

学习的组织者、引导者与合作者. 2022 版新课标中提出“使人人能获得良好的数学教育, 不同的人在数学上得到不同的发展”, 这就要求教师在教学过程中要设置有梯度的学习任务, 让不同水平的学生都能在课堂上有所收获, 要注重启发式追问, 激发学生兴趣, 引发学生积极思考.

本节课采用自主探索、启发引导、合作交流的方式展开教学, 精心设计了有梯度的问题串, 引导学生操作、归纳、猜测、验证、表达, 在这个过程中渗透数学思想方法, 以知识的发生发展为载体, 给学生提供实质性思考的契机. 引导学生以数学的

思维, 构建数学的逻辑体系, 培养学习兴趣和科学态度, 初步养成有条理的思维品质, 逐步形成理性精神, 以发挥数学学科的育人作用.

参考文献

- [1]中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022 年版)[S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022
- [2]章建跃. 理解数学, 理解学生, 理解教学[J]. 中国数学教育, 2010(12): 3-7, 15
- [3]章建跃. 理解数学是教好数学的前提[J]. 数学通报, 2015(4): 61-63
- [4]雍亚波. 运算更高效, 题型更丰富, 思考更深入[J]. 教材教法, 2020(11): 24-25

基于课后习题研究的高中数学二轮复习

——以动点的轨迹方程为例

吴燕瑜 福建省石狮市永宁中学 (362700)

通过高三数学第一轮复习, 多数学生基本掌握了高中数学知识, 并初步形成了知识体系, 积累了一定的解题经验. 以往的教学经验表明, 考试导向的专题复习模式不利于我校学生解决问题能力的培养. 因为考试导向的专题复习模式题型太过丰富, 思维跨度比较大, 复习周期长, 笔者所处的学校是一所农村校, 所教的学生都是全市中下水平的学生, 极易导致学生陷入“疲乏期”, 收效甚微.

因此, 笔者在二轮复习的形式和专题设置、选择上作了尝试和改进, 更多地采用“微专题”. 实践证明, 这样的复习方式更适合我校的学生. 针对我校的生情, 微专题复习的切入点宜“小”不宜“大”.

1 问题的提出

笔者通过对本校学生在泉州市 2023 届高中毕业班质量监测二及泉州市 2022 届高中毕业班三次的质量监测的答题情况及平时的典型考题测试, 收集并分析相关数据, 发现学生对圆锥曲线的轨迹方程产生畏惧心理. 几次质量监测均考查了圆锥曲线的相关知识, 对直接用待定系数法求轨迹方程的题型, 多数学生在一轮复习后, 基本能做得出来. 但是, 如 2023 届泉州质量监测(二)第 22 题的第(1)问, 及 2022 届泉州质量监测(三)第 21 题的第(1)问, 变换了考法, 就给很多学生造成了心理压力, 导致学生丢分严重, 而这类题型, 解题的关键往往

是第一问能否求出轨迹方程.

分析原因, 学生对轨迹方程的基本方法在一轮复习之后已有了一定的认识, 但是解这种问题时, 不擅长找出问题的内部规律及知识之间的相互联系, 动辄排列一大堆的坐标关系, 进行无目的大量运算, 以致许多学生丧失信心, 功亏一篑.

2 对策分析

在二轮复习中, 根据学生学习的这一“困难点”, 设计针对性的微专题, 有效化解难点是非常有必要的. 本微专题的学习目标是: 总结和概括探究轨迹方程的常用方法, 并形成相应的解题模板, 提升学生的解题能力, 优化学生的解题思路.

基于以上的学习目标, 在微专题的例题及习题的选择上, 要求要有典型性和多样性, 要有一定数量的基础题, 由浅入深, 循序渐进. 其实, 在高三的复习过程中, 有一个重要的资料常常被我们忽略了, 那就是教材. 教材应该是学生夯实基础的根本, 教材中也有很多的习题有研究的价值, 高考卷中的有些题目就是根据教材中的习题改编的.

新教材将曲线与方程这一节删除, 近年来各地模拟题陷入误区, 认为圆锥曲线的轨迹问题不会再考查. 但是新教材中将这一部分内容放在了后面椭圆、双曲线、抛物线等章节中, 有大量的课本例题、课后习题都涉及轨迹方程问题, 因此其地位并没有

下降!因此,本微专题将新教材人教A版选择性必修第一册中与轨迹方程有关的题目进行改编和整合,既体现了基础性,也符合了系统性,同时在夯实基础知识的同时,学生还能有所提高.以下是笔者对本微专题的例题及习题的设计.

