

基于学生主体的“三给”数学教学实践

——以“二轮微专题：同构思想在指对型函数中的应用”为例

苏中玲

(重庆市梁平中学, 重庆 梁平 405299)

摘要:在新教材新高考背景下,如何构建高效课堂,体现学生的课堂主体地位,重庆市数学教研员张晓斌提出了“三给”教学策略:首先,给学生内容,利用问题驱动思维;其次,给学生时间,保证学生深度思考;最后,给学生机会,交流反思思维过程。文章结合高三二轮微专题“同构思想在指对型函数中的应用”,在“三给”教学策略的指导下,探讨如何构建高效数学复习课堂。

关键词:学生主体;“三给”教学策略;同构思想;指对型函数

一、给学生内容,激发学生参与热情

课堂教学受多种元素的影响,归结起来主要有四种:文本(教材、教辅等)、教师、学生和教育技术。

首先,复习课前,教师要充分了解学情,依据学生存在的问题精选文本(数学问题),好的问题能够调动和启发学生。课堂上做到精讲精练,可以从创设情境,合理引入;精选例题,巩固知识;变式迁移,拓展知识;总结方法,归纳知识;课后思考,升华知识这五个方面展开教学设计。为了提高课堂效率和培养学生规范书写能力,还可使用多媒体等现代技术手段。

其次,该课程是高三二轮导数章节复习之后对重点内容设置的微专题复习课,不一定要做到面面俱到,而是要把握重点、聚焦难点、力求突破难点。课程主要复习解决不等式恒成立求参数的取值范围、证明不等式的一种思路:指对函数同构。通过对指对函数同构问题的多级设计,实现知识的层层解析,思维的步步深入,方法的自然迁移。教学过程中,引导学生面对新问题时主动联想已解决问题运用的各种策略,通过观察、判断、分析、比较寻得新问题的解决方法,让学生学会识别题目的类型、联想方法,在不同的复合情境中抓住题目的本质,寻找解题的规律,“以不变应万变”。

最后,此课的授课对象为高三物理方向实验班的学生。学生此时刚好复习完函数部分的所有知识点,会画简单函数的图象,会通过图象研究、理解函数的性质对所涉及的基本题型有一定基本且清晰的认识,但在深刻度上还有所欠缺。按照新高考的要求,教师在教学中要引导学生归类题型,总结方法,注重题与题之间的

连通性和变通性,从而在浩如烟海的数学题目中寻找解题的规律。

由此可见,给学生问题,即创设适当的问题情境,把握好学生学情,通过教师有效组织教学,使教学各要素有机结合,充分调动学生学习积极性,努力做到理解文本、理解学生、理解教法和理解技术(信息技术)才能打造好高效复习课堂。

基于上述分析,可以看出高三二轮复习对知识的梳理不建议让学生自主复习,也不建议教师直接告知学生一些定义定理或知识点简单罗列。在班级示范课中,教师采用问题导向,以2020年全国二卷(理科)第11题改编后作为引例1,让学生参与知识的梳理过程,用问题驱动思维,展示同构思想的形成过程,展示解题方法规律发现过程。下文是课堂引入片段:

师:代数变形是化归函数、方程和不等式的重要手段,今天我们一起研究一类特殊函数的代数变形求解策略。首先我们来看引例1(投影并留1分钟思考):

引例1(2020全国卷2第11题改编)

若 $2^x - 2^y - 3^{-x} + 3^{-y} < 0$,则()

A. $\ln(y-x+1) > 0$ B. $\ln(y-x+1) < 0$

C. $\ln|x-y| > 0$ D. $\ln|x-y| < 0$

师:请同学来说说解题思路。

生:移项,将含不同变量的式子分离到不等式的两边,两边就自然就变成了相同的代数形式。

再构造新函数 $f(x) = 2^x - 3^{-x}$,则原不等式可化为 $f(x) < f(y)$,接下来利用的单调性,即可比较 x 与 y 得到 $x < y$,故选A。

师:观察不等式有几个变量?我们遇到这类不等式可以怎样处理?(若学生对本题观察不出结构特点则需教师提示相关思路)

生:这个不等式里面有两个变量 x 和 y ,遇到这类不等式需要移项变形向相同结构转化。

师:由此可见,处理原始形式如 $\varphi(m,n)\leq 0$,可等价转化为 $f(a)\leq f(b)$ 使左右两边结构相同。本例中已知的不等式即原始形式,变量 x,y 对应这里的变量 m,n 。通过构造新函数 $f(x)$,利用函数的性质(如单调性、奇偶性等)实现问题的解决。

