

2022年高考数列专题命题研究

仇善丽(山东省烟台第一中学)

摘要:针对2022年各地高考的数列试题考查内容和命题特点,总结试题分布规律,剖析命题依据,揭示命题意图,从基础性、综合性、创新性、应用性等方面进行分析,并提出2023年数列专题的复习备考建议。

关键词:高考;数列;命题思路;复习建议

文章编号:1002-2171(2023)4-0066-03

数列是刻画离散现象的数学模型,是高中数学的重要内容之一。由于其在测试学生的逻辑推理能力和理性思维水平,以及考查学生的创新意识和创新能力等方面有着不可替代的作用,所以在历年高考中占有重要地位。2022年高考数学试卷中,对数列专题的考查符合《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》[以下简称《课标(2020年修订)》]的要求。试题坚持素养导向、能力为重的命题原则,重视数学本质,突出理性思维、批判质疑、勇于探究的科学素养,体现了对学生关键能力的考查;同时,试题密切联

系实际生活,让学生体会生活中数学的存在、作用和魅力,激发其学习热情和科学精神,对学生的数学基础、关键能力、学科素养和心理素质都提出了很高的要求,在引导高中数学教学破除题海战术、题型套路和机械刷题等方面具有良好的导向作用。

1 考查内容分析

2022年高考数学全国甲卷、全国乙卷、新高考卷Ⅰ、新高考卷Ⅱ、北京卷关于数列内容的考查情况见表1。

表1 2022年高考数学部分试卷中数列内容的考查情况

卷别	题号、题型	分值	考查内容
全国甲卷	理 17(解答题)	12	数列前 n 项和 S_n 与通项 a_n 之间的关系问题,以及等差数列、等比数列的概念与运算
	文 18(解答题)	12	数列前 n 项和 S_n 与通项 a_n 之间的关系问题,以及等差数列、等比数列的概念与运算
全国乙卷	理 4(选择题)、8(选择题)	10	数列创新问题;等比数列的运算
	文 10(选择题)、13(填空题)	10	等比数列;等差数列的运算
新高考卷Ⅰ	17、22(解答题)	12+	数列前 n 项和 S_n 与通项 a_n 之间的关系问题,递推数列、数列求和;数列与函数综合
新高考卷Ⅱ	3(选择题)、17(解答题)	17	数列模型的应用;等差、等比数列的运算
北京卷	6(选择题)、14(填空题)、21(解答题)	22	等差数列的概念、性质;数列前 n 项和 S_n 与通项 a_n 之间的关系问题、递推关系;数列创新问题

从表1不难看出2022年高考数学对数列专题的考查有以下几个特点:

(1)上述试卷都将数列作为必考内容,分数在10—22分之间;北京卷中本专题的比重最大,为22分,其次是新高考卷Ⅱ,为17分;新高考卷Ⅰ除了单

独考查数列外,还与函数融合在一起进行综合考查(新高考卷Ⅰ第22题),所以分值为“12+”。

(2)全国甲卷、乙卷中数列试题难度中等或偏易,新高考卷数列解答题有一定难度,同时新高考卷Ⅰ中的压轴题为数列与导数的综合,北京卷中的数列解答

题也出现在了压轴题的位置。

(3)2022年高考数列专题重点考查函数与方程、转化与化归、分类讨论等数学思想,数学抽象、逻辑推理、数学运算等素养及理性思维和探究精神。

2 命题思路分析

2022年高考数列试题兼顾试题的基础性、综合性、应用性和创新性,展现科学的科学价值和人文价值。坚持多角度、多层次地考查,在全面考查综合数学素养的基础上区分考生的数学能力的差异^[1],力求达到知识与能力的完美融合、传统与创新的和谐统一。

2.1 题目设计新颖灵活,突出创新性

创新是2022年高考数列命题的一大特色。创新设计理念,变换题型和设问方式,促进学生融会贯通、真懂会用,引导中学数学全面教学,夯实基础、灵活学习、创新思考^[2]。

2.1.1 解题方法创新

例1 (2022年高考数学新高考卷I第17题)记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,已知 $a_1=1$, $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列。

(I)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II)证明: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < 2$ 。

