求动点的轨迹方程, 结论均是椭圆的标准方程. 求动点的轨迹方程的一般步骤是什么?

师生活动: 学生思考回答, 教师补充完善.

求轨迹方程的一般步骤如下.

(1) 建立适当的坐标系, 用有序实数对 (x, y) 表

示曲线上任意一点 M 的坐标.

(2) 写出适合条件 p 的点 M 的集合 $P = \{M | p(M)\}$.

(3) 用坐标表示条件 $p(M)$, 列出方程 $f(x, y) = 0$.

(4) 将 $f(x, y) = 0$ 化简为最简形式.

(5) 说明以化简后的方程的解为坐标的点都在曲线上.

教师总结: 无论用哪一种方法求轨迹方程, 都要按照上述步骤思考. 求轨迹方程的关键点: 一是建立适当的坐标系, 使方程形式简洁; 二是根据已知条件, 寻找动点 M 满足的等量关系; 三是注意验证化简后的方程是否为所求的曲线方程.

在学生了解了求解步骤之后, 教师提出以下追问.

追问1: 求动点轨迹方程问题的一般思路是什么?

师生活动: 学生思考回答, 教师补充完善.

求动点轨迹方程问题的一般思路, 如图3所示.

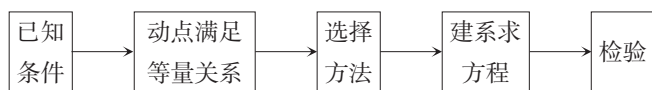


图3

追问2: 设点 E 为例题第(1)小题所求动点 M 的轨迹上的一点, 若满足 $\angle AEB = 60^\circ$, 则 $\triangle AEB$ 的周长为_____; 面积为_____.

追问3: 若点 E 为例题第(1)小题所求动点 M 的轨迹上一动点, 则 $\triangle AEB$ 的周长为_____; 面积最大值为_____.

师生活动: 学生思考回答, 教师补充完善, 进一步渗透焦点三角形相关知识.

例题以人教A版《普通高中教科书·数学》选择性必修第一册第115页习题3.1第6题为原型, 紧扣推导椭圆标准方程的基本思想——坐标法, 通过整合教材上的例题、习题, 把散落的关于椭圆定义与标准方程的知识点串成有机的“珍珠链”, 让学生进一步深化对椭圆定义的理解, 掌握求轨迹方程的基本方法, 感悟数形结合思想, 体会坐标法的普适性, 提高学生解决综合问题的能力.

三、指向高考, 一题多变活思维

针对高考由传统的“知识立意”考查向“价值引

领、素养导向、能力为重、知识为基”综合考查的转变, 高考第一轮复习我们采取的做法是抓住典型题目, 以其为载体, 从不同角度对该题目进行变式, 挖掘其内在价值, 进而发展学生的发散性思维, 培养学生的创新意识, 帮助学生学会思考.

1. 教师示范变式, 激活学生思维

教学片断3: 教师在例题第(1)小题的基础上进一步出示以下两个变式, 让学生回答, 师生共同进行补充完善.

变式1: 如图4, 若圆 B 的半径为2, 一动圆 M 与圆 A 内切且与圆 B 外切, 则动圆圆心 M 的轨迹方程为_____.

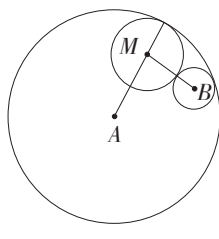


图4

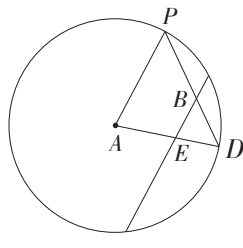


图5

变式2: 如图5, 点 P 是圆 A 上任意一点, 若 PB 的延长线交圆 A 于点 D , 过点 B 作 AP 的平行线交 AD 于点 E , 当点 P 在圆上运动时, 动点 E 的轨迹方程为_____.

学生有例题第(1)小题的解题经验, 很容易得出这两个变式的结论.

对于变式1, 以 AB 的中点为原点, 以 AB 所在直线为 x 轴, 建立平面直角坐标系. 设圆 M 的半径为 r .

因为动圆 M 与圆 A 内切且与圆 B 外切,

所以 $|MA| = 10 - r$, $|MB| = 2 + r$.

