“端点效应法”的有效性与局限性

吴志勇，徐庭兰（安徽省合肥一六八中学）

摘　要：求解含参不等式恒成立问题中参数的取值范围，是高考中的常考题型。解决这类问题的基本方法有三种：分离参数、构造函数求参数取值范围；构造含参函数，通过讨论参数取值范围将问题转化为求函数最值问题；通过所构造函数在定义域端点处满足的条件，缩小参数的取值范围，求出使不等式恒成立的必要条件，再证明充分条件，得出参数的取值范围，即所谓的“端点效应”。本文重点探究第三种方法——“端点效应法”的有效性与局限性。

关键词：参数；端点效应法；必要条件；充分条件；恒成立
文章编号：1002-2171(2023)4-0037-04

利用含参不等式恒成立的条件求参数的取值范围，在历年的高考中都是考查的热点。解决这类问题通常采用参变分离构造函数或直接通过讨论参数的取值范围，转化为求最值问题。但遇到比较复杂的问题，这两种方法可能都不适用或过于烦琐。这种情况下，利用“端点效应法”就能很好地缩小参数的取值范围，从而使问题顺利解决。但“端点效应法”也存在局限性。本文重点探究“端点效应法”的应用及其局限性的突破方法。

1　“端点效应法”的定义与解题思路

端点效应法指的是解决一类含参不等式恒成立问题时，可以通过取所构造函数定义域内的某些特殊的值使不等式成立，进而得出恒成立的一个必要条件，初步获得所求参数的范围，再在该范围内讨论，使问题得以顺利解决。利用“端点效应法”解决问题一般可分为以下几步：(1)利用端点处函数值或导数值满足的条件，初步获得参数的取值范围，这个范围即

几何本原体中就变得一目了然，可以达到将一般问题化归为特殊问题的目的。例如，正四棱锥可以看作是由正方体的面对角线构成的，这样只要选择合适的正方体棱长，一定可以将其“放在”正方体中。当然，要能一眼看出如何补形，是需要经过长期训练的。在具体教学中，可以让学生在长方体或正方体中任取顶点或棱上的特殊点连线，看看能“取出”哪些几何体，从而起到熟悉补形法的效果。

4.2　立足几何本质，培养直观想象素养

教学中，引导学生熟悉各种模型并让其识记，是教师易操作、学生易掌握的方法。但如果教师只停留在这个层次上，那么主要是传授技巧，而违背了数学教学的初衷，学生也只会孤立地、片面地看待问题。《课标(2020年修订)》要求“通过高中数学课程的学习，学生能掌握逻辑推理的基本形式，学会有逻辑地思考问题；能够在比较复杂的情境中把握事物之间的关联，把握事物发展的脉络……”数学习题课的目的不是为了解题，而是促进学生的发展。相应的，数学教学的目的不在于教会学生多少模型，而在于提升学生的思维能力。因此，教师不应将目光停留在几何模型的层次上，只有从模型出发，又不依赖模型，才能回到数学本源，真正提升数学素养。

几何作为研究图形问题的数学分支，应着重培养学生的几何直观素养。即使是计算题，也应该在观察图形，抓住几何本质的基础上进行，特别是要抓住几何图形中的基本要素之间的关系。多面体的外接球问题的本质为：球心 O 和截面圆圆心 O' 的连线与球小圆所在平面 α 垂直，设球的半径为 R，$OO'=d$，球小圆的半径为 r，则 $R^2=d^2+r^2$，如图7所示。抓住了这一基本性质，才能做到从有“型”到无“型”。

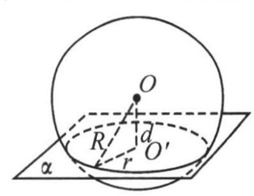

图7

参考文献：
[1]　中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[M].北京：人民教育出版社，2020.

