



高考数学第二轮复习的几点思考

渠东剑(江苏省南京市秦淮区教师发展中心 南京市高中数学渠东剑名师工作室)

摘要:高考数学第二轮复习具有重要意义,就第二轮复习教学过程中值得关注的几个问题给出思考与建议:教学难度的定位基于学情;知识体系的拓展突出探索;模式模型的形成重在建构;思想方法的渗透植根运用;解题教学的实施力主通法;专题复习的设计问题导向。

关键词:高考数学;第二轮复习;难度;模型;问题

文章编号:1002-2171(2024)1-0020-05

当前,就高考数学复习教学安排,各地的惯用做法是,用一年(或稍多)的时间复习,并将其划分为第一轮复习、第二轮复习、第三轮复习与考前模拟训练等环节,其中第一轮复习时间约占一个学期。由于第二轮复习、第三轮复习与考前模拟训练总体时长为一学期左右,在时间划分、形式安排、具体操作等方面,各地大致相同,且第二轮复习、第三轮复习与考前模拟训练关系紧密,故可以把它它们视为一个整体去研究。本文将统称为第二轮复习。

第二轮复习是高考备考的关键时期,也是“收官之战”,对巩固第一轮复习成果、综合提升应试水平具有重要意义。第二轮复习更加突出知识的综合性、发展性、系统性;努力提高“高质量地认识问题、分析问题、解决问题所必须具备的能力”^[1];更加突出问题导向,促进解题向解决问题转化;更加突出重点,聚焦热点,直指高考。

当然,高考备考是一个系统工程,第二轮复习要做的很多,比如,重视新颖情境问题、组织科学训练、积累考试经验、调整身心状态、规范答卷书写、关注非智力因素,等等。这里,笔者就第二轮复习教学过程中值得关注的几个问题,给出自己的思考与教学建议。

1 教学难度的定位基于学情

近几年高考数学卷的难度起伏较大,尤其是近3年(2021年、2022年、2023年)高考数学全国卷难度的较大反差^[2],使高考数学复习教学的难度定位成为热门话题。“瞄准”所预判的高考难度去确定第二轮复习的难度,是惯用做法。但这是不全面、不科学的,需要统筹以下多种因素,科学设定(图1)。



图1

其一,基于高考数学难度趋势预判。通过对近几年(特别是上一年)高考数学卷的研究,聚焦难度变化趋势、知识点考查分布、核心思想方法运用、学科素养体现等,确定第二轮复习教学的难度、内容与实施路径。

其二,依据课程标准要求。《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》〔以下简称《课标(2020年修订)》〕是教材编写、教学实施、教学评价、学业质量评价乃至高考命题的重要依据。高考复习教学是一种形式的教学,当然要遵循课程标准。就第二轮复习而言,《课标(2020年修订)》不仅明示了教学内容(复习什么内容),还有学业质量标准(复习到什么程度,即难度把握),更有素养水平指标(关键能力达到什么层次),内容是明确的,要求是清晰的,实践是可操作的。

其三,突出学情判断。让学生都在原有基础上获得较大发展,是教学面向全体的基本内涵,也是有效教学的应有之义。让学生“跳一跳,够得到”,永远是教学的好样态。只有突出教学针对性,方能提高其有效性;只有基于学情教学,才能突出其针对性^[2]。“最近发展区”“先行组织者”“有教无类”“因材施教”……一定意义下,本质上都是指向基于学情。

其四,坚持教学面向全体。教学面向全体,本身就应包括面向优秀的学生,让他们在已有基础上得到更加充分的发展。例如,视学情允许,补充一些知识、方法、模型,让他们站得更高,看得更远,可能比一味

进行大量重复训练要有效得多。

例1 (2020年高考数学新高考卷I第22题)已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且过点 $A(2, 1)$ 。

(I)求 C 的方程;

(II)点 M, N 在 C 上, 且 $AM \perp AN, AD \perp MN$, D 为垂足。证明: 存在定点 Q , 使得 $|DQ|$ 为定值。

