加强问题导学提高复习的实效性

广西南宁市第三中学(530021) 陈 茵 陈 康

[摘 要]高中数学二轮复习以专题复习为主.在有限的时间内,既要夯实基础知识、基本技能,又要发展学生发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的能力,这就要求二轮复习教学高效."问题导学"教学法复习课教学模式能提高高中数学复习教学的实效性.

[关键词]问题导学;复习;实效性;构造函数

[中图分类号] G633.6 [文献标识码] A [文章编号] 1674-6058(2019)20-0003-02

第二轮复习的主要任务是让学生构建知识体系,并在解决问题的过程中掌握常用的数学思想方法.二轮复习在高考复习中具有承上启下的作用.由于时间限制,它不可能如第一轮复习那样面面俱到.因此,提高二轮复习的效率尤为重要.本文以《构造函数证明不等式》一课为例,谈谈"问题导学"教学法复习课教学模式在高中数学二轮复习数学中的应用.

"黄河清问题导学"教学法,是指教师在课堂教学中以问题为载体,通过启发、引导学生解决问题,从而达到以学生"学习"为根本目的的教学方法和策略.其复习课教学模式主要分四个环节:知识回顾—自主建构—应用探索—总结归纳.

一、知识回顾——温故知新、答疑解惑

问题1:构造函数证明不等式的基本步骤是什么?

第一步,作差构造函数,转化为与原不等式等价的函数最值问题.

第二步,利用导数,讨论函数的单调性,求函数的最值.

【说明】知识回顾明确了这节课的知识目标:构造函数证明不等式;提供解题步骤,降低操作难点.

二、自主建构——建构知识网络和方法网络

首先研究基本问题.

[**例1**](人教A版选修2-2 P32片段)利用函数的单调性,证明不等式:$e^x > x+1(x\neq 0)$.

问题2:根据不等式 $e^x > x+1(x\neq 0)$,你还能推导出哪些变式吗?

(1)$x > \ln(x+1)(x\neq 0)$;(2)$x-1 > \ln x(x\neq 1)$;(3)$e^x > x > \ln x$.

【说明】问题设置要有"台阶".课本练习题既可以激发学生原有的知识经验,又能为后续的知识体系构建打好基础.让学生自行推导出变式,促进其思维的灵活性,更能自主构建知识体系.二轮复习不仅要构建知识体系,还要构建方法体系.

三、应用探索——灵活运用、积极探索

[**例2**](2017年文科数学全国Ⅲ卷)已知函数 $f(x)=\ln x+ax^2+(2a+1)x$.

(1)略;(2)当 $a\leqslant 0$ 时,证明:$f(x)\leqslant -\dfrac{3}{4a}-2$.

解析:原不等式等价转化为 $\ln\left(-\dfrac{1}{2a}\right)-\dfrac{1}{4a}-1\leqslant -\dfrac{3}{4a}-2$,即证明 $\ln\left(-\dfrac{1}{2a}\right)+\dfrac{1}{2a}+1\leqslant 0$.

令 $x=-\dfrac{1}{2a}$,构造函数 $f(x)=\ln x-x+1$,求导得 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$.

	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	增	极大值0	减

于是 $f(x)\leqslant f(1)=0$,原不等式成立.

【说明】观察可知,不等式 $\ln x-x+1\leqslant 0$ 实际上是例1变式(2)的作差变形.高考题既源于教材又高于教材,而且又不拘泥于教材.因此,二轮复习要回归教材,更要提炼出教材里的例题、练习题的解题技巧.

[**例3**](2017年理科数学全国Ⅲ卷)已知函数 $f(x)=x-1-a\ln x$.

(1)略;(2)设 m 为整数,且对于任意正整数 n,$\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)<m$.求 m 的最小值.

解析:可将不等式 $\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)<m$.等价变形为 $\ln\left(1+\dfrac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)<\ln m$.

由(1)可知 $\ln x\leqslant x-1$,于是 $\ln\left(1+\dfrac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)<\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^n}\right)}{1-\dfrac{1}{2}}=1-\dfrac{1}{2^n}<1$.

故 $\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)<e$,又 $\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^3}\right)=\dfrac{135}{64}>2$,求得整数 m 的最小值为3.

【说明】本题采用的技巧是构造对数函数,将连乘结构的式子转化为求和,简化了计算.

问题3:例2和例3的解题过程有何联系?你有什么收获?

首先,这两个例题都利用了切线不等式 $\ln x\leqslant x-1$,

因此要重视教材习题的再挖掘.其次,题目中都需要变形才能使用切线不等式.学生解题时要有整体意识,要目标明确,学会对比已知条件与待解决问题间的差距,做到灵活运用.

