

高考数学运算核心素养的试题评价研究对命题设计的启示

——以近四年广西高考理科数学真题为例

周小英(广西桂林市桂林中学高中部(临桂校区) 541004)

【摘要】 为发展学生的数学运算核心素养,做好试题命制和教学备考工作,本文基于 SOLO 分类理论与高考评价体系,提出数学运算水平的四级评价框架,分析 2019—2022 年高考数学中“三角函数与解三角形”试题考查的数学运算水平,呈现数学运算的考查特点,为培养学生数学运算核心素养提供教学和命题方面的启示.

【关键词】 SOLO 分类理论;数学

《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》提出了基于“三会”的数学学科核心素养,并将“三会”作为培养数学核心素养的指导思想.与之相对的数学学科核心素养包括:数学抽象与直观想象,逻辑推理与数学抽象,数学建模与数据分析.近四年广西高考试题在“三角函数与解三角形”知识内容上较好地考查了数学运算核心素养.本文通过分析高考真题的数学运算水平层次,为高三数学备考及试题命制提供启示.

1 核心概念与理论基础

1.1 数学运算

“数学运算”作为六大数学学科核心素养之一,是在明晰运算对象的基础上,根据运算法则解决数学问题.主要内容为:理解运算对象,掌握运算法则,探究运算思路,选择运算方法,设计运算程序,求得运算结果^[1].数学运算能力是要求学生从小学到高中都应该有所发展的基本能力,是学生参加高考的必备素养.

1.2 SOLO 分类理论

“SOLO”指可观察的学习结果的结构,是一种学业评价的理论和方法.该理论将学习者的认知由低到高分 5 个层次:前结构水平(P)、单一结构水平(U)、多元结构水平(M)、关联水平(R)、拓展抽象水平(E)^[2].其中,拓展结构水平分为 E_1 和 E_2 两个层次. SOLO 分类理论为学生的学习发展提供了系统的描述方法.

2 研究思路

聚焦“三角函数与解三角形”内容,以 2019—2022 年广西理科高考数学真题为研究对象,研究者按照普通高中数学课程标准中的学业质量水平要求,首先采用 SOLO 分类划分相应试题的数学运算水平层次,然后进行统计分析,为数学运算核心素养的精确考查提出命题建议,同时为高三复习精准备考提供启示.

3 研究框架

高考评价体系是高考命题的蓝图,高考应注重考查基础性、综合性、应用性和创新性(“四翼”).“四翼”既能有效地评价学生素质的高低,也能精准地评价高考试题的质量^[3].参考已有的相关研究^[4],注意到“四翼”考查要求与 SOLO 分类理论的一致性,研究者将二者结合,在此基础上进一步分析命题路径和对应的数学水平特征,构建四级评价框架,即“考查要求—命题路径—SOLO 层次—对应数学水平特征”,如表 1 所示.后续将采用该框架对高考真题进行评价分析.

表 1

考查要求	命题路径	SOLO 层次	对应水平特征
基础性	强调双基扎实. 能在简单的数学问题情境中了解运算对象, 对学生能按照顺序运算, 有简化运算的意识以及用运算结果说明问题的能力进行测量与评价	单一结构水平(U)	能找到解决问题的单个运算对象, 并且能根据单个的运算对象解决问题, 整体上对“数学运算”核心素养的要求低
		多元结构水平(M)	能找到解决问题的多个运算对象, 不需要有机结合运算对象就能解决问题, 整体上对“数学运算”核心素养的要求一般
综合性	强调融会贯通. 能在较复杂的情境中理解运算对象, 从数学思想方法的高度认识算理, 对学生能够合理运算和用运算探讨问题的能力进行测量与评价	关联结构水平(R)	能找到解决问题的多个运算对象, 并且有机结合运算对象才能解决问题, 整体上对“数学运算”核心素养的要求中等
应用性	强调学以致用. 能在综合的复杂情境中把问题转化为运算求解问题, 对学生简洁运算、理解运算和用运算探讨问题的能力进行测量与评价	拓展抽象水平(E ₁)	能发现隐含的信息, 应用学科思想方法分析问题, 对问题进行抽象概括, 从理论的高度来分析问题, 并且能够深化问题, 归纳出新的更抽象的知识, 得出开放性的答案, 整体上对“数学运算”核心素养的要求高 ^[3]
创新性	强调创新意识及思维. 能在新颖复杂的情境中把问题转化为运算求解的问题, 对学生完成开放、探究性的任务, 找到新问题、发现新规律、设计运算程序并解决问题的能力进行测量与评价	拓展抽象水平(E ₂)	

4 试题评价研究

4.1 试题运算层次

根据上述四级评价框架对 2019—2022 年广西高考理科数学真题中的相关典型试题进行分析. 所选试题均属于三角函数与解三角形知识范围, 文给出数学运算各个水平试题的范例, 具体结果如下.

