

阿基米德三角形的性质及应用

——2021年高考全国乙卷理科压轴题背景探究

沈海英

(北京市对外经济贸易大学附属中学, 100102)

摘要:阿基米德三角形的性质是高考热门问题, 2021年高考全国乙卷理科解析压轴题以阿基米德三角形为背景进行命题, 试题综合性强, 难度大, 运算能力要求高, 理解并运用阿基米德三角形的性质, 构造函数进行面积最值的探究, 即可轻松解决问题.

关键词:阿基米德三角形; 性质应用; 面积最值; 构造函数

阿基米德三角形是解析几何中的热门问题, 其性质在高考中应用较多, 原因有二: 其一, 以几何性质为背景, 结论非常完美; 其二, 运用高中解析知识解决问题, 能够考查学生思维、运算等多方面能力. 以下分析 2021 年高考全国乙卷理科压轴试题的背景, 并利用阿基米德三角形的性质进行求解.

一、阿基米德三角形的定义

定义 抛物线的弦与过弦的端点的两条切线所围成的三角形叫做阿基米德三角形.

本文主要以 $x^2 = 2py (p > 0)$ 为例, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 为抛物线上不同的两点, 以 A, B 为切点的切线 PA, PB 相交于点 P , 我们称 AB 为阿基米德三角形 $\triangle PAB$ 的底边.

二、阿基米德三角形的性质

性质 1 过抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 上一点 $M(x_0, y_0)$ 的切线方程为 $x_0x = p(y + y_0)$.

证法 1 导数法.

抛物线方程 $x^2 = 2py$ 即 $y = \frac{x^2}{2p}$, 所以 $y' = \frac{x}{p}$. 易知以 $M(x_0, y_0)$ 为切点的切线斜率存在, 为 $k = \frac{x_0}{p}$, 则过点 M 的切线方程为 $y - y_0 = \frac{x_0}{p}(x - x_0)$, 化简得 $x_0x = p(y + y_0)$.

证法 2 判别式法.

易知以 $M(x_0, y_0)$ 为切点的切线斜率存在, 设为 k , 则切线方程为 $y - y_0 = k(x - x_0)$, 与抛物线方程 $x^2 = 2py$ 联立, 消去 y 得 $x^2 - 2pkx + 2pkx_0 - 2py_0 = 0$, 所以 $\Delta = 4p^2k^2 - 8pkx_0 + 8py_0 = 0$.

因为点 A 在抛物线 C 上, 所以 $2py_0 = x_0^2$, 代入得 $p^2k^2 - 2pkx_0 + x_0^2 = 0$, 解得 $k = \frac{x_0}{p}$.

所以, 切线方程为 $y - y_0 = \frac{x_0}{p}(x - x_0)$, 整理得

$$x_0x = p(y + y_0).$$

评注 对于圆锥曲线中焦点在 y 轴上的抛物线, 我们常选择导数法求切线, 运算量小, 易入手.

性质 2 阿基米德三角形底边上的中线平行于抛物线的轴.

证明 对于阿基米德三角形 $\triangle PAB$, 易得切线 PA 的方程为 $y = \frac{x_1}{p}x - \frac{x_1^2}{2p}$, 切线 PB 的方程为 $y = \frac{x_2}{p}x - \frac{x_2^2}{2p}$, 从而解得两切线交点 $P(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1x_2}{2p})$. 设 Q 为线段 AB 的中点, 则 $Q(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$, 故 PQ 平行于抛物线的轴.

性质 3 阿基米德三角形 $\triangle PAB$ 的底边 AB 所在直线的方程为 $(x_1 + x_2)x - 2py - x_1x_2 = 0$.

证明 易知 AB 所在直线的斜率 k 存在, 又 $y_1 = \frac{x_1^2}{2p}$, $y_2 = \frac{x_2^2}{2p}$, 故 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 + x_1}{2p}$.

直线 AB 的方程为 $y - \frac{x_1^2}{2p} = \frac{x_2 + x_1}{2p} \cdot (x - x_1)$, 化简得 $(x_1 + x_2)x - 2py - x_1x_2 = 0$.

性质 4 阿基米德三角形 $\triangle PAB$ 的面积 $S_{\triangle PAB} = \frac{1}{8p} \cdot |x_1 - x_2|^3$.

证明 由性质 2 和性质 3 得:

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{1 + (\frac{x_1 + x_2}{2p})^2} \cdot |x_1 - x_2| \\ &= \frac{\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + 4p^2}}{2p} \cdot |x_1 - x_2|, \end{aligned}$$

点 $P(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1x_2}{2p})$ 到直线 $AB: (x_1+x_2)x - 2py - x_1x_2 = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|(x_1+x_2) \cdot \frac{x_1+x_2}{2} - 2p \cdot \frac{x_1x_2}{2p} - x_1x_2|}{\sqrt{(x_1+x_2)^2 + 4p^2}}$$

$$= \frac{(x_1-x_2)^2}{2\sqrt{(x_1+x_2)^2 + 4p^2}}.$$

$$\text{所以 } S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \frac{1}{8p} \cdot |x_1 - x_2|^3.$$

三、高考试题解答

(2021年高考全国乙卷理科第21题) 已知抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 F , 且 F 与圆 $M: x^2 + (y+4)^2 = 1$ 上的点的最短距离为 4.