评析:此题考查内容包括等差数列的运算、数列前 n 项和 S_n 与通项 a_n 之间的关系、数列的递推关系、裂项相消法求数列和等,皆为数列的基本问题和常规问题。问题是常规的,但解题方法却是新颖的。

不少考生对如何由递推公式 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n+1}{n-1} (n \geq 2)$ 求出数列的通项没有头绪。由于不能求出数列的通项公式,也就不能进行第(II)问的求解。

事实上,如果对递推公式求通项中的“累乘法”能深刻理解并灵活运用,是完全可以顺利求出数列 $\{a_n\}$

的通项公式的。由 $\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} = \frac{n+1}{n-1}$

$\frac{n}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{4}{2} \times \frac{3}{1}$ 可求得 $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ (当然还需验证 $n=1$ 时成立)。

只要求出数列的通项公式,接下来证明 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < 2$ 仅仅是一个裂项相消法求和的问题。当然也可先运用列举法归纳猜想出 $a_n =$

$\frac{n(n+1)}{2}$,然后用数学归纳法证明。此题是试卷解答题的第一道题,却出现了解法的创新,部分考生不能很好地适应,甚至产生了较大的心理波动,从而影响了整体发挥。

不难看出,数列问题的设问方法已经发生变化,从传统的“求通项、求和”向逻辑推理素养等方向转化,融思考、分析、归纳于一体,重点考查考生的逻辑推理、数学抽象、数学运算等素养,使问题有了新的视角。

2.1.2 试题的呈现形式或设问方式创新

例2 (2022年高考数学新高考卷II第17题)已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$ 是公比为2的等比数列,且 $a_2 - b_2 = a_3 - b_3 = a_4 - b_4$ 。

(I)证明: $a_1 = b_1$;

(II)求集合 $\{k | b_k = a_m + a_1, 1 \leq m \leq 500\}$ 中的元素个数。

评析:第(II)问中 $b_k = a_m + a_1$ 化简后可得 $m = 2^{k-2} \in [1, 500]$,可解得 $2 \leq k \leq 10$,从而求出集合 $\{k | b_k = a_m + a_1, 1 \leq m \leq 500\}$ 中的元素个数为9。如果说例1属于解题方法的创新,那么例2应该属于题目呈现形式的创新。此题将数列求和问题与集合的元素个数结合在一起,创新了题目的设问方式,考查知识迁移能力及考生在复杂情境中解决问题的能力。2020年高考数学新高考卷I第18题也与之类似,所以创新试题的呈现形式、设问方式已成为高考试题创新的一个重要组成部分。

2.1.3 数列模型的应用

例3 (2022年高考数学新高考卷II第3题)图1是中国古代建筑中的举架结构, AA', BB', CC', DD' 是桁,相邻桁的水平距离称为步,垂直距离称为举。图2是某古代建筑屋顶截面的示意图,其中 DD_1, CC_1, BB_1, AA_1 是举, OD_1, DC_1, CB_1, BA_1 是相等的步,相邻桁的举步之比分别为 $\frac{DD_1}{OD_1} = 0.5, \frac{CC_1}{DC_1} = k_1,$

$\frac{BB_1}{CB_1} = k_2, \frac{AA_1}{BA_1} = k_3$ 。已知 k_1, k_2, k_3 成公差为0.1的等差数列,且直线OA的斜率为0.725,则 $k_3 = ()$ 。

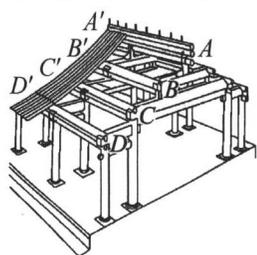


图1

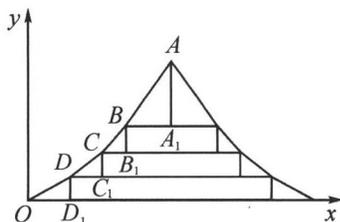


图2

A. 0.75 B. 0.8 C. 0.85 D. 0.9

评析:以司空见惯的人、物、景、事为载体,深入挖掘其中的数学元素设计试题,越来越受到命题人的青睐。此题以古代建筑中的举架结构为背景,融数学文化与数学应用于一体,考查学生数学建模、数据处理、逻辑推理等素养。2021年高考数学新高考卷I第14题“折纸中的数学问题”,2020年高考数学新高考卷I第4题中的“日晷”,以及2019年高考数学全国卷I第4题“断臂的维纳斯”等经典试题与本题都有异曲同工之处。数学学科旨在培养学生运用数学的眼光观察世界、运用数学的思维分析世界、运用数学的语言表达世界。此题很好地体现了能力立意向素养导向的转化,俨然是高考试题创新的体现。