3 设计过程

典型例题 1 (原创题 改编人教A版选择性必修第一册 P89·9) 在平面直角坐标系 xOy 中,已知动点 P 到两定点 $O(0,0)$, $A(3,0)$ 的距离之比等于 $\lambda(\lambda > 0)$,

(1) 若 $\lambda = 1$, 求动点 P 的轨迹方程;

(2) 若 $\lambda = \frac{1}{2}$, 设动点 P 的轨迹为 E , 求轨迹 E 的方程.

设计意图 (1) 通过本道例题,教师可补充阿波罗尼斯圆的知识:平面内到两定点距离之比等于常数的动点轨迹为直线或圆.这个知识点出现在人教A版选择性必修第一册 P97 例题6的思考题中,对于学习成绩较好的同学,利用阿波罗尼斯圆的知识可以解决一类最值问题,掌握这个知识点,可以获得提高.

(2) 归纳本题的条件:题目中只有一个动点,已知关于动点的等量关系式,但不知动点轨迹是何种曲线,可用直接法求轨迹方程.总结直接法求动点的轨迹方程的解题套路:

表 1

考向	条件分析	解题套路化
直接法求动点轨迹方程	有一个动点、动点满足明显的等量关系式	设所求动点 $P(x, y)$ (若无坐标系,需选定适当位置的坐标系) → 寻找题目中的等量关系 (有时动点轨迹的数量关系不明显,可借助平面几何中的有关定理、性质,如勾股定理、垂径定理、中线定理等) → 运用有关公式 (如两点间距离公式、点到直线距离公式、夹角公式等) 代入动点坐标 → 作出相应的恒等变换得轨迹方程

典型例题 2 (原创题,改编自人教A版选择性必修第一册 P87 例5)

已知圆 $E: (x+1)^2 + y^2 = 4$ 上, 定点 $M(3, 0)$,

(1) 已知线段 PM 的端点 P 在圆 E 上运动, 求线段 PM 的中点 N 的轨迹方程;

(2) 过定点 M 任意作直线 l 与圆 E 交于 R, S

两点, 求弦 RS 中点 T 的轨迹方程.

设计意图 第(1)问是多动点问题,采用相关点法,它解决动点的轨迹方程问题的解题形式比较固定,可形成解题模板.第(2)问是中点弦问题,一般的解题思路是:①若是与圆的相交弦,利用圆的几何性质:圆心与弦中点的连线与弦垂直,再将垂直条件进行转化,可转化为向量垂直或者夹角为 90° ,再作进一步的等量转化.②若是与其他二次曲线的相交弦,则可用参数法或点差法.

下面将本例题形成通用的解题模板总结如下:

表 2

考向	条件分析	解题套路化
相关点法求动点轨迹方程	有两个动点,其中一动点的轨迹方程已知	设所求动点 $N(x, y)$ → 寻求所求动点 N 与已知动点 $P(x_0, y_0)$ 之间的关系 → 建立 N, P 两坐标间的关系,用分别用 x, y 表示出 x_0, y_0 → 将 x_0, y_0 代入已知曲线方程化简求解
参数法求动点轨迹方程	过定点的直线与曲线有两个交点,动点为弦的中点	设所求中点 $M(x, y)$, 利用点斜式设直线方程 (注意是否需要考虑斜率存不存在问题) → 联立直线与曲线方程,消 x (或 y) 得一元二次方程 → 韦达定理求出中点坐标,中点坐标与参数有关,如 k (要考虑根的差别式,确定参数范围) → 消掉参数得到关于变量 x, y 的方程
点差法求动点轨迹方程	过定点的直线与曲线有两个交点,动点为弦的中点	设所求中点 $M(x, y)$, 定点 $N(x_0, y_0)$, 弦的两个端点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ → 将 PQ 坐标代入曲线方程,两曲线方程作差 → 利用平方差公式将变量进行转化: $x_1 + x_2 = 2x, y_1 + y_2 = 2y, \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$ → 整理得关于变量 x, y 的方程

典型例题 3 (原创题,改编自人教A版选择性必修第一册 P115·6) 已知圆 $E: (x+1)^2 + y^2 = 4$, 圆心为 E , 定点 $B(1, 0)$, P 为圆 E 上任意一点, 线段 BP 的垂直平分线 l 和半径 EP 相交于点 Q , 求动点 Q 的轨迹方程.