第(I)问, 易求得椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ 。

第(II)问, 这里仅讨论直线 MN 过定点的问题, 并将其推广至更为一般的情形。所用的方法一般被称为“齐次化方程法”, 它本质上就是坐标系平移, 似乎超出教学要求、高考范围, 但实践中不必提及坐标系平移, 只强调会用“齐次化方程法”解题就可。

由方程 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$, 可得 $[(x-2)+2]^2 + 2[(y-1)+1]^2 = 6$,

即 $(x-2)^2 + 2(y-1)^2 + 4(x-2) + 4(y-1) = 0$ 。①

令直线 MN 的方程为 $m(x-2) + n(y-1) = 1$ 。②

由①②得 $(x-2)^2 + 2(y-1)^2 + [4(x-2) + 4(y-1)][m(x-2) + n(y-1)] = 0$ 。

整理可得 $(2+4n)\left(\frac{y-1}{x-2}\right)^2 + (4m+4n)\frac{y-1}{x-2} + (1+4m) = 0$ 。③

设直线 AM, AN 的斜率分别为 k_1, k_2 , 由③得 $k_1 + k_2 = -\frac{4m+4n}{2+4n}, k_1 k_2 = \frac{1+4m}{2+4n}$, 由题设 $AM \perp AN$, 知 $\frac{1+4m}{2+4n} = -1$, 这就得到关于 m, n 的线性关系式, 从而直线 MN 过定点。显然, 此解题过程是比较简单的。

由此说开去, 若给出如下代数式的合适的值, 都有可能得到关于 m, n 的线性关系式, 进而确定直线 MN 过定点: $k_1 + k_2, k_1^2 + k_2^2, k_1 - k_2, k_1^3 + k_2^3, \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}, \frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2}, \frac{1}{k_1^3} + \frac{1}{k_2^3}, \dots$ 这显然已把问题推广到了两条直线的斜率的和、差、积、商、……为定值时的情形: 经过椭圆(双曲线)上一定点, 引两条直线, 分别与该椭圆(双曲线)交于另外两点, 当这两条直线的斜率之和、差、积、商等为定值时, 研究经过这两个交点的直线过定点的问题, 都可以用这里的“齐次化方程法”解决。

2 知识体系的拓展突出探索

第二轮复习, 是在第一轮复习的基础上对知识的再探索, 对方法的再认知, 对系统的再建构。过程中

依然要创设恰当的问题情境, 突出学生的主动探索, 而且这种探索的深度与广度要高于第一轮复习。

例2 单元视角下的“解三角形”知识网络建构。

在普通高中数学必修课程“几何与代数”主题中, “平面向量及其应用”是重要内容, 将“解三角形”置于“平面向量及其应用”单元之下, 其重要意义在于突出平面向量的应用, 特别是平面向量在探索几何问题中的应用, 教材中正弦定理、余弦定理的探索就是一个典型例证。

第二轮复习教学, 不是第一轮复习的重复, 更不是“压缩版”新授课的再现, 也不能“开列清单”直接呈现知识网络图。而是要突出探索与建构, 特别要重视在新授课与第一轮复习的基础上, 让学生认知达到一个新的高度:

首先, 在更加开放的背景下,

如图2, 从 $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$ 出发, 利用向量研究几何性质“三步曲”^[3], 以“向量数量化”为方向, 探索怎样由向量关系得到数量关系;

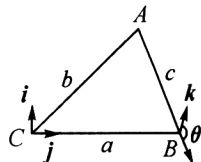


图2

体验不同“向量数量化”的思路得到不同的结果: 余弦定理、正弦定理、射影定理及一般关系 $[c \cos \theta = a \cos(B-\theta) + b \cos(A+\theta)]$, 正弦定理、射影定理都是它的特例, 如图3。

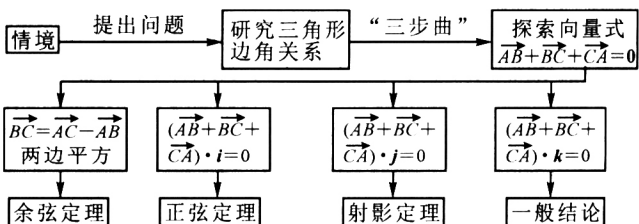


图3

进而, 在此基础上, 着力建构更加一般的、内涵丰富的、逻辑联系紧密的知识网络, 并且其建构过程要突出学生的主动探究。例如, 可以设计问题(题目), 让学生以解题的形式, 建立以正弦定理、余弦定理为核心的解三角形知识网络, 如图4。