所以 $|MA| + |MB| = (10 - r) + (2 + r) = 12 > |AB| = 8$.

所以点 M 的轨迹为以 A, B 为焦点的椭圆 (下略).

对于变式2, 以 AB 的中点为原点, 以 AB 所在直线为 x 轴, 建立平面直角坐标系.

因为 $AP \parallel BE$,

所以 $\angle APD = \angle EBD$.

因为 $|AP| = |AD|$,

所以 $\angle APD = \angle ADP$.

所以 $\angle EBD = \angle ADP$.

所以 $|EB| = |ED|$.

因为 $|EA| + |ED| = |AD|$,

所以 $|EA| + |EB| = |EA| + |ED| = |AD| = 10 > |AB| = 8$.

所以点 M 的轨迹为以 A, B 为焦点的椭圆(下略).

师:大家反应非常敏捷,在解答平面解析几何题目时,我们的基本思路是先用几何眼光去观察,再用坐标法推理、论证和求解,一定不要忽视几何要素的分析这一重要环节.在历年的高考试题中,也是这样考查的,请大家看下面两道高考试题,并进行求解.

题目1 (2013年全国I卷·理20) 已知圆 $M: (x+1)^2 + y^2 = 1$, 圆 $N: (x-1)^2 + y^2 = 9$, 动圆 P 与圆 M 外切并且与圆 N 内切, 圆心 P 的轨迹为曲线 C .

(1) 求 C 的方程;

(2) 略.

题目2 (2016年全国I卷·理20) 设圆 $x^2 + y^2 + 2x - 15 = 0$ 的圆心为 A , 直线 l 过点 $B(1, 0)$ 且与 x 轴不重合, l 交圆 A 于 C, D 两点, 过点 B 作 AC 的平行线交 AD 于点 E .

(1) 证明 $|EA| + |EB|$ 为定值, 并写出点 E 的轨迹方程;

(2) 略.

学生很快解答以上两道高考试题, 解答过程略. 教师抓住时机表扬回答问题的学生, 充分调动学生思考的积极性.

在本环节的教学, 教师在例题的基础上不断变式, 在椭圆及其标准方程这一主线的引领下, 注重问题之间的关联, 最终指向高考试题, 突出对解决解析几何问题基本思路的教学, 旨在激活学生的思维.

2. 学生尝试变式, 学会思考

教学片断4: 有了例题第(1)小题的变式经验, 教师鼓励学生对例题第(2)小题进行变式, 学生得到以下两个变式, 并进行解答, 解答略.

变式3: 将母题条件“点 M 在线段 DP 上”改为“点 M 在线段 DP 的延长线上”. 当点 P 在圆上运动时, 动点 M 的轨迹方程为_____.

变式4: 将母题条件“点 M 在线段 DP 上”改为“点 M 在直线 DP 上”. 当点 P 在圆上运动时, 动点 M 的轨迹方程为_____.

教师在学生变式的基础上, 出示以下高考试题,

并要求学生求解.

题目3 (2011年陕西卷·理17) 如图6, 设点 P 是圆 $x^2 + y^2 = 25$ 上的动点, 点 D 是点 P 在 x 轴上的射影, 点 M 为 PD 上一点, 且 $|MD| = \frac{4}{5}|PD|$. 当点 P 在圆上运动时,

(1) 求点 M 的轨迹 C 的方程;

(2) 略.

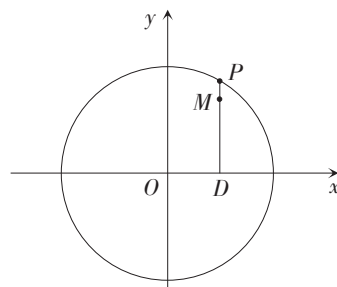


图6

本环节, 学生在教师变式的基础上尝试变式, 学会研究数学问题的“套路”. 教师通过展示高考试题, 使学生认识到了高考试题可以在教材中找到原型, 深化了学生研读教材的意识, 促进了学生阅读自学、独立思考习惯的养成, 帮助学生学会了数学地思考与表达.

3. 师生共同变式, 强化思维

教学片断5: 有了例题第(1)小题与第(2)小题的变式经验, 教师鼓励学生对例题第(3)小题进行变式, 学生得到以下变式, 并进行解答, 教师补充完善.

变式5: 将母题条件“它们的斜率之积为 $-\frac{9}{25}$ ”改为“它们的斜率之积为 -1 ”. 则动点 M 的轨迹方程为_____.