设计意图:通过这个问题,让学生回忆构造函数的基本方法,让学生参与知识构建的过程。对回答错误或者不会回答的问题产生更深刻的印象,引导学生应用函数思想解决不等式问题。这是一个逐步拓展的问题串,让学生学会从特殊拓展到一般,这比直接机械地复习知识要点更能促进学生思维的形成。

师:事实上我们还会在题目中遇到指对数函数共存的情况,我们能否借助这种转化相同结构,构造新函数思想来思考呢?比如引例2:

引例2 方程 $e^x+x-2=0$ 的一根为 x_1 ,方程 $\ln x+x-2=0$ 的一根为 x_2 ,则 $x_1+x_2=$ _____。

预设问题:请学生来说明解题思路。(不同层次的学生生成不同的思路)回答有困难的学生可以继续追问:由已知条件可以得到什么数学关系式?

生:由已知可得 $e^{x_1}-2=0$ (1)和 $\ln x_2+x_2-2=0$ (2)。

师:(引导学生观察)它们在结构上有什么异同?

生:相似的结构,区别在于一个是 e^x ,一个是 $\ln x$ 。

预设问题:如何搭建指对数之间的桥梁?可以构造相同函数来解决吗?

生: $x=e^{\ln x}=\ln e^x(x>0)$,

从而 $e^{x_1}+x_1=2$ (3), $\ln x_2+x_2=\ln x_2+e^{\ln x_2}=2$ (4),

令 $f(x)=e^x+x$,则由(3)(4)可得 $f(x_1)=2$, $f(\ln x_2)=2$,即 $f(x_1)=f(\ln x_2)$,又 $f(x)=e^x+x$ 在 \mathbb{R} 上单调递增,所以 $x_1=\ln x_2$,将 $\ln x_2=x_1$ 代入(2)得 $x_1+x_2=2$ 。

设计意图:再次引导学生从结构上把握问题,通过学生与问题互动,独立思考类别分析,将方程问题划归为函数问题进行求解,给学生时间思考,给学生方法思维,体会函数思想在解决方程问题中的应用。

二、给学生时间,让学生主动思考

学生通过引例1和引例2的互动交流,明确了同构

思想在解决不等式、方程问题中的应用,但在一些有难度的问题上,还需要时间去深度思考。否则课堂就变成了教师主讲,学生被动接受,缺乏思考的主动性,下面是例题1的课堂教学。

例1 (2021湖北八市3调)

设实数 $t>0$,若对任意的 $x>0$,不等式 $e^{2x}-\frac{\ln 2+\ln x}{t}\geq 0$

恒成立,则 t 的取值范围为_____。

教学安排:出现问题后,给学生时间,让学生独立思考,然后分享观点。

生:由题意得 $te^{2x}\geq \ln 2x(t>0,x>0)$, $2txe^{2x}\geq 2x\ln 2x$ 结构很相似,但无法划归到函数问题。

师:左边含指数式,右边含对数式,为了使两边化为相同结构,需要统一成指数形式或对数形式,如何统一,可以从指对数的定义入手分析。

生:根据对数恒等式可得: $2txe^{2x}\geq 2x\ln 2x=e^{\ln 2x}\ln 2x$,从而令 $f(x)=xe^x$,

则有 $f(2tx)\geq f(\ln 2x)f'(x)=(1+x)e^x$,

$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)\uparrow,(-1,+\infty)\downarrow$,

$\therefore x>0,t>0,\therefore 2tx>0,F(2tx)>0$ 。

当 $0<x\leq \frac{1}{2}$, $\ln 2x\leq 0,\therefore f(\ln 2x)\leq 0$,

恒有 $f(2tx)\geq f(\ln 2x)$,

当 $x>\frac{1}{2}$, $\ln 2x>0$,要使原不等式成立,

则必有 $2tx\geq \ln 2x$,

\therefore 恒有 $2tx\geq \ln 2x,t\geq \frac{\ln 2x}{2x}\Rightarrow t\geq \left(\frac{\ln 2x}{2x}\right)_{\max}$,

易求得 $\left(\frac{\ln 2x}{2x}\right)_{\max}=\frac{1}{e}$ 。

设计意图:本题相对引例而言,结构上观察难度相对较大,需要对原不等式进行恰当变形(凑项),这是学生解决问题的难点。教师给学生时间进行独立思考,通过交流不断提高分析转化问题的能力,做到对问题深度思考。

三、给学生机会,交流展示思维过程

例2 (2020年山东高考21题)