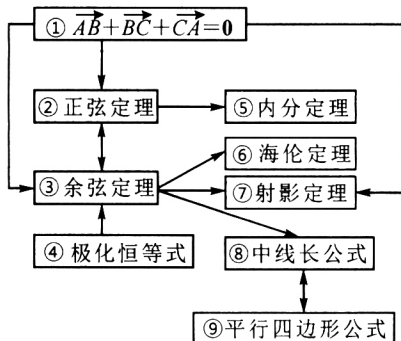


图4

3 模型套路的形成重在建构

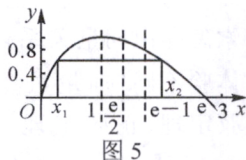
首先,在高考数学答卷时间如此紧张背景下,一般学生不可能每一道题都花很多时间去思考;其次,现行高考卷有一定数量的容易题,可以直接套用模型解决,以情境来说,属于“熟悉的”“关联的”;再次,高考数学知识考点就那么几十个,基本数学思想方法、解题策略就那么几种,基于思想方法视角看,高考题目呈现出较强的相似性;最后,高考数学命题是“换汤不换药”。因此,给学生一些模式模型、二级结论,既是必要的,也是可行的。

例3 (2021年数学新高考卷I第22题)已知函数 $f(x) = x(1 - \ln x)$ 。

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 设 a, b 为两个不相等的正数,且 $b \ln a - a \ln b = a - b$, 证明: $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < e$ 。

第(II)问,当将条件 $b \ln a - a \ln b = a - b$ 转化为 $f\left(\frac{1}{a}\right) = f\left(\frac{1}{b}\right)$ 后,问题就转化为一个函数题模型“极值点偏移”问题。如图5所示。



函数“极值点偏移”模型对学生而言并不陌生,近几年高考复习,针对函数与导数,“极值点偏移”“同构”“隐零点”“找点”“切线放缩”……大都给了模型、做了很多练习,但这道题当年学生答卷并不理想,一些学生(指有实力做压轴题的)根本就没有发现这道题可以转化为自己所熟悉的“极值点偏移”问题。

这说明,尽管要给学生模式模型、二级结论,但给什么,怎样给,给到什么程度,还是大有讲究的:需要把握尺度,不是越多越好,不宜追求大而全,否则适得其反,徒增学生负担;要突出基础性、典型性、应用性和发展性;给的关键在于学生是否能够学到;在给的同时,要教学生模型识别的意识和能力——联想,猜想,化归,转化,……不然,纵使学生记住了很多模式模型,到了考场,却仍是“空有一身好武艺”。

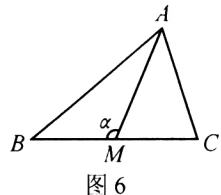
例4 “瓜子形”三角形模型的建构。

近年高考数学题,“瓜子形”三角形是一个考查热点。仅2023年高考数学全国甲卷、全国乙卷、新高考卷I、新高考卷II,就有6道试题涉及“瓜子形”三角形背景(分别是全国甲卷第12,16题,全国乙卷第18题,新高考卷I第16,17题,新高考卷II第17题),题型涉及选择题、填空题、解答题,内容涉及解三角形、解析几何、平面向量,3道小题均在压轴题位置,可见

建构“瓜子形”三角形模型是必要的,建构的过程是值得研究的。

第一,要源于基础。根深方蒂固,枝繁而叶茂,以教材经典题目说开去,体现模型的来龙去脉,突出模型不断生长与发展。

例如,苏教版《数学》(必修第二册)第11章“解三角形”有如下例题:如图6, AM 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的中线,求证: $AM =$



$$\frac{1}{2} \sqrt{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}.$$

单纯看这道题,其实就是三角形的中线长公式,当然也可以和平行四边形公式联系起来,本文例2已做分析。这里,从教材解题过程看,是分别在 $\triangle ABM$, $\triangle ACM$ 中,应用余弦定理去解决问题。可以由此说开去:聚焦“瓜子形”三角形中的三个三角形,展开更多层次、更大变化、更新视角的探究,建立一个模型系统。