[例4](2016年理科数学全国Ⅰ卷)已知函数 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$ 有两个零点.

(1)略;(2)设 x_1,x_2 是 $f(x)$ 的两个零点,证明:$x_1+x_2<2$.

解析:由(1)不妨设 $x_1<1<x_2$,原不等式等价于 $x_1<2-x_2<1$.

由题意,$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减,所以 $x_1<2-x_2<1$ 等价于 $f(x_1)>f(2-x_2)$,即 $f(2-x_2)<0$.

由于 $f(2-x_2)=-x_2e^{2-x_2}+a(x_2-1)^2$,而 $f(x_2)=(x_2-2)e^{x_2}+a(x_2-1)^2=0$,

所以 $f(2-x_2)=-x_2e^{2-x_2}-(x_2-2)e^{x_2}$.

构造 $g(x)=-xe^{2-x}-(x-2)e^x$,则

$$g'(x)=(x-1)(e^{2-x}-e^x)$$
$$=(x-1)(e-e^x)(e+e^x)e^{-x},$$

所以当 $x>1$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,从而当 $x>1$ 时,$g(x)<g(1)=0$.

从而 $g(x_2)=f(2-x_2)<0$,故原不等式成立.

【说明】本题的精彩之处在于,将自变量的大小比较等价转化为一个函数在某个单调区间上的函数值大小比较,从而利用函数的单调性来证明不等式.其中还体现了设而不求、整体代换的思想.

[例5](2018年理科数学全国Ⅰ卷)已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}-x+a\ln x$.

(1)略;(2)若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1,x_2,证明:$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$.

解析:由(1)可知,$f(x)$ 存在两个极值点当且仅当 $a>2$,且 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1,x_2 满足 $x^2-ax+1=0$,所以 $x_1x_2=1$.

不妨设 $x_1<1<x_2$,

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=-\frac{1}{x_1x_2}-1+a\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$$
$$=a\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}-2,$$

所以原不等式等价于 $\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}<1$,将 $x_1=\frac{1}{x_2}$ 代入,等价于 $\frac{1}{x_2}-x_2+2\ln x_2<0$.

由(1)知,当 $a=2$ 时,$f(x)=\frac{1}{x}-x+2\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,从而当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$g(x)<g(1)=0$.

故 $g(x_2)<0$,原不等式得证.

【说明】本题涉及函数双零点的不等式问题."双零点"是近年来的高考热点问题,常采用减元法,将多元问题转化为单元问题,构造函数,从而转化为函数单调性及最值等问题求解.

问题4:构造函数,利用函数性质是解决函数双零点不等式问题的突破口.请问例4和例5是如何找到这个函数的?

例4是将数值比较转化为函数值比较,将双变量转化为单变量,从而直接构造含单变量的函数;例5是利用双变量之间的约束条件达到降元的目的,将原不等式转化为函数最值问题.不仅如此,第一问的结论对第二问的证明至关重要,学生要学会充分挖掘第一问得到的隐藏条件,为第二问服务.

【说明】"应用探索"环节选取4道高考题,主要是为了达到以下目的.一是加深学生对知识和方法的理解和认识;二是培养学生总结归纳的能力,让学生学会自主构建知识体系;三是调动学生的探索积极性,让学生思维活跃起来.

四、总结归纳——强化概括的过程

问题5:从本节课中,你复习到了哪些知识和方法?

学生表示复习到了以下三方面的知识和方法.

知识方面,复习了构造函数证明不等式的基本步骤、一些重要的切线不等式.

方法方面,复习了构造函数的常见方法,如直接作差构造、构造对数函数的妙用.

思想方面,主要复习了化归思想.常常需要将复杂的问题转化为简单问题求解,将不等式证明转化为函数最值问题,充分体现了化归思想.

【说明】总结归纳不能流于形式,学生要自主完成,教师引导、补充.学生梳理这节课的知识脉络,全面地、完整地丰富自己的认知图式.这很好地锻炼了学生的抽象概括能力和语言表达能力.

用构造函数证明不等式的方法较多,灵活性强.二轮复习时,学生要学会自主归纳题型,学会联系和延伸.二轮复习的目标是使学生能对基础知识进行再加工,能将基础题型建立联系,能掌握基本的数学思想方法.采用"问题导学"教学法复习课教学模式进行二轮复习,能够有条理地、高效地达到复习教学目标.

[参考文献]

黄河清."问题导学"教学法的理论与实践[J].基础教育研究,2015(1):5-9+1.

(责任编辑　黄桂坚)