$\dfrac{(x-v)(x+1)}{x-v+1}-x\sqrt{1-\dfrac{v}{x}}>0.$

又由结论 3 知 $\sqrt{1-\dfrac{v}{x}}<-\dfrac{v^3+2v^2x+8vx^2-16x^3}{16x^3}$，故要证上式，又只要证 $\dfrac{(x-1)(1-x+v)}{(x-v+1)^2}+\dfrac{(x-v)(x+1)}{x-v+1}+\dfrac{v^3+2v^2x+8vx^2-16x^3}{16x^2}>0$（注：以下过程可用数学软件计算）

$\Leftrightarrow v^5-2v^4+(5x^2-2x+1)v^3+(4x^2-14x^3+2x)v^2+(8x^4+16x^3-24x^2)v-16x^2(x-1)^2>0\Leftrightarrow v^3(v-1)^2+(5x^2-2x)v^3+(4x^2-14x^3+2x)v^2+(8x^4+16x^3-24x^2)v-16x^2(x-1)^2>0\Leftarrow(5x^2-2x)v^3+(4x^2-14x^3+2x)v^2+(8x^4+16x^3-24x^2)v-16x^2(x-1)^2>0\Leftrightarrow x(x-1)^2(8x^7-30x^6-129x^5+278x^4+876x^3+480x^2+173x+72)>0\Leftrightarrow 8x^7-30x^6-129x^5+278x^4+876x^3+480x^2+173x+72>0\Leftarrow 8x^7-30x^6-129x^5+278x^4+876x^3>0\Leftrightarrow 8x^4-30x^3-129x^2+278x+876>0.$

因为 $8x^4-30x^3-129x^2+278x+876=8x^2(x-4)^2+\dfrac{17x(2x-9)^2}{2}+(49x^2-\dfrac{821}{2}x+876)$，故又只要证 $49x^2-\dfrac{821}{2}x+876>0$，而该式显然成立.

由 1,2 知引理成立.

下面证明原不等式成立.

$\because f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 递减，在 $(1,+\infty)$ 递增，又 $f(x_1)=f(x_2)=m(x_1<x_2)$，故 $0<x_1<1<x_2$.

由引理知 $g(x_1)<0$，即 $\dfrac{\sqrt{x_1\cdot f(x_1)}}{f(x_1)+1}+\dfrac{1}{2}e^{\frac{1-x_1}{2}}-1<0\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{x_1\cdot m}}{m+1}+\dfrac{1}{2}e^{\frac{1-x_1}{2}}-1<0\Leftrightarrow\sqrt{x_1\cdot m}+\dfrac{m+1}{2}e^{\frac{1-x_1}{2}}-(m+1)<0\Leftrightarrow\sqrt{m}\cdot x_1+\dfrac{m+1}{2}e^{\frac{1-x_1}{2}}\cdot\sqrt{x_1}-(m+1)\sqrt{x_1}<0\Leftrightarrow\sqrt{m}\cdot x_1+\dfrac{m+1}{2}e^{\frac{1-x_1}{2}}\cdot e^{\frac{\ln x_1}{2}}-(m+1)\sqrt{x_1}<0(\because\sqrt{x_1}=e^{\frac{\ln x_1}{2}})\Leftrightarrow\sqrt{m}\cdot x_1+\dfrac{m+1}{2}e^{\frac{1+\ln x_1-x_1}{2}}-(m+1)\sqrt{x_1}<0\Leftrightarrow\sqrt{m}\cdot x_1+\dfrac{m+1}{2}e^{\frac{1-m}{2}}-(m+1)\sqrt{x_1}<0$①. 同上可得 $\sqrt{m}\cdot x_2+\dfrac{m+1}{2}e^{\frac{1-m}{2}}-(m+1)\sqrt{x_2}>0$②. 由①－②得 $\sqrt{m}\cdot(x_1-x_2)<(m+1)(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})\Leftrightarrow\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}>\sqrt{m}+\dfrac{1}{\sqrt{m}}$. 证毕.

最后给出不等式的一个上界，盼赐教：

设 $f(x)=x-\ln x$，$f(x_1)=f(x_2)=m(x_1<x_2)$，求证：$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}<\dfrac{7}{6}\sqrt{m}+\dfrac{5}{6}\dfrac{1}{\sqrt{m}}$.

阿基米德三角形性质在高考数学中的应用*

福建省莆田第二中学　(351131)　卢　妮　蔡海涛

近年高考解析几何直线与圆锥曲线位置关系的试题中，频频考查抛物线的切线问题. 这类试题对学生来说，是个不小的挑战，实测中考生得分率很低. 这引发笔者思考，该如何提高学生解决这类问题的能力？本文从一道高考题谈起，研究其破解之道.

