数学分析教学中关于三角函数定义的探讨

雷　力

（重庆师范大学数学科学学院，重庆　401331）

摘　要　中学数学课程中三角函数的定义依赖于几何直观。在数学分析课程中，我们需要更严格的三角函数定义。文章通过定积分给出三角函数与反三角函数的一个分析上严格的定义。并从此定义出发，重新证明三角函数的若干性质。

关键词　三角函数；反三角函数；定积分；导数

中图分类号：G633.6　　**文献标识码**：A

三角函数是数学分析课程中重要的基本初等函数之一。在很多数学分析、高等数学教材中，三角函数的定义都是沿用中学数学的定义[1-2]。

在初中数学课程中，我们是用直角三角形的各边长之比来定义三角函数的，直角三角形的一个锐角的对边与斜边之比称为这个角的正弦，它的邻边与斜边之比称为这个角的余弦。在高中数学课程中，我们又将三角函数的定义域从锐角推广到了任意角。建立平面直角坐标系xOy，将射线Ox绕原点O旋转θ角，θ角的正负由旋转方向所决定，逆时针旋转为正，顺时针旋转为负，设所得射线与圆心在O点的单位圆相交于点A。我们定义角θ的正弦为点A的纵坐标，角θ的余弦为点A的横坐标。我们知道，平面上任意一点绕原点O旋转 180°所到的位置与原来的位置关于O点对称，任意一点绕原点O旋转 360°就回到原来的位置。所以正弦函数与余弦函数都是周期函数，并且自变量每增加半个周期函数值就改变一次符号。

在数学研究中，我们通常使用弧度制来衡量角的大小，所谓弧度制是用弧长与半径之比作为对应圆心角的角度。这样，任意一个角就可以用一个实数来表示它的大小，而正弦函数与余弦函数则是定义在整个实数集上的实值周期函数。

然而前面所述的三角函数定义是高度依赖几何直观的，其中角的构成我们用到了“旋转”这样的平面变换，角的大小我们用了圆弧的长度来度量。这些是我们还未曾定义的概念。数学分析这门课程，是以实数理论为基础的对古典微积分的严格化。因此，在数学分析课程中采用中学数学的三角函数定义是不严密的.本文将通过定积分给出三角函数一个分析上严格的定义。

首先我们考虑圆周率应该如何严格定义。在平面几何中，我们知道圆周率是圆的周长与直径之比，也就是说圆周率等于单位圆的周长的一半。在数学分析中，我们可以利用定积分来计算圆的一段弧的长度，从而给出圆周率的严格定义。令 C 为平面上以原点为圆心的单位圆$\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$。那么圆C在第一象限的四分之一圆弧可表示为

$$y=\sqrt{1-x^2},\ x\in[0,1].$$

其弧长为

$$\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

这是一个无界函数的反常积分，具有瑕点$x=1$。由于$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\le\frac{1}{\sqrt{1-x}}$，而反常积分$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$收敛，由比较判别法可知$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$也收敛。我们将圆周率定义为此积分的两倍，

$$\pi:=2\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.\#(1)$$

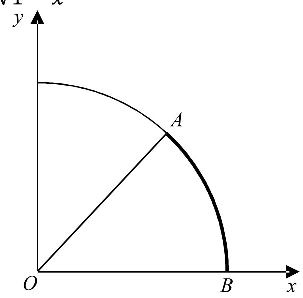

图 1

接下来我们考虑如何严格定义余弦函数与反余弦函数.如图 1 所示，设A,B为圆C上两点，点B坐标为$(1,0)$，点A在上半平面，坐标为(x_1,y_1)。则弧$\widehat{AB}$的方程为

$$y=\sqrt{1-x^2},\ x\in[x_1,1].$$

在弧度制下，设$\angle AOB=\theta$，即弧$\widehat{AB}$的长度为θ.利用定积分，我们计算$\widehat{AB}$出弧长为

$$\theta=\int_{x_1}^1\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\int_{x_1}^1\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\int_{x_1}^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

这是一个无界函数的反常积分，由比较判别法可知它是收敛的。

我们希望将点A的横坐标x_1定义为角θ的余弦，那么θ就应是x_1的反余弦函数值。因此，我们可以将反余弦函数定义为下述变限积分。

定义 1. 反余弦函数$\arccos:[-1,1]\to\mathbb{R}$的定义为

$$\arccos x:=\int_x^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}.\#(2)$$

由反余弦函数的定义，我们立刻可以得到反余弦函数的导数公式。

定理 1. 当$x\in(-1,1)$时，

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

结合 (1) 式与 (2) 式，我们有 $\arccos(-1)=\pi$，$\arccos 1=0$ 由于 arccos 的导数小于零，所以 arccos 是$[-1,1]$上连续的单调递减函数，值域为$[0,\pi]$。因此 arccos 存在反函数。现将 arccos 的反函数记为 cos，其定义域为$[0,\pi]$，值域为$[-1,1]$。然后我们再通过周期性$\cos(x+\pi)=-\cos x$将 cos 的定义域从$[0,\pi]$延拓到整个$\mathbb{R}$上。这样就得到了余弦函数的一个严格定义。

定义 2. 余弦函数是由以下性质所确定的函数$\cos:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

①当$x\in[0,\pi]$时，$\arccos(\cos x)=x$，

②对任意$x\in\mathbb{R}$，$\cos(x+\pi)=-\cos x$.