为不等式恒成立的必要条件；(2)利用所得出的参数范围判断函数在定义域内是否单调；(3)若函数在限定参数范围内单调，则必要条件即为充要条件，问题解决；若不单调，则需进一步讨论，直至得到使不等式恒成立的充要条件。

2 "端点效应法"的应用

2.1 "端点效应法"在一次不等式恒成立问题中的应用

基本性质一：

(1)单调函数 $f(x)\geqslant 0$ 在区间$[x_1,x_2]$上恒成立等价于$\begin{cases}f(x_1)\geqslant 0,\\f(x_2)\geqslant 0。\end{cases}$

(2)单调函数 $f(x)\leqslant 0$ 在区间$[x_1,x_2]$上恒成立等价于$\begin{cases}f(x_1)\leqslant 0,\\f(x_2)\leqslant 0。\end{cases}$

例 1 若 $f(x)=xe^{kx}$ 在区间$[-1,1]$上递增，求实数 k 的取值范围。

例 2 （2008 年高考数学天津卷文科第 21(Ⅲ)题）设函数 $f(x)=x^4+ax^3+2x^2+b$，若对于任意的$a\in[-2,2]$，不等式 $f(x)\leqslant 1$ 在 $x\in[-1,1]$上恒成立，求实数 b 的取值范围。

分析：上述例 1 等价于 $f'(x)=(kx+1)e^{kx}\geqslant 0$ 恒成立，即 $g(x)=kx+1\geqslant 0$ 恒成立，利用基本性质一单调函数的"端点效应法"可以得出 $k\in[-1,1]$。例 2 可以将 $f(x)$ 看作是关于 a 的一次函数 $g(x)=x^3a+x^4+2x^2+b-1$，利用基本性质一得出$\begin{cases}g(-2)=-2x^3+x^4+2x^2+b-1\leqslant 0,\\g(2)=2x^3+x^4+2x^2+b-1\leqslant 0\end{cases}$对任意的 $x\in[-1,1]$恒成立，转换为求函数的最值问题，得出参数 b 的取值范围。

反思：以上两道例题都是"端点效应法"在一次函数中的应用，其实这样的解题思想我们在平时的解题过程中也经常使用。利用"端点效应法"的基本性质一不难发现这一解题方法适用于所有单调函数。

2.2 "端点效应法"在二次不等式恒成立问题中的应用

基本性质二：

(1)若 $a>0$，则 $f(x)=ax^2+bx+c\leqslant 0$ 在区间$[x_1,x_2]$上恒成立等价于$\begin{cases}f(x_1)\leqslant 0,\\f(x_2)\leqslant 0。\end{cases}$

(2)若 $a<0$，则 $f(x)=ax^2+bx+c\geqslant 0$ 在区间$[x_1,x_2]$上恒成立等价于$\begin{cases}f(x_1)\geqslant 0,\\f(x_2)\geqslant 0。\end{cases}$

例 3 （2016 年高考数学全国卷Ⅰ文科第 12 题）若函数 $f(x)=x-\frac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则 a 的取值范围是（　　）。

A. $[-1,1]$　　B. $\left[-1,\frac{1}{3}\right]$

C. $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$　　D. $\left[-1,-\frac{1}{3}\right]$

例 4 函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-mx^2-3m^2x+1$ 在区间$[1,2]$上是增函数，求实数 m 的取值范围。

分析：例 3 等价于 $f'(x)=1-\frac{2}{3}\cos 2x+a\cos x\geqslant 0$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 上恒成立，令 $t=\cos x$，则 $f'(x)$ 等价于 $g(t)=-\frac{4}{3}t^2+at+\frac{5}{3}\geqslant 0$ 在 $t\in[-1,1]$上恒成立，因为 $g(t)$是开口向下的二次函数，且在 $t\in[-1,1]$时 $g(t)\geqslant 0$ 恒成立，故可根据"端点效应法"利用基本性质二得出 $g(-1)\geqslant 0$ 且 $g(1)\geqslant 0$，进而得出参数 $a\in\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$。

例 4 等价于 $f'(x)=x^2-2mx-3m^2\geqslant 0$ 在 $x\in[1,2]$上恒成立，因为 $f'(x)$是开口向上的二次函数，且在 $x\in[1,2]$上 $f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，不符合"端点效应法"基本性质二，但本题属于二次函数常见的"定区间动轴"型题目，可以分类讨论得出 m 的取值，也可以根据图像得出参数 m 的取值范围。

