建立不定方程模型巧解组合计数问题

李德平

（云南曲靖经济技术开发区第一中学）

很多有难度的计数问题都有一定的高等数学背景，如允许重复的组合与多重集的全排列等.尤其是针对不定方程的整数解问题，我们可以利用允许重复组合数相关知识进行求解.下面谈谈如何通过建立不定方程模型来巧解组合计数问题.

1 组合及组合数

组合数公式：$C_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!\ m!}$.

设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$是 n 元集，则 A 的任何一个 r-可重复组合可表示成$\{x_1\cdot a_1,x_2\cdot a_2,\cdots,x_n\cdot a_n\}$，其中 $x_i\in\mathbf{N}(i=1,2,\cdots,n)$，且

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=r.$$

注：n 元集的 r-可重复组合是大学数学课程“组合数学”的内容，这里只作介绍.

2 不定方程的整数解

定理 1 不定方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=r \qquad ①$$

的非负整数解的个数为 C_{n+r-1}^r.

证明 对于方程①的一个非负整数解$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，作 0-1 序列

$$\underbrace{00\cdots0}_{x_1\text{个}0}1\underbrace{00\cdots0}_{x_2\text{个}0}10\cdots01\underbrace{00\cdots0}_{x_n\text{个}0}. \qquad ②$$

序列②中恰有 r 个 0，$(n-1)$个 1.相反，任给一个恰有 r 个 0，$(n-1)$个 1 的 0-1 序列，将第 1 个 1 前面零的个数记为 x_1，第 1 个 1 与第 2 个 1 之间零的个数记为 x_2，…，第$(n-1)$个 1 后面零的个数记为 x_n，则有

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=r,$$

从而知$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是①的一个非负整数解.因此我们在方程①的非负整数解构成的集合与恰有 r 个 0，$(n-1)$个 1 的 0-1 序列构成的集合之间建立了双射.

由于恰有 r 个 0，$(n-1)$个 1 的 0-1 序列可按如下方式给定：先在 $r+n-1$ 个位置上选 r 个安排 0，再在其余位置安排 1，所以这样的 0-1 序列共有 C_{n+r-1}^r 个，因此，不定方程①的非负整数解共有 C_{n+r-1}^r 个.

定理 2 n 元集的 r-可重组合的个数为 C_{n+r-1}^r.

证明 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$是 n 元集，则 A 的任何一个 r-可重复组合可表示成$\{x_1\cdot a_1,x_2\cdot a_2,\cdots,x_n\cdot a_n\}$，其中 $x_i\in\mathbf{N}(i=1,2,\cdots,n)$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$，故 n 元集的 r-可重组合的个数等于不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$ 的非负整数解的个数.由定理 1 知 n 元集的 r-可重组合的个数为 C_{n+r-1}^r.

定理 3 不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r(r\geqslant n)$的正整数解的个数为 C_{r-1}^{r-n}.

证明 令 $y_i=x_i-1(i=1,2,\cdots,n)$，则当 $x_i\geqslant1$ 时，有 $y_i\geqslant0$，且当 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$ 时，有 $y_1+y_2+\cdots+y_n=r-n$，反之亦然，所以不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r(r\geqslant n)$的正整数解的个数等于不定方程 $y_1+y_2+\cdots+y_n=r-n$ 的非负整数解的个数，也就是 $C_{n+r-n-1}^{r-n}=C_{r-1}^{r-n}$.

3 建立不定方程模型解题

例 1 有 30 个完全相同的小球，分给 4 个不同的小朋友，每个小朋友至少分得 4 个小球，则有______种不同的分配方案.

解析 先给每个小朋友分 3 个小球，剩余 18 个小球，利用“隔板法”，18 个小球，17 个空，插入三个“板”，共有 $C_{17}^3=680$ 种不同的分配方案.

例 2 有 10 个优秀班干部的名额，分给 7 个班，每班至少一个，则有______种分配方案.

解析 因为 10 个名额没有差别，利用“隔板法”形成 9 个空，插入 6“隔板”，把名额分成 7 份，所以共有 $C_9^6=84$ 种不同的分配方案.

例 3 在 1 至 10 000 的整数中，各位数字之和等于 5 的整数有______个.

解析 设所求的整数为 a，则 $1\leqslant a<10\ 000$.以 x_1，x_2，x_3，x_4 分别表示 a 的千位、百位、十位和个位数字，则 $0\leqslant x_i\leqslant9(i=1,2,3,4)$，且 x_1+x_2+

$x_3+x_4=5$，故所求的正整数个数等于方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=5$ 的非负整数解的个数，由定理 1 可知 $x_1+x_2+x_3+x_4=5$ 的非负整数解为 $C_{5+4-1}^{5}=56$ 个.

例 4 把 20 个不加区别的小球全部放入编号为 1,2,3 的 3 个盒子中，要求每个盒内的球数不小于它的编号数，则不同的放法共有________种.