2.1.4 新定义型创新问题

例4 (2022年高考数学全国乙卷理科第4题)

嫦娥二号卫星在完成探月任务后,继续进行深空探测,成为我国第一颗环绕太阳飞行的人造行星。为研究嫦娥二号绕日周期与地球绕日周期的比值,用到数列

$$\{b_n\}: b_1 = 1 + \frac{1}{\alpha_1}, b_2 = 1 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2}}, b_3 = 1 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3}}}$$

...,依此类推,其中 $\alpha_k \in \mathbb{N}^* (k=1,2,\dots)$, 则()。

A. $b_1 < b_5$ B. $b_3 < b_8$ C. $b_6 < b_2$ D. $b_4 < b_7$

评析:此题定义了数列 $\{b_n\}$,属于新定义型创新问题。题目展示了我国现代化建设的新成就,很好地体现了立德树人,爱国主义教育。题目考查知识迁移能力及考生在复杂情境中解决实际问题的能力,同时渗透高等数学中的迭代思想。可根据 $\alpha_k \in \mathbb{N}^* (k=1,2,\dots)$,再利用数列 $\{b_n\}$ 与 α_k 的关系判断 $\{b_n\}$ 中各项的大小,即可求解。

2.2 知识与能力相结合

2022年高考的10份数学试卷均在不同程度上强化了试题的综合性,为选拔优秀人才起到了很好的甄别作用。一方面,增加了同一模块内知识综合的数量,有效考查了学生对所学知识掌握的完整度;另一方面,6份全国卷均加强了不同知识模块间的综合^[3]。

2022年高考数学数列试题对基础知识考查的共同特点是不刻意追求知识覆盖面,基本上只考查了高中数学数列的主干内容,尤为注重考查学生对数学概

念、原理和思想的理解的深刻性,尤其对学生分析问题与解决问题的能力要求较高。

例5 [2022年高考数学全国甲卷理科第17题(文科第18题)]记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,已知 $\frac{2S_n}{n} + n = 2a_n + 1$ 。

(I)证明: $\{a_n\}$ 是等差数列;

(II)若 a_4, a_7, a_9 成等比数列,求 S_n 的最小值。

评析:题目从数列前 n 项和 S_n 与通项 a_n 之间的关系切入,考查递推关系及等差数列、等比数列的概念与运算,属于数列常规问题与基本问题融合在一起考查的类型。

3 复习备考建议

3.1 夯基固本,构建知识网络

新课标、新高考背景下,高三数学复习应避免一味地刷题,盲目追求题目的灵活性、综合性和创新性,结果会适得其反,因为没有根基的创新必定会是空中楼阁。高三复习应紧紧围绕数列的基本问题(概念、性质和运算)、数列的常规问题(三类求通项)、数列的求和、数列模型的应用构建知识网络,达到基本知识体系化、基本方法类型化、解题步骤规范化。梳理各类易错点,力求在如错位相减求和、递推公式求通项等关键地方练就一身“功夫”。夯基固本,追求对知识的深度理解和解题方法的灵活运用。

3.2 突出灵活性与创新性

在夯基固本的基础上,拓展深化,突出灵活性与创新性。例如,数列不等关系的放缩法,数列与其他知识的联系等。同时要侧重数列的创新问题,包括题目情境和呈现方式创新,设问方式和解题方法创新,等等。有了对问题、知识、方法的深度理解,创新就变成了一件水到渠成的事。正所谓“不畏浮云遮望眼,只缘身在最高层”。

参考文献:

[1] 任子朝. 高考命题创新[J]. 中学数学教学参考(上旬), 2018(10):1.
 [2] 任子朝,陈昂. 高考数学加强创新能力考查的研究[J]. 教育理论与实践,2016(3):30-33.
 [3] 向立政,周远方,张云辉. 深度考查关键能力充分发挥育人功能——2022年高考数学试题命题特点及复习教学建议[J]. 中国数学教育(下半月),2022(9):3-13.