反思：通过对这两道例题解法的对比，我们不难得出利用"端点效应"解决有关二次函数在区间上的恒成立问题时，只有符合基本性质二的类型才可使用，不可盲目套用。

2.3 "端点效应法"在含绝对值单调函数中的应用

基本性质三：

函数 $f(x)=|ax+b|$在区间$[x_1,x_2]$上的最大值必在端点处取得。

例 5 （2008 年高考数学浙江卷理科第 15 题）已知 t 为常数，函数 $y=|x^2-2x-t|$在区间$[0,3]$上的最大值为 2，则 $t=$________。

例 6 （2017 年高考数学浙江卷第 17 题）已知 $a\in\mathbf{R}$，函数 $y=\left|x+\frac{4}{x}-a\right|+a$ 在区间$[1,4]$上的最大值为 5，则实数 a 的取值范围是________。

分析：例 5 中可令 $m=x^2-2x$，则 $m\in[-1,3]$，问题转化为求 $y=|m-t|$在 $m\in[-1,3]$上的一次绝对值函数的最大值，由"端点效应法"的基本性质三可得$\begin{cases}|-1-t|=2,\\|3-t|\leqslant 2\end{cases}$或$\begin{cases}|3-t|=2,\\|-1-t|\leqslant 2,\end{cases}$解得$t=1$。

例 6 的解题思想与例 5 类似，可令 $m=x+\frac{4}{x}$，则

$m\in[4,5]$，问题转化为求 $y=|m-a|+a$ 在 $m\in[4,5]$ 上一次绝对值函数的最大值，同理可得 $\begin{cases}|4-a|+a=5,\\|5-a|+a\leqslant5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|5-a|+a=5,\\|4-a|+a\leqslant5,\end{cases}$ 解得 $a\in\left(-\infty,\frac{9}{2}\right]$。

反思：我们可以通过整体代换把复杂的绝对值不等式转换为简单的含参一次绝对值不等式或者绝对值内是单调函数的形式，利用"端点效应法"的基本性质三，减少分类讨论的次数，使复杂的问题得以顺利解决。

2.4 "端点效应法"在端点处函数值为零的恒成立问题中的应用

前面所给的三种类型都是将端点值代入不等式中，就达到了缩小参数取值范围的目的。但在很多时候我们也会遇到端点处的函数值为零的情况，然而这并不意味着"端点效应"就不起作用了。在这种情况下，我们从这一点的导数值出发深入思考，会发现"端点效应法"也会起到缩小参数取值范围的作用。下面给出基本性质四。

基本性质四：

(1)已知 $f(x)\geqslant0$ 在区间 $[a,b]$ 上或 (a,b) 内恒成立。若 $f(a)=0$，则 $f'(a)\geqslant0$；若 $f(b)=0$，则 $f'(b)\leqslant0$。

(2)已知 $f(x)\leqslant0$ 在区间 $[a,b]$ 上或 (a,b) 内恒成立。若 $f(a)=0$，则 $f'(a)\leqslant0$；若 $f(b)=0$，则 $f'(b)\geqslant0$。

例7 〔2015年高考数学北京卷理科第18(Ⅲ)题〕已知 $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$。设实数 k 使得 $f(x)>k\left(x+\frac{x^3}{3}\right)$ 对 $x\in(0,1)$ 恒成立，求实数 k 的最大值。

例8 〔2019年高考数学全国卷Ⅰ文科第20(Ⅱ)题〕已知函数 $f(x)=2\sin x-x\cos x-x$，若 $x\in[0,\pi]$ 时，$f(x)\geqslant ax$，求 a 的取值范围。

分析：例7中的条件等价于 $g(x)=f(x)-k\left(x+\frac{x^3}{3}\right)=\ln\frac{1+x}{1-x}-k\left(x+\frac{x^3}{3}\right)>0$ 当 $x\in(0,1)$ 时恒成立。因为 $g(0)=0$，且 $g'(x)=\frac{2}{1-x^2}-k(1+x^2)=\frac{kx^4+2-k}{1-x^2}$。由"端点效应法"基本性质四可得 $g'(0)=2-k\geqslant0$，所以 $k\leqslant2$。这样我们就得到了使不等式恒成立的一个必要条件 $k\leqslant2$。下证必要条件即为充要条件。当 $k\leqslant2$ 时，因为当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)=\frac{2-k(1-x^4)}{1-x^2}>0$ 恒成立，所以 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内单调递增，所以 $g(x)>g(0)=0$ 恒成立，k 的最大值为2。