已知函数 $f(x)=ae^{x-1}-\ln x+ina$ 。

(1)略;(2)若 $f(x)\geq 1$,求 a 的取值范围。

预设活动:本题难度较大,常规方法较烦琐,让学生先独立思考5分钟,再组织学生进行分组讨论,寻求

解题思路,过程中巡视指导学生,创造同构利用函数的性质解题。

师:请小组派代表展讲,并分享交流问题解决的探究过程。

生:不等式等价于 $ae^{x-1}-\ln x+\ln a \geq 1$,为了化同构,我们根据前面的经验,需要把指数式和对数式分开,于是得到 $ae^{x-1}+\ln a \geq \ln x+1$,考虑到指数式的指数为 $x-1$,于是两边加了 $x-1$,得到 $ae^{x-1}+\ln a+x-1 \geq \ln x+x$,此时左边指数式中的指数 $x-1$ 与 $\ln a+x-1$ 相差一个数 $\ln a$,同时指数的系数有个 a ,于是得到 $e^{x-1+\ln a}+(x-1+\ln a) \geq \ln x+x=e^{\ln x}+\ln x$,令 $g(x)=e^x+x$,根据函数的单调性可得 $\ln a > \ln x-x+1$,再构造函数 $h(x)=\ln x-x+1$,利用导数求出函数的最值,即可求得 a 的范围。

设计意图:本题同构特征不明显,需要学生利用配凑法结合对数恒等式进行化归,难度较大。设计独立思考时间,目的在于让学生深度思考;给学生交流机会,设计交流互动环节,目的在于通过生生活动,逐步思考发现解题方法。本题还有其他3种解法,相对而言同构法更好操作,但需要学生熟练掌握配凑技巧。

四、教学反思

本堂课“同构思想在指对型函数中的应用”是在系统复习的基础上,打破原有的知识体系,围绕函数性质中的重、难点知识进行细化,以达到提高复习的针对性、全面性、有效性。

(一)创设适当的问题情境和数学问题,利用问题驱动学生思维

进入高三二轮复习阶段,学生对数学的主干知识已经相当熟悉,但在综合运用知识解决问题的能力方面,还有待提升。教师给学生内容,本质是课堂上为学生创设适当的问题情境和数学问题,采用问题驱动,引发学生思考和交流。

众所周知,教学情境和数学问题是多样的、多层次的。本堂课引例1引编了2020年全国卷2第11题,采用了学生熟悉的不等式背景,属于较复杂的问题,需要学生

通过移项、变形,构造结构相同的式子,并运用函数思想将问题等价转化,揭示问题的本质,从学生的课堂表现来看,学生已经初步掌握了同构的意识和函数思想方法。引例2是方程根的问题,从结构上看,比引例1的结构更相似,不同点在于,指对数式的差异,引发了学生的积极思考和交流,面对认知冲突,通过探究分享,学生在指对数式之间架起了一座同构的桥梁,从而实现了问题的同构转化。两个引例的使用体现了由浅入深、循序渐进的思维过程,有利于提高学生综合运用数学知识解决问题的能力。

(二)课堂给予学生充分思考时间,让学生真正成为课堂的主人

新课程标准提倡教师把教学活动的重心放在促进学生学会学习上,积极探索有利于促进学生学习方式的多样化,不仅限于讲授和练习,还包括引导学生阅读自学、独立思考、动手实践、自主探索、合作交流等。

本堂课在教学实施过程中,多次采用学生独立思考、动手实践、自主探索、合作交流等学习方式,这些学习方式与传统教学相比,能够充分调动学生的主动性和积极性,但是如果学生没有经过独立思考、动手实践、自主探索,那么合作交流时学生常常无话可说,致使合作交流形同虚设。因此,本堂课在学生交流前,教师给学生充分的时间深度思考,待学生有了自己的想法后,再开展合作交流,才有了后来课堂上学生的精彩表现。

五、结语

学生学习数学的过程是一个师生互动、生生互动和生本互动的过程,学习过程中难免出现各种错误。只有将这些课堂中出现的错误充分暴露,展现学生真实的思维过程,学生才能真正掌握所学知识,甚至在错误中创新解决问题的思路和方法,而这些过程都需要时间的验证,显然这需要教师转变教学观念,即使是高三二轮复习课堂,仍要还时间给学生,真正落实多样化教学方式,让学生真正成为课堂的主人。

参考文献:

- [1] 史宁中,王尚志. 普通高中数学课程标准[M]. 北京:高等教育出版社,2020.
- [2] 张晓斌,张程垣,马玉娟,等. 基于学生主体的“三给”数学教学策略研究[J]. 中小学教师培训,2021(12):51-54.
- [3] 罗建宇. 从几个问题谈高三数学复习有效性[J]. 数学通报,2020,59(12):41-44.

(责任编辑:淳 洁)