引例　(2019 年全国Ⅲ卷理科 21(1)) 已知曲线 $C:y=\dfrac{x^2}{2}$，D 为直线 $y=-\dfrac{1}{2}$ 上的动点，过 D 作 C 的两条切线，切点分别为 A,B. 证明：直线 AB 过定点.

* 本文系福建省教育科学“十三五”规划课题《深度融合信息技术落实高中数学核心素养的实践研究》(课题编号：FJJKXB18－379).

证明:设$D(t,-\frac{1}{2})$,$A(x_1,y_1)$,则$y_1=\frac{1}{2}x_1^2$.又因为$y=\frac{1}{2}x^2$,所以$y'=x$.则切线DA的斜率为x_1,故$y_1+\frac{1}{2}=x_1(x_1-t)$,整理得$2tx_1-2y_1+1=0$.

设$B(x_2,y_2)$,同理得$2tx_2-2y_2+1=0$.$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$都满足直线方程$2tx-2y+1=0$.所以直线AB方程为$2tx-2y+1=0$.即$2tx+(-2y+1)=0$.所以直线AB恒过定点$(0,\frac{1}{2})$.

评析:首先利用求导的方法求出在点A、B处的切线方程,然后通过类比得到直线AB的参数方程,最后证明直线过定点.本试题的背景是抛物线的弦与过弦的端点的两条切线所围的三角形,这个三角形称为阿基米德三角形.

1.阿基米德三角形的常用性质

近年高考试题,以阿基米德三角形为背景的抛物线切线问题研究的基本是焦点在y轴上的抛物线,下面以$x^2=2py(p>0)$型的抛物线为例介绍阿基米德三角形的常用性质.

如图1,抛物线为$x^2=2py(p>0)$,焦点为F,过点F的直线与抛物线相交于A、B两点,过A、B的切线相交于点D,$\triangle DAB$称作阿基米德三角形.该三角形具有以下常用性质:

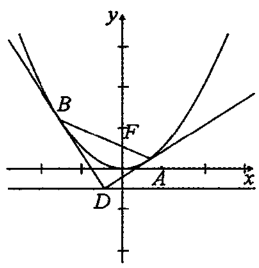

图1

性质1　D点必在抛物线的准线上;

性质2　$FD\perp AB$;

性质3　$DA\perp DB$;

性质4　若AB中点M,则DM平行(重合)于抛物线的对称轴;

性质5　一般地,过抛物线为$x^2=2py(p>0)$准线上点作抛物线的两条切线,与抛物线相交于A、B两点,直线AB过抛物线焦点.

以上性质也适合其它型的抛物线,性质的证明过程从略.

不难发现,引例的命题实则是性质1的逆命题,也是性质5的直接应用.如果在解题过程中能有这种知识储备,问题将轻松获解.

2.阿基米德三角形性质的应用

例1　(2006年全国Ⅱ卷理科第21(1)题)已知抛物线$C:x^2=4y$,焦点为F,A、B是抛物线两动点,且$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}(\lambda>0)$.过$A$、$B$两点分别作抛物线的切线,设其交点为$M$.证明$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{AB}$为定值.

评析:由且$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}(\lambda>0)$知阿基米德三角形的底边经过抛物线$C:x^2=4y$的焦点$F$,由性质2得$\overrightarrow{FM}\perp\overrightarrow{AB}$,故$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

例2　(2014年辽宁卷理科第10题)已知$A(-2,3)$在抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的准线上,过点A的直线与C在第一象限相切于点B,记C的焦点为F,则直线BF的斜率为(　　).

A.$\frac{1}{2}$　B.$\frac{2}{3}$　C.$\frac{3}{4}$　D.$\frac{4}{3}$

评析:若本题设切线的方程为$y=k(x+2)+3$,与抛物线$C:y^2=2px$联立,令$\Delta=0$求得斜率,切点坐标,再得直线BF的斜率,如此解答计算量较大.若根据本题的背景为阿基米德三角形,由性质2得,$AF\perp BF$,由$k_{AF}\cdot k_{BF}=-1$,则快速求出直线BF的斜率为$\frac{4}{3}$,选D.

例3　(2018年全国Ⅲ卷理科第16题)已知点$M(-1,1)$和抛物线$C:y^2=4x$,过C的焦点且斜率为k的直线与C交于A,B两点.若$\angle AMB=90°$,则$k=$________.

评析:本题注意到$M(-1,1)$在抛物线$C:y^2=4x$的准线上,且$\angle AMB=90°$,由性质2、3知$MF\perp AB$,而$k_{MF}=\frac{1-0}{-1-1}=-\frac{1}{2}$,$k_{MF}\cdot k_{AB}=-1$,则$k=2$.