然后我们考虑如何严格定义正弦函数与反正弦函数。在图 1 中，我们设点$A(x_1,y_1)$在第一象限。那么弧$\widehat{AB}$也可用下述方程表示

$$x=\sqrt{1-y^2},\ y\in[0,y_1].$$

因此弧$\widehat{AB}$的长度也可表示为

$$\theta=\int_0^{y_1}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\mathrm{d}y=\int_0^{y_1}\sqrt{1+\left(\frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}\right)^2}\mathrm{d}y=\int_0^{y_1}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}.$$

我们希望将点A的纵坐标y_1定义为角θ的正弦，那么θ就应是y_1的反正弦函数值。因此，我们可以将反正弦函数定义为下述变限积分.

定义 3. 反正弦函数$\arcsin:[-1,1]\to\mathbb{R}$的定义为

$$\arcsin x:=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}},\qquad x\in[-1,1].\#(3)$$

由反正弦函数的定义，我们立刻可以得到反正弦函数的导数公式。

定理 2. 当$x\in(-1,1)$时，

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

根据反余弦函数与反正弦函数的定义，还可以得到它们的下述关系。

定理 3.

$$\arccos x+\arcsin x=\frac{\pi}{2}.\#(4)$$

结合 (1) 式与 (3) 式，我们有$\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$，$\arccos 1=\frac{\pi}{2}$。由于 arcsin 的导数大于零，所以 arcsin 是$[-1,1]$上连续的单调递增函数，值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$。因此 arcsin 存在反函数。现将 arcsin 的反函数记为 sin，其定义域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，值域为$[-1,1]$。然后我们再通过周期性$\sin(x+\pi)=-\sin x$将 sin 的定义域从$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$延拓到整个上。这样，我们就得到了正弦函数的一个严格定义。

定义 4. 正弦函数是由以下性质所确定的函数$\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

①当$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$时，$\arcsin(\sin x)=x$,

②对任意$x\in\mathbb{R}$，$\sin(x+\pi)=-\sin x$.

然后其他几个三角函数的定义就可以直接给出了$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$，$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$，$\sec x=\frac{1}{\cos x}$以及$\csc x=\frac{1}{\sin x}$，分别称为正切、余切、正割与余割函数.

接下来我们从上面给出的三角函数的严格定义出发，重新证明三角函数的若干基本性质。

定理 4.

$$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right).\#(5)$$

证明. 当$x\in[0,\pi]$时，令$y=\cos x$，那么有$x=\arccos y$。由定理 3 可得$\arcsin y=\frac{\pi}{2}-x$。由此可得$y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$。于是(5)式在区间$[0,\pi]$上成立.

再根据$\cos(x+\pi)=-\cos x$ 和$\sin(x-\pi)=-\sin x$可知，(5)式在整个$\mathbb{R}$上均成立。

定理 5. 正弦函数是奇函数，余弦函数是偶函数，即

$\sin(-x)=-\sin x$，$\cos(-x)=\cos x$

证明. 由 arcsin 的定义可知 arcsin 是奇函数，所以 sin 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上也是奇函数。对任意$x\in\mathbb{R}$，设$x=\theta+k\pi$，$\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，$k\in\mathbb{Z}$，有$\sin x=(-1)^k\sin\theta=-(-1)^k\sin(-\theta)=-\sin(-x)$。所以 sin 在$\mathbb{R}$上是奇函数。

利用(5)式可得，$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$及$\cos(-x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.由 sin 是奇函数可得$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.所以$\cos(-x)=\cos x$，即 cos 在上是偶函数。

定理 6.

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x,\#(6)$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x.\#(7)$$

证明. 利用 cos 是偶函数，再结合 (5) 式可得 $\cos x=\cos(-x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$，这样就证明了(6)式。再利用(6)式，有$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin(x+\pi)=-\sin x$。这样就证明了(7)式.

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1.\#(8)$$

下面我们证明正弦与余弦的平方和等于 1。

定理 7.

证明. 由(6)式和(7)式可知，$\sin^2 x+\cos^2 x$，是具有周期$\frac{\pi}{2}$的周期函数，所以我们只需证明(8)式在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上成立。

当$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，令$y=\sin x$，则$y\in[0,1]$，且$x=\arcsin y=\int_0^y\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$。用换元积分法，令$s=\sqrt{1-t^2}$，可得

$$x=\int_0^y\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=-\int_1^{\sqrt{1-y^2}}\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s^2}}.$$

然后，我们有

$$\frac{\pi}{2}-x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s^2}}+\int_1^{\sqrt{1-y^2}}\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s^2}}$$
$$=\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s^2}}=\arcsin\sqrt{1-y^2}.$$

于是有$\sqrt{1-y^2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$然后我们就可以得到$\sin^2 x+\cos^2 x=1$。

定理 8. 设为任意整数。那么

①$k\pi$是$\sin x$的零点；当$2k\pi<x<(2k+1)\pi$时，$\sin x>0$；当$(2k-1)\pi<x<2k\pi$时，$\sin x<0$；

② $\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$ 是 $\cos x$ 的零点；当 $\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi<x<\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi$时，$\cos x>0$；当$\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi<x<\left(2k+\frac{3}{2}\right)\pi$时，$\cos x<0$。

证明. 由$\arcsin 0=0$可知$\sin 0=0$。然后便可得$k\pi$是$\sin x$的零点.