4.1.1 单一结构水平(U) 运算层次范例

例 1 (2019 年全国 III 卷 4 题) 若 $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\cos 2\alpha = (\quad)$

$$(A) \frac{8}{9}, \quad (B) \frac{7}{9}, \quad (C) -\frac{7}{9}, \quad (D) -\frac{8}{9}.$$

评析 试题情境简单、熟悉, 考查的知识是倍角公式, 要求考生能找出单个数学对象并进行运算, 属于单一结构水平(U).

4.1.2 多元结构水平(M) 运算层次范例

例 2 (2020 年全国 III 卷 16 题) 关于函数 $f(x) = \sin x + \frac{1}{\sin x}$ 有如下四个命题:

① $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称.

- ② $f(x)$ 的图象关于原点对称.
 - ③ $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称.
 - ④ $f(x)$ 的最小值为 2.
- 其中所有真命题的序号是_____.

评析 情境简单,各选项的运算对象单一,试题每个选项的运算层次都属于单一结构水平,解决的是单个运算问题,选项间无直接关联,各运算对象间无需有机结合,试题属于多点结构水平.

4.1.3 关联结构水平(R) 运算层次范例

例 3 (2021 年全国甲卷 9 题) 若 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$,

$\tan 2\alpha = \frac{\cos \alpha}{2 - \sin \alpha}$, 则 $\tan \alpha =$ ()

- (A) $\frac{\sqrt{15}}{15}$.
- (B) $\frac{\sqrt{5}}{5}$.
- (C) $\frac{\sqrt{5}}{3}$.
- (D) $\frac{\sqrt{15}}{3}$.

评析 试题以三角函数等式化简为载体,考查正切倍角公式以及同角三角函数关系式等知识的综合运用,需要依据公式进行有机结合的合理运算,故本题属于关联结构水平.

4.1.4 低拓展抽象结构水平(E₁) 运算层次范例

例 4 (2022 年全国甲卷 11 题) 设函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$ 在区间 $(0, \pi)$ 恰有三个极值点、两个零点,则 ω 的取值范围是()

- (A) $[\frac{5}{3}, \frac{13}{6})$.
- (B) $[\frac{5}{3}, \frac{19}{6})$.
- (C) $(\frac{13}{6}, \frac{8}{3}]$.
- (D) $(\frac{13}{6}, \frac{19}{6}]$.

评析 试题以正弦型函数的极值点、零点的个数为载体,求 ω 的取值范围,属于综合情境. 考查学

生通过发现隐含的信息,找到运算对象(关于 $\omega\pi + \frac{\pi}{3}$ 的不等式),并运算求解的能力. 试题要求学生能够正确理解正弦函数相关性质的运算,对数学运算要求较高,属于低拓展抽象结构水平.

4.1.5 高拓展抽象结构水平(E₂) 运算层次范例

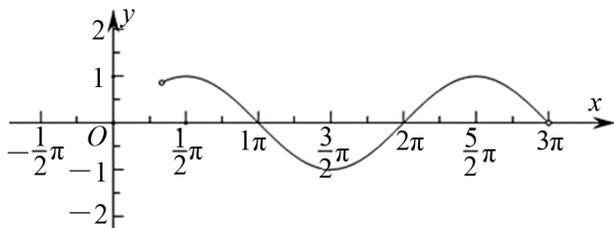


图 1

例 5 (2022 年全国甲卷 12 题) 已知 $a = \frac{31}{32}$, $b = \cos \frac{1}{4}$, $c = 4 \sin \frac{1}{4}$, 则()

- (A) $c > b > a$.
- (B) $b > a > c$.
- (C) $a > b > c$.
- (D) $a > c > b$.

评析 试题创设了新颖的探索情境,具备一定的开放性. 试题要求考生借助数值比较大小的探究,通过观察、抽象和探究发现隐含的信息,构造出运算对象(函数 $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \cos x, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$). 试题需要对问题进行抽象概括,要求考生具备一定的创新意识和较高运算能力,属于高拓展抽象结构水平.

4.2 试题运算层次分析

根据表 1 所示的分析框架,研究者对 2019—2022 年广西高考理科数学卷中考查“三角函数与解三角形”知识的试题做了数学运算核心素养水平层次的 SOLO 分类,得到最终划分结果,见表 2.

表 2

	2022 年	2021 年	2020 年	2019 年
U			第 7 题, 33%	第 4, 15 题, 31%
M	第 5 题, 25%		第 16 题, 33%	
R	第 16 题, 25%	第 9 题, 33%	第 9 题, 33%	第 9, 18(1) 题, 34%
E ₁	第 11 题, 25%	第 8, 16 题, 67%		第 12, 18(2) 题, 34%
E ₂	第 12 题, 25%			

表 2 是近四年试题题型的分布及数学运算水平情况. 在试题题型方面,由题号不难发现,“三角函数

与解三角形”知识仅在 2019 年以大题的形式出现,往后的年份中均只考小题. 试题知识点分布情况为:

一道解三角形,两道解三角函数.

