

定理巧妙化解两弦的斜率和这个主要条件,过程简洁,计算量小. 平移坐标系后,三角形面积不变. 由于 A' 与坐标原点重合, $P'(x_1, y_1), Q'(x_2, y_2)$, 所以 $S_{\triangle PAQ} = S_{\triangle P'A'Q'} = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|$. 注意到 $|x_1 y_2 - x_2 y_1|$ 也是齐次式, 运用齐次化构造技巧

$\left| \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{m(x_1 + y_1) \cdot m(x_2 + y_2)} \right|$, 将面积转化为关于 $k_{A'P'}, k_{A'Q'}$ 的式子求解. 这种解法不仅避免了点 P, Q 坐标的求解, 也避免了直线 PQ 方程的求解及结合韦达定理求解边长, 从而优化了三角形面积求解路径.

利用底边过焦点的阿基米德三角形性质解高考题

甘肃省灵台县第一中学 (744400) 王海燕

阿基米德最早利用逼近思想证明了抛物线的弦与抛物线所围成封闭图形的面积, 等于抛物线的弦与过弦端点的两条切线所围三角形面积的三分之二. 后来人们称由抛物线的弦与过该弦端点的两切线所围成的三角形为阿基米德三角形. 其中该弦称为阿基米德三角形的底边, 阿基米德三角形有许多性质, 底边过焦点的阿基米德三角形有如下常见结论:

如图 1, AB 是过抛物线 $C: x^2 = 2py$ 焦点 F 的弦, C 在点 A, B 处的切线 QA, QB 交于 Q 点, 点 $M(x_0, y_0)$ 为 AB 的中点. $\triangle QAB$ 即为阿基米德三角形, 其中 AB 为阿基米德三角形的底边, 则

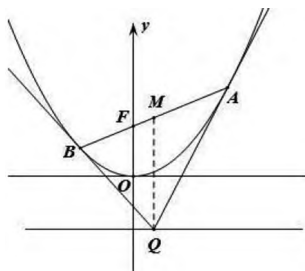


图 1

(1) 切线 QA, QB 的交点 Q 在抛物线 C 的准线上;

(2) 底边上的中线平行于抛物线的对称轴, 即 $x_Q = x_0$;

(3) $\triangle QAB$ 是直角顶点在抛物线准线上的 $\text{Rt}\triangle$, 即 $AQ \perp BQ$;

(4) $FQ \perp AB$;

(5) 阿基米德三角形面积的最小值为 p^2 .

证明: (1) 设直线 AB 的方程为 $y = kx + \frac{p}{2}$, 由

$$\begin{cases} y = kx + \frac{p}{2}, \\ x^2 = 2py, \end{cases} \text{ 得 } x^2 - 2pkx - p^2 = 0. \text{ 设 } A(x_1, y_1),$$

$B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = 2pk, x_1 x_2 = -p^2$. 由 $x^2 = 2py$, 求得 $y' = \frac{x}{p}$, 故抛物线在点 A, B 处切线斜率分别

为 $\frac{x_1}{p}, \frac{x_2}{p}$, 故 QA, QB 的方程分别为 $y - y_1 = \frac{x_1}{p}(x - x_1), y - y_2 = \frac{x_2}{p}(x - x_2)$, 又由点 A, B 在抛物线上, 所以 $x_1^2 = 2py_1, x_2^2 = 2py_2$, 代入两切线方程化简, 可得切线 QA, QB 的方程分别为 $x_1 x = p(y + y_1), x_2 x = p(y + y_2)$, 联立消去 y_1, y_2 , 解得 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{x_1 x_2}{2p} = -\frac{p}{2}$, 所以 $Q(\frac{x_1 + x_2}{2}, -\frac{p}{2})$, 从而过 AB 端点的两条切线的交点 Q , 在抛物线 C 的准线上 $y = -\frac{p}{2}$ 上.