第二,要强化联系。让点 M 在边 BC 上运动,并用参数 $\lambda (\overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{MC})$ 刻画点 M 的位置,则可以研究 AM 是 $\angle A$ 的平分线,点 M 在 BC 的中点、在三等分点,甚至任何位置,这样就可以针对研究 λ 的变化的一般情形,使得这一模型内涵更加丰富、结构更加紧密、应用更加广泛。

第三,要突出本质。围绕变量 λ 的取值,可以得到诸多变式,解题思路、知识(公式)应用也相应变化。例如,在三个三角形中利用面积法(特别适用于角平分线情形),在两个“小”三角形中考虑一组角互补,在“一大一小”两个三角形中考虑相同角,……聚焦三个三角形,抓住三角形的基本要素,构建方程是其不变的本质。

第四,要重视应用。经过近一年的备考,三年的高中学习,学生已经积累了大量的模式模型、二级结论,相对来说,二轮复习不宜再刻意追求量的增加,而是要提高模式识别、化归转化、模型应用等能力。

4 思想方法的渗透植根运用

思想方法是数学知识的精髓,理应是二轮复习的重中之重。但思想方法蕴含于知识发生发展的过程之中,没有离开知识的方法,也没有离开方法的知识;高考数学对于高中阶段知识的考查从来不是直接概念定义^[4]。因此,思想方法的渗透应该植根于运用,在发现问题、分析问题与解决问题的过程中,不断深化对思想方法的理解。

例5 解析几何解题教学中核心思想方法的渗透。

解析几何,研究的是几何对象,思路是将几何对象转化为代数对象,利用代数方法研究代数对象,进而解决几何问题。解析法又叫坐标法,用坐标表示几何对象是问题解决进入解析几何领域的重要标志,是解析几何的核心思想方法。解析几何解题教学无疑要突出这个核心思想方法,并且让学生有更多经历、更深体会,甚至可以有意让学生经历“曲折”、遭遇“挫折”。

直线与圆锥曲线问题中有这样一类题型:解题要将关键的几何关系用坐标表示,或借助于坐标寻求代数表示;具体实施常常通过两个点的横(纵)坐标之和、之积,利用根与系数的关系,转化为用其他参数(往往与直线的斜率,截距等有关)表达。解这类题目应该首先着眼于几何对象坐标化,这是解题的思维起点,也是解题的关键步骤。至于书写解题过程——设直线的方程、联立方程组、消元化为一元二次方程、表示出根与系数的关系、代入转化、运算推理、……则完全是例行程序。

仍以例1第(II)问为例说明如何将几何条件“ $AM \perp AN$ ”代数化。可以让学生探索多种思路,深切感受:所有思路都指向“几何对象代数化”,这是解析几何的核心思想方法;不同的“几何对象代数化”方向,虽然殊途同归,例如,这里都可以得到关于坐标的关系式 $(x_1-2)(x_2-2)+(y_1-1)(y_2-2)=0$,但实施路径却大相径庭,由此带来解题过程繁、简、难、易的较大差异。这里仅列举一些思路,如图7。

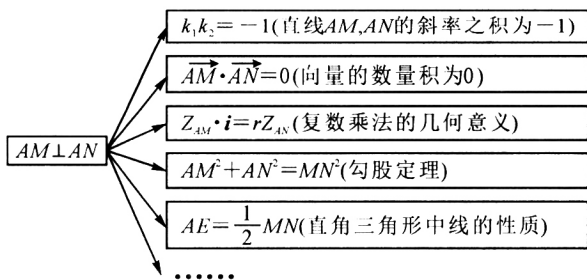


图7

5 解题教学的实施力主通法

一定意义上说,有效教学是基于统计意义之下的,全体(绝大多数)学生在原有基础上得到充分发展,是有效教学的应有之义。解题是高考数学的外在表现,解题教学是第二轮复习教学的重要形式,力主教通性通法是基本原则。