解析 **方法 1** 不妨设编号为 1,2,3 的三个盒子中分别放入了 x_1,x_2,x_3 个小球，依题意有

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=20,\\1\leqslant x_1\leqslant 15,\\2\leqslant x_2\leqslant 16,\\3\leqslant x_3\leqslant 17.\end{cases}\quad ①$$

因此，问题转化为求不定方程①的解的个数.

当 $x_1=1$ 时，$x_2=2,3,\cdots,16$，这时 x_3 随之而定，共有 15 种放法；

当 $x_1=2$ 时，$x_2=2,3,\cdots,15$，这时 x_3 随之而定，共有 14 种放法；

……

当 $x_1=15$ 时，只有 $x_2=2,x_3=3$，仅有 1 种放法.

根据加法原理，符合要求的放法共有

$$15+14+\cdots+2+1=120 \text{ 种}.$$

方法 2 对方程①作变换：$\begin{cases}t_1=x_1,\\t_2=x_2-1,\\t_3=x_3-2,\end{cases}$ 因此，问题转化为求不定方程 $t_1+t_2+t_3=17$ 的正整数解的个数.

可用“隔板法”求解，即在 16 个空中插入 2 个“板”，共有 $C_{16}^{2}=120$ 种插法.

方法 3 对方程①作变换：$\begin{cases}b_1=x_1-1,\\b_2=x_2-2,\\b_3=x_3-3,\end{cases}$ 则 $b_1+b_2+b_3=14$，且 $0\leqslant b_i\leqslant 14(i=1,2,3)$. 问题等价于求不定方程 $b_1+b_2+b_3=14$ 的非负整数解的个数，根据定理 1，可知 $b_1+b_2+b_3=14$ 的非负整数解为

$$C_{14+3-1}^{14}=C_{16}^{2}=120 \text{ 个}.$$

例 5 设 $A=a_1a_2\cdots a_n(0\leqslant a_i\leqslant 9,i=1,2,\cdots,n)$ 是一个 n 位数，如果 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，则称 A 是“递增的”，则小于 10^n 且是“递增的”的正整数个数 $N=$________.

解析 **方法 1** 设 a 是任一个小于 10^n 且“递增的”的正整数，a 中有 x_1 个 1，x_2 个 2，$\cdots$，x_9 个 9，则 $x_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,9)$ 且 $1\leqslant x_1+x_2+\cdots+x_9\leqslant n$. 令 $x_{10}=n-(x_1+x_2+\cdots+x_9)$，则 $0\leqslant x_{10}<n$，且

$$x_1+x_2+\cdots+x_9+x_{10}=n,\quad ①$$

故所求的正整数个数等于方程①满足 $x_{10}\neq n$ 的非负整数解的个数，由定理 1 知 $N=C_{n+10-1}^{n}-1=C_{n+9}^{9}-1$.

方法 2 设 A 是任一个小于 10^n 且“递增的”的正整数，则 A 可表示成

$$A=a_1\cdot 10^{n-1}+a_2\cdot 10^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\cdot 10+a_n,$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是不全为零的非负整数且 $0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant 9$. 因此，所求正整数个数等于 10 元集 $\{0,1,2,\cdots,9\}$ 的 n-可重复组合的个数减去 1，由定理 1 知 $N=C_{n+10-1}^{n}-1=C_{n+9}^{9}-1$.

例 6 以 N 表示把 r 件相同的物件分给 $n(n\leqslant r)$ 个人的不同方法数，则 $N=$________.

解析 设第 $i(1\leqslant i\leqslant n)$ 个人分得 x_i 件，则 $x_i\geqslant 0$ 且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$，所以 N 等于不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$ 的非负整数解的个数，由定理 1 知 $N=C_{n+r-1}^{r}$.

例 7 以 N 表示把 r 件相同的物件分给 $n(n\leqslant r)$ 个人，使得每人至少分得一件的不同方法数，则 $N=$________.

解析 设第 $i(1\leqslant i\leqslant n)$ 个人分得 x_i 件，则 $x_i\geqslant 1$ 且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$，所以 N 等于不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$ 的正整数解的个数，由定理 3 知 $N=C_{r-1}^{r-n}$.

例 8 由 5 个字母 a,b,c,d,e 组成的 6 次齐次式最多可以有________个不同类的项.

解析 设 $f(a,b,c,d,e)$ 是由 5 个字母 a,b,c,d,e 组成的不同类的项的个数最多的 6 次齐次式，其项数为 N，则 $f(a,b,c,d,e)$ 中的任一项可表示成 $A\cdot a^{x_1}b^{x_2}c^{x_3}d^{x_4}e^{x_5}$，其中 A 为常数，$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\in\mathbf{N}$，且

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=6,\quad ①$$

故 N 等于方程①的非负整数解的个数，由定理 1 知 $N=C_{5+6-1}^{6}=C_{10}^{6}=210$.

我们把组合中的计数问题转化为求不定方程的非负整数解或者正整之数解后，就可以利用上文中的定理，或结论“隔板法”，建立的数学模型，轻松求解.

（完）