(2) 由 (1) 知两条切线的交点 Q 的横坐标 $x_Q = \frac{x_1 + x_2}{2}$, 而线段 AB 中点 M 的横坐标 $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, 所以 $x_Q = x_0$.

(3) 因为 $k_{AQ} = y'|_{x=x_1} = \frac{x_1}{p}, k_{BQ} = y'|_{x=x_2} = \frac{x_2}{p}$, 故

$k_{AQ} \cdot k_{BQ} = \frac{x_1 x_2}{p^2} = \frac{-p^2}{p^2} = -1$. 所以 $AQ \perp BQ$. 所以此阿基米德三角形为直角顶点在抛物线准线上的直角三角形.

(4) 由 (1) 知 $Q(\frac{x_1 + x_2}{2}, -\frac{p}{2})$, 得直线 FQ 的斜

率 $k_{FQ} = \frac{\frac{p}{2} - (-\frac{p}{2})}{0 - \frac{x_1 + x_2}{2}} = -\frac{2p}{x_1 + x_2}$, 又直线 AB 的斜率

$$k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{x_2^2}{2p} - \frac{x_1^2}{2p}}{x_2 - x_1} = \frac{x_1 + x_2}{2p}, \text{ 所以 } k_{FQ} \cdot k_{AB} = -1.$$

所以 $FQ \perp AB$.

(5) AB 过焦点, 点 Q 的轨迹方程为 $y = -\frac{p}{2}$, 即在抛物线 C 的准线上. 又点 $M(x_0, y_0)$ 为 AB 的中点.

$$|QM| = \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{p}{2} = \frac{\frac{x_1^2}{2p} + \frac{x_2^2}{2p}}{2} + \frac{p}{2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{4p} + \frac{p}{2} \geq \frac{2|x_1 x_2|}{4p} + \frac{p}{2} = \frac{2p^2}{4p} + \frac{p}{2} = p, \text{ 而 } S_{\triangle ABQ} = \frac{1}{2} |QM| \cdot |x_1 - x_2| \geq |QM| \sqrt{|x_1 x_2|} \geq p^2.$$

事实上, 利用上述结果有如下结论:

结论 1 若切线 QA, QB 的交点 Q 在抛物线 C 的准线上, 则抛物线 C 的弦 AB 必过焦点. 即命题 (1) 的逆命题也成立.

证明: 由于过点 A, B 的切线方程分别为 $y - \frac{x_1}{2p} = \frac{x_1}{p}(x - x_1), y - \frac{x_2}{2p} = \frac{x_2}{p}(x - x_2)$, 联立可解得 Q 点的横坐标, $x_Q = \frac{x_1 + x_2}{2}$, 将其代入 A 处的切线方程, 可得 Q 点的纵坐标 $y_Q = \frac{x_1 x_2}{2p}$, 又 Q 在抛物线 C 的准线上, 故 $y_Q = -\frac{p}{2}$, 即有 $x_1 x_2 = -p^2$. 设弦 AB 所在直线的方程为 $y = kx + m$, 由 $\begin{cases} y = kx + m, \\ x^2 = 2py \end{cases}$ 得 $x^2 - 2pkx - 2pm = 0$, 所以 $x_1 + x_2 = 2pk, x_1 x_2 = -2pm$. 所以 $x_1 x_2 = -p^2 = -2pm$, 即 $m = \frac{p}{2}$, 故弦 AB 必过抛物线的焦点 $(0, \frac{p}{2})$.

结论 2 阿基米德三角形底边上的中线平行于抛物线的对称轴. 即结论 (2) 可推广到一般的阿基米德三角形. (证略.)

结论 3 若 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 中点 $M(x_0, y_0)$, 则阿基米德三角形 QAB 的底边 AB 所在直线方程为 $(x_1 + x_2)x + -2py - x_1 x_2 = 0$; 若 AB 过焦点, 则可化为 $2x_0 x - 2py + p^2 = 0$; 切线 QA, QB 的方程分别为 $x_1 x = p(y + y_1), x_2 x = p(y + y_2)$. (证略.)

