

例析三角函数中 ω 的取值范围问题的求解策略

谢新华(福建省莆田第二中学 351131)

【摘要】 在三角函数的解题中, ω 的最值、取值范围问题是高考题、模拟题中常见的题型, 此类题型的背景一般有与三角函数的单调性相关、与对称性相关、与函数零点相关、与三角函数性质综合相关等, 求解时需要综合运用三角函数的图象及性质. 本文分类例析三角函数中 ω 的取值范围问题问题求解的一般策略.

【关键词】 三角函数; 最值; 取值范围

1 与单调性相关

例1 (2012·新课标理9) 已知 $\omega > 0$, 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4})$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单调递减, 则 ω 的取值范围是()

- A. $[\frac{1}{2}, \frac{5}{4}]$ B. $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$
C. $(0, \frac{1}{2}]$ D. $(0, 2]$

解法1 因为 $\frac{\pi}{2} < x < \pi, \omega > 0$, 所以 $\frac{\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4} < \omega x + \frac{\pi}{4} < \pi\omega + \frac{\pi}{4}$, 因为函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4})$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单调递减, 所以 $(\frac{\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4}, \pi\omega + \frac{\pi}{4}) \subseteq [\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi], k \in \mathbf{Z}$,

$$\text{所以} \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \frac{\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4} \\ \pi\omega + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{解得} \begin{cases} \omega \geq \frac{1}{2} + 4k \\ \omega \leq \frac{5}{4} + 2k \end{cases} (k \in \mathbf{Z}), \text{因为 } \omega > 0,$$

所以 $k=0$, 所以 $\frac{1}{2} \leq \omega \leq \frac{5}{4}$, 故选 A.

解法2 令 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \omega x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 得 $\frac{\pi}{4\omega} + \frac{2k\pi}{\omega} \leq x \leq \frac{5\pi}{4\omega} + \frac{2k\pi}{\omega} (k \in \mathbf{Z})$, 所以函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4})$ 的单调递减区间为 $[\frac{\pi}{4\omega} + \frac{2k\pi}{\omega}, \frac{5\pi}{4\omega} + \frac{2k\pi}{\omega}] (k \in \mathbf{Z})$, 因为函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4})$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单调递减, 所以 $(\frac{\pi}{2}, \pi) \subseteq [\frac{\pi}{4\omega} + \frac{2k\pi}{\omega}, \frac{5\pi}{4\omega} + \frac{2k\pi}{\omega}] (k \in \mathbf{Z})$,

$$\text{所以} \begin{cases} \frac{\pi}{4\omega} + \frac{2k\pi}{\omega} \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi \leq \frac{5\pi}{4\omega} + \frac{2k\pi}{\omega} \end{cases} (k \in \mathbf{Z})$$

$$\text{解得} \begin{cases} \omega \geq \frac{1}{2} + 4k \\ \omega \leq \frac{5}{4} + 2k \end{cases} (k \in \mathbf{Z}), \text{因为 } \omega > 0, \text{ 所以 } k=0,$$

所以 $\frac{1}{2} \leq \omega \leq \frac{5}{4}$, 故选 A.

评析 本题是与三角函数的单调性相关的 ω 的取值范围问题, 求解策略一是令 $u = \omega x + \varphi$, 研究已知单调性背景下函数 $y = \sin u$ 的定义域 D , 利用 D 是函数 $y = \sin u$ 单调区间的子集, 求得 ω 的取值范围; 求解另一策略是直接研究函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的单调区间 E , 利用已知单调性的区间是 E 的子集, 求得 ω 的取值范围.

2 与对称性相关

例2 (2020·四川资阳) 已知函数 $f(x) =$

$\sin(\omega x + \frac{\pi}{4}) (\omega > 0)$ 的图象在 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 内有且仅有一

一条对称轴, 则实数 ω 的取值范围是()

A. $(0, 5)$ B. $(0, 5]$

C. $[1, 5)$ D. $(1, 5]$

解法 1 因为令 $u = \omega x + \frac{\pi}{4}$, 因为 $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$,

所以 $u \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\omega + \frac{\pi}{4}]$, 因为函数 $f(x) = \sin(\omega x$

$+ \frac{\pi}{4}) (\omega > 0, x \in [0, \frac{\pi}{4}])$ 图象有且仅有一条对称

轴, 即 $y = \sin u (u \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\omega + \frac{\pi}{4}])$ 图象有且仅有一

条对称轴, 所以 $\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4}\omega + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2}$, 解得 $1 \leq \omega$

< 5 , 故选 C.