分析近四年该知识点相关试题的数学运算水平,对关于该知识点的各年高考真题对应的 SOLO 运算层次进行统计,根据各年真题所属运算水平对应的分值分布初步分析高考命题的要求及试题质量.2019 年和 2020 年分别有三道相关的真题,各属于三个不同的运算水平层次.2019 年卷数学运算水平层次单一结构水平、关联结构水平和低拓展抽象结构水平的分值比例依次为 31%、34% 和 34%;2020 年卷单一结构水平、多元结构水平、关联结构水平的分值比例依次为 33%、33% 和 33%.由此可见,这两年的“三角函数与解三角形”真题所属三种水平层次试题的分值比例较为接近,反映了这两年高考对学生的数学运算能力从低到高都有所要求,即对基础性、综合性、应用性进行了全方位考查,突出要求学生能够在较为熟悉、比较复杂的情境中进行问题分析和解决.

2021 年卷含三道题目,了两个数学运算水平层次;2022 年则增加了一道小题,了四个数学运算水平层次.2021 年卷关联结构水平和低拓展抽象结构水平分值比例依次为 33%、67%,低拓展抽象结构水平试题的分值比例较高;2022 年卷各结构水平分值比例依次为 25%、25%、25%、25%,拓展抽象结构水平分值比例比往年高,对数学运算的要求更为突出.由此可见,2019—2022 年广西高考对“三角函数和解三角形”中的“数学运算”的考查要求逐年提高,考查此内容或将维持在关联结构水平和拓展结构水平,未来有将此内容作一大一小两个试题进行考查的趋势.

5 研究启示

基于上述分析,研究者在试题命制设计和高三教学备考两个方面得到如下启示.

5.1 命题导向

由试题数学运算层次分析可知,水平层次属于单一结构和多元结构的试题比例不低,平均值为 30.5%,凸显了高考试题深化基础性考查和对基础较弱的学生的关注;关联结构和拓展抽象结构试题比例的平均值为 69.5%,该较高的比例显示高考注重考查学生的关键能力和核心素养,强调对学生数学运算能力的考查,体现了对基础较好的学生的选拔.因此,在命制“三角函数与解三角形”的试题时,可以考虑将此知识按五种层次数学运算水平的试题比例依次设置为 13%、20%、32%、30%、5%,以更好地考查数学运算核心素养.众所周知,好试题不等

于好试卷,试卷质量的优劣还取决于整张试卷产生的效应,不仅仅是个别试题产生的效应.因此,试题命制需要关注知识内容和题型结构等方面在运算水平层次上的合理分布,命题人应综合各方面因素以提高试题质量.

5.2 教学导向

数学运算核心素养是有层次的、分阶段发展的,不可能一蹴而就,教师应根据学生的数学运算能力层次实施精准评价和有针对性的教学.首先,教学中需重视情景的合理设置,逐步提高学生找到运算对象、发现运算问题和转化运算问题的能力,形成运算思维.情景的设置应符合学生的实际学情,体现新时代对创新型人才的要求.其次,教学中应重视知识体系的构建.知识体系的构建应着眼于发展学生的学科素养和学科能力,注重知识纵横间联系及结构化的问题解决,体现数学运算核心素养发展的整体性、阶段性和连续性.日常教学要注重从情境到问题、从概念形成到知识建构的整体性,有序帮助学生构建系统化的知识体系,使知识之间互联互通、形成结构.让学生在明确运算对象时,能自然地联想运算对象之间的关联,找到解决问题的办法.

6 结语

数学运算核心素养导向下的高考试题具有层次性,对现阶段数学运算核心素养的培养与教学提出了新要求.数学运算核心素养导向下的教学应目标明确、具有梯度,遵循循序渐进的原则,尊重学生的个性化特点,精准施教.数学素养的形成是一个长期的过程,在日常教学和考试命题中应特别关注数学学习过程中思维品质和关键能力的逐渐形成,促进学生喜欢数学,提高学生会学数学和会用数学的能力.

【课题名称:“在高中学考中有效考查数学运算核心素养的命题设计与研究”课题编号:2022ZJY2334】

参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版 2020年修订)[M]. 北京:人民教育出版社,2020.
- [2] 王亚婷,周莹. 新课标背景下高考数学试题 SOLO 思维层次研究:以 2019 年高考数学全国卷为例[J]. 教育测量与评价,2020(4):17-24.
- [3] 教育部考试中心. 中国高考评价体系说明(2019年版)[M]. 北京:人民教育出版社,2019.
- [4] 于涛. 基于 SOLO 分类理论的高考数学试题评价研究——以 2020—2021 年全国新高考数学 I 卷为例[J]. 中学数学月刊,2022(04):49-53.