第一,确定通性通法要基于学情。具体到解题,通性通法具有相对性,可能会因学情不同而不同。因此确定并选择通性通法,需要充分地重视对学情的研

究,了解学生的已有认知基础,明确解题教学的目标,把握学生认知最近发展区,思考教哪些方法更适合大多数学生,回报率更高。

第二,把握一题多解与多题一解的关系。不刻意追求一题多解,不能以“发散思维”为理由,置学情于不顾,堆积多种方法。而是要突出多题一解,即通过题组教学,归纳题型,比较优化,提炼规律,深入理解解决一类问题的思路。

第三,突出解题思路自然生成。数学解题,既要讲理,又要讲情;既要有深度,又要有温度。突出思路的自然产生,重视学生的心理认可,不强加于人,不从天而降,让思路从学生的头脑中自然产生。

例6 (2021年八省份新高考适应性演练考试第21题)双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左顶点为A,右焦点为F,动点B在C上。当 $BF \perp AF$ 时, $|AF| = |BF|$ 。

(I)求C的离心率;

(II)若B在第一象限,证明: $\angle BFA = 2\angle BAF$ 。

第(II)问,比较文献[5]给出的9种证法,通性通法应该首选对角(几何对象)取正切,转化为直线的斜率,进而用坐标(代数对象)表示,……这是解决关于角(特别是直线与x轴所成的角)的问题的一般方法,固然还可以取正弦、余弦,或者其他思路,但首先应教给学生的就是取正切。这样的例子在近几年高考中屡见不鲜。

对于例6,这里给出一个令人“拍案叫绝”的好方法^[5]:易知 $|BF| = 2x_0 - a$ 。在x轴上取点D(D位于点F右侧),使 $|FD| = BF = 2x_0 - a$,则 $D(2x_0 + a, 0)$ 。可得AD的中点M的横坐标为 $\frac{2x_0 + a + (-a)}{2}$,即 $M(x_0, 0)$ 。因为 $B(x_0, y_0)$,所以 $BM \perp AD$,可得 $|BA| = |BD|$,从而 $\angle BAF = \angle FDB$ 。又 $\angle FDB = \angle FBD$,所以 $\angle BFA = 2\angle BAF$ 。

该证法充分体现了解析几何与平面几何的深度融合,解题步骤十分简洁,运算过程达到极简,不失为一种好方法。但如果换另外一个角度考量,结论也许就不那么肯定了:这只是解这道题的好方法,不是解决一类问题的方法,更不是解析几何的一般方法;从当年学生答卷来看,采用这种思路的学生非常少。如果在解题教学时,置学情于不顾,甚至否定大多数学生的“好念头”,另起炉灶,推介这种“奇思妙想”,可能有“秀技巧”之嫌,这就本末倒置了。



6 专题复习的设计问题导向

当下,一定程度地存在着第二轮复习与第一轮复习界限模糊不清的问题。例如,第二轮复习中的微专题教学设计(导学案):小题热身、考情分析、真题归纳、解题思路梳理、典型例题讲解、课堂与课后练习、……典型例题之前是为例题讲解做铺垫的,教学实践中这些铺垫耗时很多,真正到了要重点讲的例题时,却没有多少时间了,学生高度集中注意力也难以持续。更重要的是,在高考愈加临近的背景下,这里再搭桥铺路,与高考考场上的真实场景并不吻合。试问,学生在考场上的解题谁给搭桥铺路了?

例7 微专题“隐形圆”的教学设计。

这里给出一个教学设计片段。标题是“隐形圆”,正文是小题热身、题型梳理、考情分析、思想方法等,然后是典型例题,例题以几个题组形式给出,题组又分为原题及变式,摘录其中题组一如下:

题组一:利用圆的定义(到定点的距离等于定长的点的轨迹)确定隐形圆。

1. 如果圆 $(x-2a)^2 + (y-a-3)^2 = 4$ 上总存在两个点到原点的距离为 1,则实数 a 的取值范围是_____。

变式1:定圆外的切线成定角确定隐形圆。

2. 已知 $\odot O: x^2 + y^2 = 1$, $\odot M: (x-a)^2 + (y-a+4)^2 = 1$ 。若 $\odot M$ 上存在点 P ,过点 P 作 $\odot O$ 的两条切线,切点为 A, B ,使得 $\angle APB = 60^\circ$,则实数 a 的取值范围是_____。