由 arcsin 是增函数可知，sin 在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上也是增函数。所以当$-\frac{\pi}{2}\le x<0$时，$\sin x<0$；当$0<x\le\frac{\pi}{2}$时，$\sin x>0$。又因为$\sin(x+\pi)=-\sin x$，所以当$0<x<\pi$时，$\sin x>0$。然后便可以得到当$2k\pi<x<(2k+1)$时，$\sin x>0$；当$(2k-1)\pi<x<2k\pi$时，$\sin x<0$。

再利用$\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$，我们便能得出关于$\cos x$的正负性的结论。

下面我们推导正弦函数和余弦函数的导数公式。

定理 9. 正弦函数和余弦函数的导数分别为

$$(\sin x)'=\cos x,\ (\cos x)'=-\sin x.$$

证明. 由定理 2，对$x\in(-1,1)$，有$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$根据反函数的求导法则，当$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$时，有$(sinx)'=\sqrt{1-(sinx)^2}$. 再利用定理 7 与定理 8，得到$(sinx)'=cosx$. 然后利用$sin(x+\pi)=-sinx$ 和$cos(x+\pi)=-cosx$，我们得到，当$x\in\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right),k\in\mathbb{Z}$时，有$(\sin x)'=\cos x$.再利用拉格朗日中值定理，在$x_0=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$处，有$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\cos x}{1}=\cos x_0$，即$\sin x$在$x_0$处可导且导数为$\cos x_0$。所以$\sin x$在整个上可导，导函数为$\cos x$。

然后根据(6)式和(7)式，我们就可以得到

$$(cosx)'=\left(sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)'=cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-sinx.$$

有了正弦函数和余弦函数的导数公式后，我们可以进一步求出正弦函数和余弦函数的高阶导数为

$$(\sin x)^{(n)}=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}\sin x, & 若n为偶数,\\(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos x, & 若n为奇数,\end{cases}$$
$$(\cos x)^{(n)}=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}\cos x, & 若n为偶数,\\(-1)^{\frac{n+1}{2}}\sin x, & 若n为奇数.\end{cases}$$

在得出正弦函数和余弦函数的高阶导数后，我们便可以推导出它们的泰勒展开式。

定理 10.正弦函数和余弦函数具有下列幂级数展开式。

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k\sin x_0}{(2k)!}(x-x_0)^{2k}+\frac{(-1)^k\cos x_0}{(2k+1)!}(x-x_0)^{2k+1}\right],\#(9)$$
$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k\cos x_0}{(2k)!}(x-x_0)^{2k}-\frac{(-1)^k\sin x_0}{(2k+1)!}(x-x_0)^{2k+1}\right].\#(10)$$

特别的，在$x_0=0$处，有

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots,\#(11)$$
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots.\#(12)$$

最后，我们推导三角函数的和角公式与差角公式。

定理 11. 和(差)角公式。

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

证明. 在(9)式与(10)式中，令$x_0=\alpha, x=\alpha+\beta$，我们得到

$$\sin(\alpha+\beta)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k\sin\alpha}{(2k)!}\beta^{2k}+\frac{(-1)^k\cos\alpha}{(2k+1)!}\beta^{2k+1}\right],$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k\cos\alpha}{(2k)!}\beta^{2k}-\frac{(-1)^k\sin\alpha}{(2k+1)!}\beta^{2k+1}\right].$$

在上面的公式中我们令$\alpha=0$，得到

$$\cos\beta=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\beta^{2k},\ \sin\beta=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\beta^{2k+1}.$$

综合以上各式，我们便得到和角公式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

将和角公式中的β替换为$-\beta$，即可得到差角公式。

一些数学分析教材采用幂级数展开式(11)与(12)作为正弦函数与余弦函数的定义[3][4]。前面的推导过程表明这种使用幂级数展开式给出的定义与我们通过定积分给出的定义是一致的。但正弦函数与余弦函数的幂级数定义体现不出它们的几何意义，本文所采用的定义不仅具备严格性，也保留了三角函数的几何直观。

参考文献

[1] 同济大学数学系.高等数学(第七版)[M].北京:高等教育出版社,2014.

[2] 华东师范大学数学科学学院.数学分析(第五版)[M].北京:高等教育出版社,2019.

[3] Walter Rudin.数学分析原理[M].赵慈庚,蒋铎译.北京:机械工业出版社,2019.

[4] B.A.卓里奇.数学分析[M].蒋铎,王昆扬,周美珂,邝荣雨译.北京:高等教育出版社,2006.