例8中可令 $h(x)=2\sin x-x\cos x-x-ax$，问题等价于 $h(x)\geqslant0$ 在区间 $[0,\pi]$ 上恒成立。

因为 $h(0)=0$，且 $h'(x)=\cos x+x\sin x-(a+1)$，所以 $h'(0)=-a\geqslant0$，则 $a\leqslant0$。

又由 $h(\pi)=-a\pi\geqslant0$，所以 $a\leqslant0$。综上可得不等式恒成立的必要条件为 $a\leqslant0$。

当 $a\leqslant0$ 时，$h''(x)=x\cos x$，当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$h''(x)\geqslant0$，所以 $h'(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调递增；当 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 时，$h''(x)\leqslant0$，所以 $h'(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上单调递减。又因为 $h'(0)=-a\geqslant0$，$h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-a-1>0$，$h'(\pi)=-a-2$。

当 $h'(\pi)=-a-2\geqslant0$，即 $a\leqslant-2$ 时，$h'(x)\geqslant0$ 当 $x\in[0,\pi]$ 时恒成立，所以 $h(x)\geqslant h(0)=0$，满足题意。

当 $h'(\pi)=-a-2<0$，即 $-2<a\leqslant0$ 时，由零点的存在性定理可得存在唯一零点 $x_0\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，使得 $h'(x_0)=0$，当 $x\in[0,x_0)$ 时，$h'(x_0)\geqslant0$，$h(x)$ 单调递增；当 $x\in[x_0,\pi]$，$h'(x)\leqslant0$，$h(x)$ 单调递减。

所以 $h(x)$ 的最小值在区间 $[0,\pi]$ 的端点处取得，从而 $h(x)\geqslant0$ 恒成立。

综上可得 $h(x)\geqslant0$ 的充要条件即为 $a\leqslant0$。

反思：通过以上两道例题我们不难看出，虽然利用"端点效应法"可以有效缩小参数的取值范围，但所得到的参数范围仅仅是恒成立的必要条件，此时仍需验证其充分性。在例7中可以很容易地证明必要条件即为充分条件。但在例8中，则需要根据题意进一步探究，通过分类讨论得出不等式恒成立的充分条件。

2.5 "端点效应法"在端点处函数值、一阶导数值均为零的恒成立问题中的应用

基本性质五：

(1)已知 $f(x)\geqslant0$ 在区间 $[a,b]$ 上或 (a,b) 内恒成立，若 $f(a)=0$，$f'(a)=0$，则 $f''(a)\geqslant0$；若 $f(b)=0$，$f'(b)=0$，则 $f''(b)\geqslant0$。

(2)已知 $f(x)\leqslant0$ 在区间 $[a,b]$ 上或 (a,b) 内恒成立，若 $f(a)=0$，$f'(a)=0$，则 $f''(a)\leqslant0$；若 $f(b)=0$，$f'(b)=0$，则 $f''(b)\leqslant0$。

对比基本性质四和基本性质五可以看出，在端点处为零的情况下，右端点处的结论是截然相反的，切不可混淆。

例9 已知函数 $f(x)=2x-\ln(2x+1)$，$g(x)=e^x-x-1$，当 $x>0$ 时，$kf(x)\leqslant g(x)$，求实数 k 的取值范围。

解：可令 $h(x)=kf(x)-g(x)=k[2x-\ln(2x+1)]-(e^x-x-1)$，题设等价于 $h(x)\leqslant 0$ 恒成立。因为 $h(0)=0$，$h'(x)=2k-\frac{2k}{2x+1}-e^x+1$，$h'(0)=0$，$h''(x)=\frac{4k}{(2x+1)^2}-e^x$，由“端点效应法”基本性质五可得 $h''(0)=4k-1\leqslant 0$，则 $k\leqslant\frac{1}{4}$ 是不等式恒成立的必要条件。下证 $k\leqslant\frac{1}{4}$ 也是充分条件。当 $k\leqslant\frac{1}{4}$ 时，$h''(x)=\frac{4k}{(2x+1)^2}-e^x<0$ 在 $x>0$ 时恒成立，所以 $h'(x)$ 在 $x>0$ 时单调递减，则 $h'(x)<h'(0)=0$，进而可得 $h(x)$ 在 $x>0$ 时单调递减，所以 $h(x)<h(0)=0$，满足题意。综上可得，$k\leqslant\frac{1}{4}$ 是不等式恒成立的充要条件。