例 1 (2014 · 辽宁卷) 已知点 $A(-2, 3)$ 在抛物线 $C: y^2 = 2px$ 的准线上, 过点 A 的直线与 C 在第

一象限相切于点 B , 记 C 的焦点为 F , 则直线 BF 的斜率为 ().

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{3}$

解: 由点 $A(-2, 3)$ 在抛物线 $y^2 = 2px$ 的准线上, 知 $-\frac{p}{2} = -2$, 故抛物线方程为 $y^2 = 8x$, 即 $F(2, 0)$. 利用性质 (4), $AF \perp BF$, 故 $k_{BF} = -\frac{1}{k_{AF}} = \frac{4}{3}$, 选 D.

评注: 利用底边过焦点的阿基米德三角形的性质, 过准线上一点作抛物线的两切线, 则两切点的连线过焦点, 且准线上该点与焦点的连线垂直与两切点的连线. 相比于: 设 $B(\frac{y_0^2}{8}, y_0)$, 得 B 点处切线方程 $yy_0 = 4(x + \frac{y_0^2}{8})$, 由 $A(-2, 3)$ 在切线上, 得 $y_0 = 8$ 后, 知 $B(8, 8)$, 又 $F(2, 0)$, 再求得 k_{AB} , 运算得到了简化.

例 2 (2018 · 新课标 III 卷) 已知点 $M(-1, 1)$ 和抛物线 $C: y^2 = 4x$, 过 C 的焦点且斜率为 k 的直线与 C 交于 A, B 两点. 若 $\angle AMB = 90^\circ$, 则 $k =$ _____.

解: 抛物线 C 的焦点为 $F(1, 0)$, 显然点 $M(-1, 1)$ 在 C 的准线上, 又 $\angle AMB = 90^\circ$, 可以判断 $\text{Rt}\triangle AMB$ 就是底边过焦点的阿基米德三角形, 根据结论 (3), $FM \perp AB$. 所以有 $k \cdot k_{FM} = -1$, 即 $k \cdot \frac{1-0}{-1-1} = -1$, 故得 $k = 2$.

评注: 本题不用性质, 常规解法相对计算量大. 依抛物线 C 的焦点为 $F(1, 0)$, 可设直线 $AB: y = k(x - 1)$, 联立 $\begin{cases} y = k(x - 1), \\ y^2 = 4x, \end{cases}$ 消去 y 得 $k^2 x^2 - (2k^2 + 4)x + k^2 = 0$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{2k^2 + 4}{k^2}, x_1 x_2 = 1$, 又 $y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) - 2k = \frac{4}{k}$, $y_1 y_2 = k^2[x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1] = -4$. 依据 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (x_1 + 1)(x_2 + 1) + (y_1 - 1)(y_2 - 1) = x_1 x_2 + (x_1 + x_2) + 1 + y_1 y_2 - (y_1 + y_2) + 1 = 1 + \frac{2k^2 + 4}{k^2} + 1 - 4 - \frac{4}{k} + 1 = 0$, 可得 $k = 2$.

再如, (2021 全国乙卷, 理 21) 已知抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 F , 且 F 与圆 $M: x^2 + (y + 4)^2$

$=1$ 上点的距离的最小值为 4.

(1) 求 p ;

(2) 若点 P 在 M 上, PA, PB 是 C 的两条切线, A, B 是切点, 求 $\triangle PAB$ 面积的最大值.

分析: (1) 根据圆几何性质可得 $\frac{p}{2} + 4 - 1 = 4$, 可解出 $p = 2$ 的值.

(2) $\triangle PAB$ 是一般的阿基米德三角形, 但可依性质(1)的证明方法, 利用导数求出直线 PA, PB , 进一步可求得直线 AB 的方程, 将直线 AB 的方程与抛物线的方程联立后, 依弦长公式表示出 $|AB|$ 及点 P 到直线 AB 的距离, 把 $\triangle PAB$ 的面积表示成 P 点纵坐标 y_0 的二次函数, 由 $-5 \leq y_0 \leq -3$, 可求得 $\triangle PAB$ 面积的最大值.

