数形结合思想在三角函数中的应用

刘大鹏

（辽宁省黑山县第一高级中学　121400）

摘　要：数形结合是数学中一种重要的思想方法，它直观、形象、简洁，所以备受青睐. 三角函数图象含藏了三角函数的所有性质，准确画图和熟练运用是基本功，必须给予足够的重视. 本文阐述了三角函数线的基础知识和应用，以及如何用单位圆、数轴、三角函数图象解题.

关键词：三角函数线；单位圆；数轴；三角函数图象

中图分类号：G632　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1008－0333(2021)25－0004－02

一、关于三角函数线的一些基础知识

1. 三角函数线的概念

单位圆中某些有向线段的长度和方向可以用来表示三角函数值，称它们为三角函数线.

注意：用字母表示这些线段时，特别要注意表示起点的字母写在前面，而表示终点的字母写在后面，它们的顺序不能颠倒.

2. 三角函数线的方向

规定：凡是从原点出发的线段，以原点为起点；不从原点出发的线段，以三角函数线与坐标轴的交点为起点.

3. 三角函数线表示的三角函数值的正负的规定

(1)正弦线、正切线的方向与纵轴一致，向上为正，向下为负.

(2)余弦线的方向与横轴一致，向右为正，向左为负.

二、应用三角函数线解题

1. 比较同名不同角函数值的大小或比较同角不同名函数值的大小或既不同名也不同角的函数值的大小

例1　比较 $\sin\frac{2\pi}{5}$，$\cos\frac{6\pi}{5}$，$\tan\frac{7\pi}{5}$的大小.

解析　$\cos\frac{6\pi}{5}<\sin\frac{2\pi}{5}<\tan\frac{7\pi}{5}$.

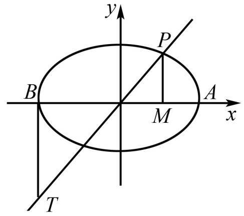

图1

说明　学生解题，最容易出现图1中的错误，把图中的$\overrightarrow{BT}$当作$\frac{7\pi}{5}$的正切线. 从而得出 $\tan\frac{7\pi}{5}<\cos\frac{6\pi}{5}<\sin\frac{2\pi}{5}$这样的错误结论. 错误的根源是没有弄清三角函数线的由来，三角函数都是用比值来定义的，本来，三角函数值与分子、分母都有关，我们令分母等于1，从而有了三角函数线，因此，正切线的起点必须是$A(1,0)$，过$A(1,0)$作单位圆的切线，如果与角的终边不相交，需要把角的终边反向延长，交于点T，$\overrightarrow{AT}$是正切线.

2. 巧求三角函数值

例2　$\tan255°=$(　　).

A. $-2-\sqrt{3}$　B. $-2+\sqrt{3}$　C. $2-\sqrt{3}$　D. $2+\sqrt{3}$

解析　利用诱导公式和正切线，得 $\tan255°=\tan75°>\tan45°=1$. 故选 D.

说明　本题的解法充分利用选项提供的信息，结合诱导公式、正切线很好地解决了我们不会精确求 $\tan255°$的值的问题.

例3　已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$，$0<\alpha<\pi$，则 $\tan\alpha=$(　　).

A. $-\frac{4}{3}$　B. $-\frac{3}{4}$　C. $-\frac{4}{3}$或$-\frac{3}{4}$　D. $\frac{4}{3}$

解法1　若$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，作出α的正弦线和余弦线，由两边之和大于第三边，得 $\sin\alpha+\cos\alpha>1$. 由 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$，知$|\sin\alpha|>|\cos\alpha|$. 所以$\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，作出$\alpha$的正切线，知$|\tan\alpha|>1$，故选 A.

收稿日期：2021－07－05

作者简介：刘大鹏(1971.10－)，男，辽宁省黑山人，本科，中学高级教师，从事高中数学教学研究.

解法 2　构造对偶式并联立 $\begin{cases}\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5},\\ \sin\alpha-\cos\alpha=m,\end{cases}$ 两边平方相加,得 $2=m^2+\dfrac{1}{25}$. 由三角函数线,知 $m=\dfrac{7}{5}$. 所以 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$,$\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$,$\tan\alpha=-\dfrac{4}{3}$.

3. 解三角方程或三角不等式(组)

例 4　解不等式:$\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)<-\dfrac{1}{2}$.