3 “端点效应法”局限性的破局探究

利用“端点效应法”的基本性质四或基本性质五解决一些特殊类型的恒成立问题时不难发现，由“端点效应”得出的使不等式恒成立的必要条件往往就是充要条件，从而缩小了参数的取值范围，使问题得以顺利解决。但我们也会遇到由“端点效应法”求得的参数取值范围不是不等式恒成立的充分条件的情形，这个时候我们就要进一步探究，找出使不等式恒成立的充要条件，打破“端点效应”的局限性。下面笔者以2020年高考数学全国卷Ⅰ第21题来探究突破“端点效应”局限性的思路。

例10 （2020年高考数学新高考卷Ⅰ理科第21题）已知函数 $f(x)=e^x+ax^2-x$。

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant\frac{1}{2}x^3+1$，求 a 的取值范围。

针对第（Ⅱ）问，众多资料上的解法基本上可以归结为两类：直接含参讨论和参变分离求最值。这两种解法都可以得出参数 a 的取值范围为 $\left[\frac{7-e^2}{4},+\infty\right)$，本文对这两种方法不再赘述。下面我们重点用“端点效应法”对第（Ⅱ）问进行探究，以期得出破解“端点效应法”局限性的方法。

解法探究：令 $h(x)=e^x+ax^2-x-\frac{1}{2}x^3-1$，则 $h(0)=0$，求导得 $h'(x)=e^x+2ax-1-\frac{3}{2}x^2$，则 $h'(0)=0$，再得出 $h''(x)=e^x-3x+2a$，由“端点效应法”的基本性质五，得出 $h''(0)=1+2a\geqslant 0$，这样我们就得出了不等式恒成立的必要条件为 $a\geqslant-\frac{1}{2}$。

证明充分性的过程中，不难发现 $a\geqslant-\frac{1}{2}$ 并不是充分条件。难道“端点效应”失效了？笔者深入思考后认为“端点效应”并未失效。类似于端点0，能够得出使不等式恒成立的必要条件的“端点”可能不止这一个，只不过我们没有深入去挖掘罢了。笔者认为，这样的“端点”x_0 应满足两个条件：$h(x_0)=0$ 且 $h'(x_0)=0$。从图像上理解，可以看作函数图像与 x 轴的交点，且在交点处的切线为 x 轴。下面我们来利用这两个条件求出这个点。

联立 $\begin{cases}h(x)=e^x+ax^2-x-\frac{1}{2}x^3-1=0,\\ h'(x)=e^x+2ax-1-\frac{3}{2}x^2=0\end{cases}(x>0)$，

消去 a，整理得 $(x-2)(2e^x-x^2-2x-2)=0$，易证当 $x>0$ 时，$2e^x-x^2-2x-2>0$，所以满足这两个条件的唯一点为 $x_0=2$，这个点具备与端点同样的作用，可以称之为与端点对应的“内点”。

下面我们利用端点与所求的“内点”再次得出不等式恒成立的必要条件：$\begin{cases}h''(0)=2a+1\geqslant 0,\\ h(x_0)=h(2)=e^2+4a-7\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow a\geqslant\frac{7-e^2}{4}$。

下面再来证明充分性，略。

通过以上解题过程我们可以发现，“端点效应法”并没有失效，只不过是有其局限性。这时我们只要找到了破局的方法——寻找“内点”，仍然可以很好地利用“端点效应法”来解决问题。

4 结语

本文从“端点效应法”的定义和解题思路出发，利用“端点效应法”的五个基本性质解决了五类常见的不等式恒成立问题。但“端点效应法”在遇到一些高考或模考压轴题时，也暴露其本身作为必要条件的局限性。为解决“端点效应法”的局限性，可以找出与端点具有同样功效的“内点”，结合“端点”与“内点”，找出使不等式恒成立的充要条件，从而顺利解决问题。