变式训练 (原创题,改编自人教A版选择性必修第一册 P127·5) 已知圆 $E: (x+1)^2 + y^2 = 1$, 圆心为 E , 定点 $C(1, 0)$, P 为圆 E 上任意一点, 线段 CP 的垂直平分线 l 和直线 EP 相交于点 G , 求动点 G 的轨迹方程.

设计意图 本题用定义法,若动点运动的规律满足某种曲线的定义,则可根据曲线的定义直接写出动点的轨迹方程,此法一般用于求圆锥曲线的方程,在高考中常以填空、选择的形式出现.熟悉一些基本曲线的定义是用定义法求曲线方程的关键.

表 3

考向	条件分析	解题套路化
定义法求动点轨迹方程	(1)若题目中出现定点与定量,考虑圆;(2)若题目中出现两定点关于原点对称,又有定量,考虑椭圆或双曲线;(3)若题目出现定点与定直线,考虑抛物线	若动点运动的规律满足某种曲线的定义,则可根据曲线的定义直接写出动点的轨迹方程.要求学生具备:(一)熟知各曲线的定义;(二)熟练掌握平面几何的一些性质定理.基本步骤:定量→定形→定方程

4 基于课后习题研究的微专题复习课的思考

经过一轮复习,学生能较熟练地解决用待定系数法求轨迹方程的题型.教师在教学过程中,要理解二轮复习与一轮复习的区别:把“知识系统化,方法系列化,能力素养化,解题程序化”作为实现路径与方法.同时,还要探索回归教材与班本微专题的教学整合.教材是教学之本,要加强对教材例题、习题的探究,注重对教材的挖掘和利用.

参考文献

- [1]中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准[S].北京:人民教育出版社,2017
 [2]章建跃,李增沪主编.数学选择性必修(第一册)[M].北京:人民教育出版社,2019
 [3]张灿.基于问题设计的高三数学微专题教学实践——分段函数中的多元变量问题[J].福建中学数学,2021(1):22-25

突破高三复习瓶颈,可视化教学实践初探

孙昌洋 浙江省绍兴市柯桥区越崎中学(312000)

1 引言

在高三数学复习中,常常会遇到一些不易表达的数学问题(如立体几何中的动态问题、含参分段函数、平面向量的几何描述),对于这些问题,许多教师往往一语带过,认为学生应该懂的,而实际上,这些正是学生理解的瓶颈,学生们对问题的本质无法深入,对问题的根源无法探究,似懂非懂,对于同样问题的变式难以解决.比如在动态背景下的立体几何问题教学中,如果采用传统板书教学,动态过程无法显式呈现,只能让学生在图形的想象中完成这一复杂过程,对于一般学生来说,具有较大的挑战性.

现阶段,随着信息技术的不断发展,数学课堂与信息技术的高效整合成为一种趋势.例如,上面提到的动态立体几何问题,教师可以通过GeoGebra软件实时动态演示,逐层分析,变式教学,让学生看得清楚、想得明白,从本质上抓住问题的关键,从而提升直观想象能力.下面以一节高三复习课中的一道立体几何填空题为例,进行课堂演示的实例分析和可视化教学的探索.

2 可视化教学实例分析

例1 如图1所示,在棱长为4的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,

M 是棱 A_1A 上的动点, N 是棱 BC 的中点.当平面 D_1MN 与底面 $ABCD$ 所成锐二面角最小时, $A_1M =$ _____.

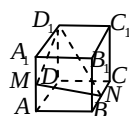


图 1

此题主要考查学生的空间作图能力和空间想象能力.由于此题建坐标系方便,动点唯一,所以利用空间向量,含参计算,也可求解.但此解法没有揭示二面角的动态变化过程,对于双动点、最值模式下的其它变式问题,如截面面积、周长的计算等无法解决.为进一步对此题进行探源,需要对此锐二面角的形成与动态变化过程中进行探究.下面利用 GeoGebra 软件一探究竟.

课堂上,教师通过设问,学生会较为快速地提出二面角的构造方法:

教师:如何找到平面 D_1MN 与底面 $ABCD$ 的交线?

学生:延长 D_1M , DA 交于点 E , 连接 EN , 即为两平面的交线.(打开 GeoGebra 软件,导入已做