(1) 求 p ;

(2) 若点 P 在 M 上, PA, PB 为 C 的切线, 切点为 A, B , 求 $\triangle PAB$ 面积的最大值.

由条件可得: 点 $F(\frac{p}{2}, 0)$ 到圆 $M: x^2 + (y+4)^2 = 1$ 的最短距离为 $\frac{p}{2} - (-3) = 4$, 所以 $p = 2$.

第(2)小题涉及阿基米德三角形面积的最值问题. 由阿基米德三角形的性质, 可轻松求出 $\triangle PAB$ 面积的函数表达式, 利用函数的性质来求解最值.

方法1: 常规面积公式代数运算.

利用阿基米德三角形的性质求切线, 可得直线 AB 的方程, 即可求出 $\triangle PAB$ 的面积.

设 $P(x_0, y_0), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由性质3可得直线 AB 的方程为 $(x_1+x_2)x - 4y - x_1x_2 = 0$.

由性质2得 $P(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1x_2}{4})$, 即 $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}, y_0 = \frac{x_1x_2}{4}$, 所以直线 AB 的方程可化简为 $x_0x = 2(y+y_0)$.

由性质4, 可得

$$S_{\triangle PAB} = \frac{1}{16} |x_1 - x_2|^3$$

$$= \frac{1}{16} [\sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2}]^3$$

$$= \frac{1}{16} (\sqrt{4x_0^2 - 16y_0})^3 = \frac{1}{2} |x_0^2 - 4y_0|^{\frac{3}{2}}.$$

又因为点 $P(x_0, y_0)$ 在圆 $M: x^2 + (y+4)^2 = 1$ 上, 所以 $x_0^2 = 1 - (y_0+4)^2$, 代入得

$$S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} |-y_0^2 - 12y_0 - 15|^{\frac{3}{2}}.$$

又 $y_0 \in [-5, -3]$, 所以, 当 $y_0 = -5$ 时, $\triangle PAB$ 的面积取得最大值 $20\sqrt{5}$, 此时点 P 在圆的

最下方.

点评 此方法常规, 易入手, 但运算量稍大.

方法2: 利用几何关系转化面积.

巧妙利用性质4, 中线把三角形分割成两个等积的小三角形, 借助几何关系进而转化面积.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), Q$ 为线段 AB 的中点, 则由性质2得 $P(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1x_2}{4}), Q(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$, $PQ \perp x$ 轴, 所以

$$S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} |PQ| \cdot |x_1 - x_2|$$

$$= \frac{1}{2} |\frac{y_1+y_2}{2} - \frac{x_1x_2}{4}| \cdot |x_1 - x_2|$$

$$= \frac{1}{2} |\frac{x_1^2+x_2^2}{8} - \frac{x_1x_2}{4}| \cdot |x_1 - x_2|$$

$$= \frac{1}{16} |x_1 - x_2|^3,$$

以下同方法1.

点评 此方法运算量较小, 由 P, Q 的坐标利用几何关系巧妙转化, 回避底和高的计算.

方法3: 参数方程, 三角换元.

圆上的点可借助参数方程, 利用三角函数的有界性来求最值.

由前面三种方法知 $S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} |x_0^2 - 4y_0|^{\frac{3}{2}}$, 依题意, 可设 $x_0 = \cos\theta, y_0 = -4 + \sin\theta$, 所以

$$S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} |\cos^2\theta - 4\sin\theta + 16|^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} |-\sin^2\theta - 4\sin\theta + 17|^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} |21 - (\sin\theta + 2)^2|^{\frac{3}{2}},$$

因为 $\sin\theta \in [-1, 1]$, 所以, 当 $\sin\theta = -1$ 时, $\triangle PAB$ 的面积取得最大值 $20\sqrt{5}$, 此时 P 点在圆的最下方.

点评 在构造函数求最值时常利用圆锥曲线的参数方程, 构造三角函数求最值.

虽然探究了不同解法, 但不难看出各种方法之间是有联系的, 而且不同方法最终是和谐统一的, 这也体现了数学美. 只要掌握了数学本质, 理解了阿基米德三角形的性质, 会利用判别式或导数法求切线方程, 能够选择合适的面积公式来计算, 利用二次函数或三角函数的性质求最值, 就可以轻松求解这道压轴题. 需要注意的是, 考试过程中解决问题时不能直接使用性质, 需要写出推理过程.

(收稿日期: 2021-06-20)