解析　如图 2,取半径 OB 的中点 M,过点 M 作 x 轴的垂线,交单位圆于 P,T 两点,连接 OP,OT. 分别得到 $\dfrac{2\pi}{3}$ 和 $\dfrac{4\pi}{3}$ 的终边,所以 $\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi<2x+\dfrac{\pi}{3}<2k\pi+\dfrac{4\pi}{3}$.

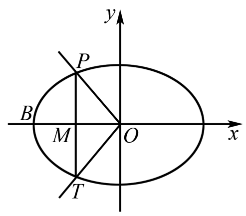

图2

所以解集是 $\left\{x\,\middle|\,\dfrac{\pi}{6}+k\pi<x<k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

4. 求三角函数的值域

例 5　$y=\sin x,x\in(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}]$ 的值域是(　　).

A. $(\dfrac{\sqrt{3}}{2},1]$　　B. $(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}]$

C. $(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},1]$　　D. $(-\dfrac{1}{2},1]$

答案:选 C.

说明　如果不画三角函数线也不画正弦图象,很容易误选 B.

5. 巧妙地解决某些三角问题

例 6　若 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$,求证:$\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$.

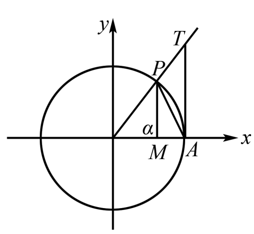

图3

证明　如图 3 为单位圆,则 $\overset{\frown}{AP}$ 长等于 α,$\sin\alpha=MP$,$\tan\alpha=AT$. 由面积关系,得 $S_{\triangle OAP}<S_{扇形OAP}<S_{\triangle OAT}$.

即 $\dfrac{1}{2}OA\cdot MP<\dfrac{1}{2}OA\cdot\overset{\frown}{AP}<\dfrac{1}{2}OA\cdot AT$.

所以 $\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$.

三、利用数轴或单位圆或其它图形解题

例 7　已知 $A(\cos20°,\sin20°)$,$B(\cos80°,\sin80°)$,求 $|AB|$.

解析　A,B 是单位圆上两点,连接 OB,OA,AB,知 $\triangle ABO$ 是正三角形,所以 $|AB|=1$.

例 8　求 $\sin18°$ 的值.

解析　构造顶角是 $36°$,底边长为 1 的等腰三角形,BD 是底角平分线,则 $AD=BD=BC=1$. 令 $AB=x$,$CD=a$,由 $\triangle BCD\backsim\triangle ABC$,得 $\dfrac{a}{1}=\dfrac{1}{x}$,所以 $x=\dfrac{1}{a}=a+1$. 即 $a^2+a-1=0$,解得 $a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

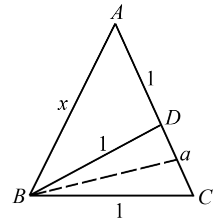

图4

所以 $\sin18°=\dfrac{a}{2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

四、利用所给图象求正弦型函数解析式 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$

根据 $|A|=\dfrac{y_{\max}-y_{\min}}{2}$,$b=\dfrac{y_{\max}+y_{\min}}{2}$,$|w|=\dfrac{2\pi}{|T|}$,求 φ 时,一般代入最高点或最低点坐标,这样能防止产生增解,要让学生知道如果代入对称中心坐标,会产生增解.

例 9　写出如图 5 所示函数 $y=A\sin(wx+\varphi)$,$(A>0,w>0)$的解析式.

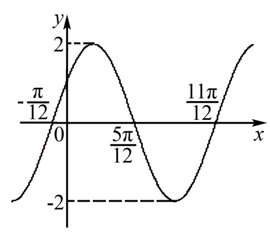

图5

解析　由图可知,$A=2$,$T=\dfrac{11\pi}{12}-\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)=\pi$,$w=\dfrac{2\pi}{T}=2$,所以 $y=2\sin(2x+\varphi)$,由对称性,知最高点 $\left(\dfrac{\pi}{6},2\right)$,代入,得 $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\varphi\right)=1$,所以 $\dfrac{\pi}{3}+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$,所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$. 所以 $y=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

参考文献:

[1]田新. 三角函数线[J]. 数学通讯,1996(11):3.

[责任编辑:李　璟]