函数解析式常见题型例析

◆王新乐

（新疆生产建设兵团第六师五家渠高级中学）

【摘要】函数是高中数学的核心内容，求函数解析式的问题，既是基础题型也是较难掌握的一类问题，针对学生的问题，对函数解析式的求解题型总结提炼是提高解题能力的必要途径。

【关键词】函数解析式　常见题型　总结

函数是高中新课程实施以来高中数学的主线核心内容，它贯穿于高中数学的始终，也是高中学生学习数学的难点之一，而求解函数解析式又是函数问题的基础，在探求函数定义域、值域、函数性质、乃至求函数的最值等许多问题中都需要探求函数解析式，是学生的失分点。但通过高三一轮的复习学生对此类问题仍然心中没数，对题型了解不够，求函数的解析式的问题，既是基础题型也是较难掌握的一类问题，下面就结合一些实例对函数解析式的求解题型总结如下，敬请参考。

题型一：一、二次函数，正比例反比例等特定函数

这类题型的函数式中常常只有一个或两个参数，我们只要设法求出这个参数，再根据条件建立一个方程（组），解这个方程（组），求出参数，问题就得到解决，我们把这种方法称之为待定系数法。一般地：

1. 若f(x)为一次函数时，可设f(x) = $ax+b$ (a≠0)；f(x)为正比例函数可设f(x) = ax (a≠0)；

2. 若f(x)为反比例函数时，可设f(x) = $\frac{k}{x}$ (k≠0)；

3. 若f(x)为二次函数时，根据条件可设：①一般式：f(x) = ax^2+bx+c (a≠0)，②顶点式f(x) = $a(x-h)^2+k$ (a≠0)，③双根式：f(x) = $a(x-x_1)(x-x_2)$ (a≠0)；

4. 已知f(x)是指数函数时，可设$f(x)=a^x$ ($a>0$，且$a\neq1$)；

5. 已知f(x)是幂函数时，可设$f(x)=x^\alpha$ ($\alpha\in\mathbf{Q}$)

例1. 设$f(x)$是一次函数，且$f[f(x)]=4x+3$，求$f(x)$。

解：设$f(x)=ax+b(a\neq0)$，则$f[f(x)]=af(x)+b=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$

$\therefore\begin{cases}a^2=4\\ab+b=3\end{cases}$　$\therefore\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2\\b=3\end{cases}$　$\therefore f(x)=2x+1$ 或 $f(x)=-2x+3$

题型二：复合型函数

已知复合函数$f[g(x)]$的表达式，求$f(x)$的解析式。

1. 这类问题常用配凑法或换元法。换元要注意所换元取值范围的变化。

例2. 已知$f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}(x>0)$，求$f(x)$的解析式————配凑法。

解：$\because f(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})^2-2$，$x+\frac{1}{x}\geqslant2$，$\therefore f(x)=x^2-2(x\geqslant2)$

例3. 已知，求$f(x+1)$的解析式——换元法。

解：令$t=\sqrt{x}+1$，则$t\geqslant1$，$x=(t-1)^2$$\because f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$$\therefore f(t)=(t-1)^2+2(t-1)=t^2-1$，

$\therefore f(x)=x^2-1(x\geqslant1)$$\therefore f(x+1)=(x+1)^2-1=x^2+2x(x\geqslant0)$

题型三：对称型函数

当所给函数具有对称性时，常用代入法。

例4. 若函数$y=x^2+x$与$y=g(x)$的图象关于点A$(-2,3)$对称，求$g(x)$的解析式。

解：设$M(x,y)$为$y=g(x)$上任一点，且$M'(x',y')$为$M(x,y)$关于点A$(-2,3)$的对称点

则$\begin{cases}\frac{x'+x}{2}=-2\\\frac{y'+y}{2}=3\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x'=-x-4\\y'=6-y\end{cases}$，$\because$点$M'(x',y')$在$y=g(x)$上$\therefore y'=x'^2+x'$

把$\begin{cases}x'=-x-4\\y'=6-y\end{cases}$代入得：$6-y=(-x-4)^2+(-x-4)$，整理得$y=-x^2-7x-6$$\therefore g(x)=-x^2-7x-6$

题型四：抽象型函数

1. 对抽象型的函数问题，则可以通过变量置换，设法构造方程组，通过解方程组求得函数解析式。

例5. 设$f(x)$满足$f(x)-2f(\frac{1}{x})=x$，求$f(x)$

解：$\because f(x)-2f(\frac{1}{x})=x$①显然$x\neq0$，将$x$换成$\frac{1}{x}$，得：$f(\frac{1}{x})-2f(x)=\frac{1}{x}$②，

解①②联立的方程组，得：$f(x)=-\frac{x}{3}-\frac{2}{3x}$

例6. 设$f(x)$为偶函数，$g(x)$为奇函数，又$f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}$，试求$f(x)$和$g(x)$的解析式。

解：$\because f(x)$为偶函数，$g(x)$为奇函数，$\therefore f(-x)=f(x)$，$g(-x)=-g(x)$又$f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}$①，

用$-x$替换x得：$f(-x)+g(-x)=-\frac{1}{x+1}$即$f(x)-g(x)=-\frac{1}{x+1}$②

解①②联立的方程组，得$f(x)=\frac{1}{x^2-1}$，$g(x)=\frac{1}{x^2-x}$

2. 当题中涉及变量较多时，可以对具有"任意性"的变量进行赋值，求得解析式。

例7. 已知：$f(0)=1$，对于任意实数x、y，等式$f(x-y)=f(x)-y(2x-y+1)$恒成立，求$f(x)$。

解：$\because$ 对于任意实数x、y，等式$f(x-y)=f(x)-y(2x-y+1)$恒成立，

不妨令$x=0$，则有$f(-y)=f(0)-y(-y+1)=1+y(y-1)=y^2-y+1$

再令$-y=x$得函数解析式为：$f(x)=x^2+x+1$

3. 若题中有递推式时，则可以递推得出系列关系式，然后通过迭加、累乘或者迭代等运算求得函数解析式。

例8. 设$f(x)$是定义在N_+上的函数，满足$f(1)=1$，对任意的自然数a,b都有$f(a)+f(b)=f(a+b)-ab$，求$f(x)$。

解：$\because f(a)+f(b)=f(a+b)-ab$，$a,b\in\mathbf{N}_+$，$\therefore$ 不妨令$a=x$，$b=1$，得：$f(x)+f(1)=f(x+1)-x$，

又$f(1)=1$，故$f(x+1)-f(x)=x+1$①分别令①式中的$x=1,2\cdots n-1$　得：$f(2)-f(1)=2$，

$f(3)-f(2)=3$，

……

$f(n)-f(n-1)=n$，

将上述各式相加得：$f(n)-f(1)=2+3+\cdots n$，$\therefore f(n)=1+2+3+\cdots n=\frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x,x\in\mathbf{N}_+$