例 3 (2019 全国 III 卷, 理 21) 已知曲线 $C: y = \frac{x^2}{2}$, D 为直线 $y = -\frac{1}{2}$ 上的动点, 过 D 作 C 的两条切线, 切点分别为 A, B .

(1) 证明: 直线 AB 过定点;

(2) 若以 $E(0, \frac{5}{2})$ 为圆心的圆与直线 AB 相切, 且切点为线段 AB 的中点, 求四边形 $ADBE$ 的面积.

解: (1) 由直线 $y = -\frac{1}{2}$ 是抛物线 $C: x^2 = 2y$ 的准线, 可知 $\triangle DAB$ 是阿基米德三角形, 因 D 点在准线上, 依据结论 1, 可直线 AB 必过焦点 $(0, \frac{1}{2})$. 即直线 AB 恒过定点.

(2) 略.

例 4 (2013 广东卷, 理 20) 已知抛物线 C 的顶点为原点, 其焦点 $F(0, c)(c > 0)$ 到直线 $l: x - y - 2 = 0$ 的距离为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 设 P 为直线 l 上的点, 过点 P 作

抛物线 C 的两条切线 PA, PB , 其中 A, B 为切点.

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) 当点 $P(x_0, y_0)$ 为直线 l 上的定点时, 求直线 AB 的方程;

(3) 当点 P 在直线 l 上移动时, 求 $|AF| \cdot |BF|$ 的最小值.

解: (1) 依题意, 设抛物线 C 的方程为 $x^2 = 4cy$, 由 $\frac{|0 - c - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 及 $c > 0$, 得 $m = 1$. 所以抛物线 C 的方程为 $x^2 = 4y$.

(2) $\triangle PAB$ 即为阿基米德三角形, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 依据结论 3 可得切线 PA, PB 的方程为 $x_1x - 2y - 2y_1 = 0, x_2x - 2y - 2y_2 = 0$. 由 $P(x_0, y_0)$ 在切线 PA, PB 上, 得 $x_1x_0 - 2y_0 - 2y_1 = 0, x_2x_0 - 2y_0 - 2y_2 = 0$. 所以 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 为方程 $x_0x - 2y_0 - 2y = 0$ 的两组解. 所以直线 AB 的方程为 $x_0x - 2y - 2y_0 = 0$.

(3) 略.

评注: 本题第(2)问, 由 $\triangle PAB$ 为阿基米德三角形, 根据结论 3 直接得直线方程. 也可设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 后, 由 $k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_1 + x_2}{2p}$, 得直线 AB 的方程为 $x_0x - 2y - 2y_0 = 0$.

一道 2022 年江西省预赛试题的探究

贵州省遵义师范学院附属实验学校 (563006) 杨 晓

一、试题呈现

设 x, y, z 是正实数, 满足 $xyz = 1$, 证明: $\sqrt{1+8x} + \sqrt{1+8y} + \sqrt{1+8z} \geq 9$.

这是 2022 年江西省高中数学预赛试题第 10 题, 试题简洁、对称、优美, 是一道值得探究的好题, 本文对这道试题的证法、变式和推广作一探究.

二、证法探究, 不同视角、同样精彩

证法一: 由已知条件结合均值不等式可得 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq 3 \sqrt[3]{\sqrt{xyz}} = 3$, 再由闵可夫斯基不等式可得 $\sqrt{1+8x} + \sqrt{1+8y} + \sqrt{1+8z} \geq \sqrt{(1+1+1)^2 + 8(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2} \geq \sqrt{3^2 + 8 \times 3^2} = 9$, 当且仅当 $x = y = z = 1$ 时取等号, 则 $\sqrt{1+8x} +$