变式6: 将母题条件“它们的斜率之积为 $-\frac{9}{25}$ ”改为“它们的斜率之积为 $-\frac{25}{9}$ ”. 则动点 M 的轨迹方程为_____.

变式7: 将母题条件“它们的斜率之积为 $-\frac{9}{25}$ ”改为“它们的斜率之积为 $\frac{9}{25}$ ”. 则动点 M 的轨迹方程为_____.

变式8: 将母题条件“它们的斜率之积为 $-\frac{9}{25}$ ”改为“它们的斜率之积为 $m (m \neq 0)$ ”. 则动点 M 的轨迹方程为_____.

变式5、变式6、变式7的解答过程略. 对于变式8, 学生解答不够完善, 教师补充完善, 出示规范的解题过程, 并进一步总结规律.

师: 如果设点 $A(-a, 0)$, 点 $B(a, 0)$, 其中 $a > 0$, 动点 $M(x, y)$, 则动点 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{-ma^2} = 1$ ($x \neq \pm a$). 当 $m < 0$ 且 $m \neq -1$ 时, 点 M 的轨迹为椭圆 (A, B 两点除外). 具体而言, 当 $-1 < m < 0$ 时, 椭圆焦点在 x 轴上, AB 为其长轴; 当 $m < -1$ 时, 椭圆焦点在 y 轴上, AB 为其短轴. 当 $m = -1$ 时, 点 M 的轨迹是以 AB 为直径的圆 (A, B 两点除外). 当 $m > 0$ 时, 点 M 的轨迹为双曲线 (A, B 两点除外).

教师说明该题为2011年高考数学湖北卷理科第20题, 揭示了到两个定点的连线的斜率之积为非0常数 m 的点的轨迹, 加上 A, B 两点所形成的曲线 C 就是圆锥曲线, 可以是圆、椭圆或双曲线, 这是圆锥曲线的另外一种定义. 随后出示以下高考试题, 由学生进行解答.

题目4 (2019年全国Ⅱ卷·理21) 已知点 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, 动点 $M(x, y)$ 满足直线 AM 与 BM 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$. 记点 M 的轨迹为曲线 C .

- (1) 求 C 的方程, 并说明 C 是什么曲线;
- (2) 略.

题目5 (2010年北京卷·理19) 在平面直角坐标系 Oxy 中, 点 B 与点 $A(-1, 1)$ 关于原点 O 对称, P 是动点, 且直线 AP 与 BP 的斜率之积等于 $-\frac{1}{3}$.

- (1) 求动点 P 的轨迹方程;
- (2) 略.

题目6 (2012年四川卷·文21) 如图7, 动点 M 与两定点 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ 构成 $\triangle MAB$, 且直线 MA , MB 的斜率之积为4. 设动点 M 的轨迹为 C .

- (1) 求轨迹 C 的方程;
- (2) 略.

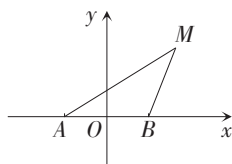


图7

有了前面的变式做铺垫, 学生掌握了教材的基础知识, 学会了基本技能、基本思想, 有了基本活动经验, 学生可以轻松解答以上三道高考试题. 在此基础上, 教师出示课后思考题.

思考题1: 我们知道, 平面内与两个定点 F_1, F_2 的距离的和等于常数 (大于 $|F_1F_2|$) 的点的轨迹是椭圆. 那么, 若平面内与两个定点 F_1, F_2 的距离的差、积、商等于常数的点的轨迹又是什么呢?

思考题2: 例题第(3)小题及相应的变式中, 直线 AM, BM 相交于点 M , 当它们的斜率之积为常数时, 我们已经探究了动点 M 的轨迹, 那么, 若直线 AM, BM 的斜率之和、之差、之商为常数时, 动点 M 的轨迹是什么呢?

通过这两道思考题, 进一步启迪学生的思维, 让学生学会对题目进行深度挖掘, 拓宽思维的深度和广度, 对题目进行变式和创新, 进一步理解知识的整体性、逻辑的连贯性、思想的一致性、方法的普适性和思维的系统性, 掌握数学学习的规律.

四、反思总结, 一课归一展素养

“一课归一”指的是学生对一节课的“四基”进行盘点、反思和总结, 构建知识网络, 如图8所示.