例4　(2008年山东数学高考理科试题第22题(1))如图2,设抛物线$C:x^2=2py(p>0)$,M为直线$y=-2p$上任意一点,过M引抛物线的两条切线,切点分别为A,B.求证:A,M,B三点的横坐标成等差数列.

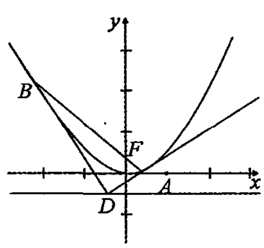

图2

证明:由题意设$A\left(x_1,\frac{x_1^2}{2p}\right)$,$B\left(x_2,\frac{x_2^2}{2p}\right)$,$M(x_0,-2p)$,由$x^2=2py$得$y=\frac{x^2}{2p}$,故$y'=\frac{x}{p}$.所以$k_{MA}=$

$\frac{x_1}{p}$, $k_{MB}=\frac{x_2}{p}$. 因此直线 MA 方程为 $y+2p=\frac{x_1}{p}(x-x_0)$, 直线 MB 方程为 $y+2p=\frac{x_2}{p}(x-x_0)$. 因 A,B 分别在直线 MA,MB 上, 所以 $\frac{x_1^2}{2p}+2p=\frac{x_1}{p}(x_1-x_0)$(1), $\frac{x_2^2}{2p}+2p=\frac{x_2}{p}(x_2-x_0)$(2), 由(1)(2)得 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$. 故 A,M,B 三点的横坐标成等差数列.

评析:本题的背景即阿基米德三角形性质 4.

正因为阿基米德三角形这颗闪亮的明珠,数学发展的历史长河中不断闪烁出真理的光辉. 这个两千多年的图形,如同一个题库,藏着各级各类数学命题素材[1]. 因此,教师若能在日常数学教学中融入其中,不但可以激发学生学习数学的兴趣,还能丰富解题方法,进一步提高解题效率,达到事半功倍的效果.

参考文献

[1]邵明志,陈克勤. 高考试题中的阿基米德三角形[J]. 数学通报,2008(9):39-42.

由一道例题引出的两个一般性结论

福建省德化第一中学　(362500)　林贵谋　吴志鹏

直线与圆锥曲线的交点问题、位置关系是高考的重要考点,内容丰富、考查方式多样,本文从一道例题的解答中获得深入研究的灵感并加以拓展与推广最终获得两个实用的一般性结论.

引例　已知直线 $y=2x-3$ 与抛物线 $y^2=4x$ 交于 A、B 两点,O 为坐标原点,直线 OA、OB 的斜率分别为 k_1、k_2,则 $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$ 的值为(　　).

(A) $\frac{1}{2}$　(B)2　(C) $-\frac{1}{2}$　(D) $-\frac{1}{3}$

解:设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$,联立 $\begin{cases}y=2x-3,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 得 $4x^2-16x+9=0$,所以 $x_1+x_2=4$, $x_1\cdot x_2=\frac{9}{4}$, $y_1y_2=-\sqrt{16x_1x_2}=-6$,所以 $x_1y_2+x_2y_1=x_1(2x_2-3)+x_2(2x_1-3)=4x_1x_2-3(x_1+x_2)=-3$,从而 $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1y_2}=\frac{1}{2}$. 故选 A.

思考:题目中为什么是求 $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$ 的值而不是求 k_1+k_2 的值呢?这问题的背后给了我们怎样的提示?所求的结论 $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\frac{1}{2}$,结论中 $\frac{1}{2}$ 与 $\frac{1}{k}$ 的值或与 $\frac{1}{p}$ 的值相同,结论是等于 $\frac{1}{k}$ 或 $\frac{1}{p}$ 或者与二者均无关系?为探求结论,我们将问题一般化.

已知斜率为 k 的直线与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 交于 A、B 两点,O 为坐标原点,直线 OA、OB 的斜率分别为 k_1、k_2,求 $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$ 的值.

解:设直线与抛物线的交点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$,易知 $k\neq0$,为减少计算量设直线方程为 $x=ty+b$,其中 $t=\frac{1}{k}$,联立 $\begin{cases}x=ty+b,\\ y^2=2px\end{cases}$ 得 $y^2-2pt\cdot y-2pb=0$,则 $y_1+y_2=2pt$, $y_1y_2=-2pb$,从而 $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1y_2}=\frac{\frac{y_1}{2p}\cdot y_2+\frac{y_2}{2p}\cdot y_1}{y_1y_2}=\frac{y_1+y_2}{2p}=t=\frac{1}{k}$.

由此我们获得了以下结论:

若斜率为 k 的直线与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 交于 A、B 两点,O 为坐标原点,直线 OA、OB 的斜率分别为 k_1、k_2,则有 $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\frac{1}{k}$.

观察结论 $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\frac{1}{k}$,一个很"美"的等量关