变式2:定圆上的弦的中点到圆心距离是定值确定隐形圆。

3. 已知 $\odot C: x^2 + y^2 + 4x = 0$ 的圆心和圆上两点 A, B 构成等边三角形,则 AB 中点 M 的轨迹方程是()。

- A. $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 1$
- B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 3$
- C. $(x+1)^2 + y^2 = 2$
- D. $(x+2)^2 + y^2 = 3$

从标题就知道这节课的主要内容是关于“隐形圆”的,那么,这份导学案上的题目,大都应该与圆有关,解题应该朝着探索“隐形圆”而去,这事实上暗示了解题思维的方向。再看题组小标题,给出更加具体的确定圆的条件,又等于给出了明确的思维指向:要探索圆,朝着哪个方向探索。这些无疑降低了审题的难度,弱化了思维强度。这种设计,表面上解题过程会少走弯路,似乎有道理,但是,学生到了考场上,谁

给这样的暗示呢? 高考数学试卷 20 多道题,又有一道标明了它是什么类型的题呢?

笔者认为,可以将课题名称、小题热身、题型梳理、考情分析、思想方法、题型标签等统统删除,呈现给学生的就是干干巴巴的几道题(组)。教学就是要突出问题导向,开门见山,面对要解决的问题(题目),以解题为目标展开思维活动:首先,教“想得明白”——执果索因、化归转化、追根溯源、逆流而上,探寻解决问题的源头;其次教“写得恰当”——由因果果、顺流而下、谋篇布局、条理清晰、表达规范,书写解题的过程。

至于本课课题、题型特征、思想方法、解题规律等,可以作为一条暗线,有机渗透在教学过程中,并在适当时机让其自然浮出水面。例如,在一个题组解决之后,启发学生总结,揭示该题组的题目特征、解题思路、方法规律;在本课小结阶段,再让学生基于题组小结,概括本课主题、题型特征、思想方法,等等,如图8。最后点睛,画龙点睛,使标题出现在解决问题之后,在学生的总结反思之中,在学生的心里,岂不美哉?

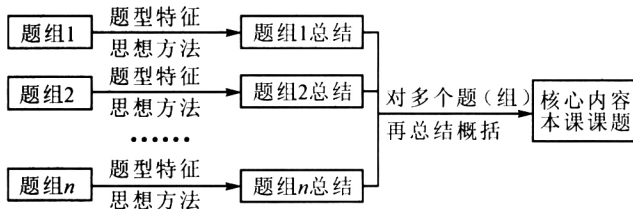


图8

高考正在由能力立意向素养导向转变,由解题向解决问题转变。但是,就当下的高考数学而言,其解决问题的外显形式依然是解题^[6]。故第二轮复习必须突出问题(题目)导向,任何贴标签、给暗示、打铺垫、做准备、……的行为,都可能是多余的,甚至是不恰当的。

参考文献:

- [1] 教育部考试中心. 中国高考评价体系[M]. 北京:人民教育出版社,2019.
- [2] 渠东剑. 高考数学复习教学的难度把握[J]. 中学数学教学参考(上旬),2023,11:1.
- [3] 人民教育出版社,课程教材研究所,中学教学课程教材研究开发中心. 普通高中教科书 A 版:数学(必修第二册)[M]. 北京:人民教育出版社,2019.
- [4] 赵轩,翟嘉祺,郭淑媛. 深化关键能力考查,助力创新人才选拔——2023 年高考数学新课标 I 卷评析[J]. 数学通报,2023,62(8):1-3,15.
- [5] 渠东剑. 高考数学复习教学教什么——八省联考解析几何题的分析与启示[J]. 中学数学教学参考(上旬),2021(4):46-50.
- [6] 渠东剑. 素养导向,守正创新——2023 年高考数学全国卷评析[J]. 中学数学教学参考(上旬),2023(10):57-61.