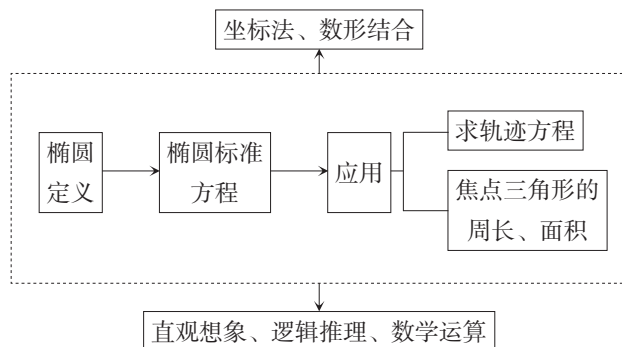


图8

教师不断补充完善, 进一步将数学核心素养落实到位. 主要通过以下四个问题进行总结.

- (1) 本节课, 我们解决了哪些类型的问题?
- (2) 在解决这些问题的过程中用到了哪些知识、技能?
- (3) 在解决这些问题的过程中用到了哪些思想、方法?

(4) 上完本课后, 你有哪些感悟和体会? 还有哪些疑惑?

五、结束语

本节课根据高三第一轮复习的特点, 以教材中的例题、习题为原型, 从基础知识入手, 注重加强问题的变式与关联, 内容由浅入深, 循序渐进. 在前三个环节中, 不仅从不同的角度对“题”进行挖掘, 也对同一道“题”进行变式. 根据学生的认知规律和认知水平, 既有教师的示范引领, 也有学生的思维翱翔, 较好地帮助

学生掌握“四基”, 提升“四能”, 达成“三会”, 从而学会数学地思考. 最后的反思总结, 有利于帮助学生养成反思的习惯, 建构知识网络, 让核心素养的落实更加到位, 实现数学育人.

参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部制定. 普通高中数学课程标准(2017年版)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2018.
- [2] 张文海. “一题一课”: 让高三数学复习走向素养落实[J]. 数学通报, 2020, 59(7): 30-34.

(上接第6页)

是否充分, 合作交流是否真实有效. 线下教学, 教师可以更直接、快捷地了解教学效果和教学目标的达成度, 进而及时调整教学节奏、改进教学方法.

线下教学, 需要更优质、高效的教学设计, 不仅需要教师透彻理解教学内容的重点、难点和关键点, 而且需要教师根据教学内容的思维层次和难易程度设计符合学生认知基础和思维特点的、梯度合理的教学方案, 努力让课堂教学更加简捷、流畅和高效.

不可否认, 线下教学易受时间与空间的制约. 学生思考、练习的结果, 教师难以做到及时回收、反馈, 诊断、评价多受自身直接经验的约束, 难以做到点对点精准把握, 难以进行个性化、差异化指导, 等等.

以上分析告诉我们, 实施线上线下融合教学, 必须根据教学内容的特点与需要做好周密谋划和精心设计. 课前, 教师可以给学生派发预习提纲、尝试解决练习或导学问题, 让学生通过阅读教材、反思质疑, 初步理解新课所要学习的内容, 及时提交问题答案, 教师借助数据反馈, 实施有针对性的课堂教学. 课

后, 教师可以借助网络平台布置在线作业, 学生在线提交, 教师在线批阅, 并通过数据回收分析进行点对点辅导与帮助, 切实发挥线上线下融合教学的优势.

“互联网+”深度融入教育教学是不以人们的意志为转移的必然事件. 作为教育工作者, 我们必须勇立潮头、勇毅前行, 充分发挥现代信息技术辅助教学的正向价值, 将数学核心素养的培养和落实放在首位, 以线上线下融合教学的效益为最终目标, 戮力同心, 积极作为.

参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部制定. 普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [2] 教育部基础教育课程教材专家工作委员会. 《普通高中数学课程标准(2017年版)》解读[M]. 北京: 高等教育出版社, 2018.
- [3] 张永超. 智慧课堂觅智慧 思维学科话思维: 关于畅言智慧课堂教学系统在数学教学中应用的思考[J]. 中国数学教育(高中版), 2018(9): 2-6.



掌握教学方法, 提高教学能力

微信扫码 >>> 获取本刊配套资源

听作者说/课例视频/课件资源/编辑问答/会员专享/文章投票