解法 2 由 $\omega x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 得 $x =$

$\frac{\pi}{4\omega} + \frac{k\pi}{\omega} (k \in \mathbf{Z})$ 为函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4}) (\omega >$

$0)$ 的对称轴, 因为 $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, 所以 $\frac{\pi}{4\omega} + \frac{k\pi}{\omega} \subseteq [0,$

$\frac{\pi}{4}] (k \in \mathbf{Z})$, 即 $\begin{cases} \frac{\pi}{4\omega} + \frac{k\pi}{\omega} \geq 0 \\ \frac{\pi}{4\omega} + \frac{k\pi}{\omega} \leq \frac{\pi}{4} \end{cases} (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $-\frac{1}{4}$

$\leq k \leq \frac{\omega}{4} - \frac{1}{4} (k \in \mathbf{Z})$, 因为函数 $f(x)$ 的图象在

$[0, \frac{\pi}{4}]$ 内有且仅有一条对称轴, 所以 $k = 0$, 所以

$\begin{cases} 0 \leq \frac{\omega}{4} - \frac{1}{4} \\ 1 > \frac{\omega}{4} - \frac{1}{4} \end{cases}$, 解得 $1 \leq \omega < 5$, 故选 C.

解法 3 因为函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4}) (\omega >$

$0, x \in [0, \frac{\pi}{4}])$ 图象有且仅有一条对称轴, 所以 $\frac{2\pi}{\omega}$

$= T > \frac{\pi}{4} - 0$, 所以 $0 < \omega < 8$, 排除 B、D, 当 $\omega = \frac{1}{2}$

时, $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4})$, 由 $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, 得 $(\frac{1}{2}x$

$+ \frac{\pi}{4}) \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}]$, 此时没有对称轴, 排除 A, 故

选 C.

评析 本题是与对称性相关的 ω 的取值范围问题, 求解策略一是令 $u = \omega x + \varphi$, 研究函数 $y = \sin u$ 的定义域 D , 结合函数 $y = \sin u$ 的图象建立不等式, 求得 ω 的取值范围; 求解策略二是直接研究函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的对称性, 利用对称轴与函数的定义域的关系建立不等式, 求得 ω 的取值范围; 求解策略三是分析周期的范围, 利用特值法、排除法得出答案.

3 与函数零点相关

例 3 (2021 · 上海市模拟) 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin\omega x + \cos\omega x (\omega > 0)$ 在 $[0, \pi]$ 上有两个零点, 则 ω 的取值范围为_____.

解法 1 因为 $f(x) = \sqrt{3}\sin\omega x + \cos\omega x = 2\sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$, 因为 $x \in [0, \pi]$, 所以 $\omega x + \frac{\pi}{6} \in$

$[\frac{\pi}{6}, \omega\pi + \frac{\pi}{6}]$, 因为 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上有两个零点,

所以 $y = \sin u$ 在 $[\frac{\pi}{6}, \omega\pi + \frac{\pi}{6}]$ 上有两个零点, 所以

$2\pi \leq \omega\pi + \frac{\pi}{6} < 3\pi$, 解得 $\frac{11}{6} \leq \omega < \frac{17}{6}$, 所以 ω 的取

值范围为 $[\frac{11}{6}, \frac{17}{6})$. 故答案为: $[\frac{11}{6}, \frac{17}{6})$.

解法 2 因为 $f(x) = \sqrt{3}\sin\omega x + \cos\omega x = 2\sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$, 令 $\omega x + \frac{\pi}{6} = k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 得 $x = \frac{k\pi}{\omega}$

$-\frac{\pi}{6\omega} (k \in \mathbf{Z})$, 因为 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上有两个零点,

所以 $\begin{cases} \frac{k\pi}{\omega} - \frac{\pi}{6\omega} \geq 0 \\ \frac{k\pi}{\omega} - \frac{\pi}{6\omega} \leq \pi \end{cases} (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $\frac{1}{6} \leq k \leq \omega +$

$\frac{1}{6} (k \in \mathbf{Z})$, 所以 $k = 1, 2$ 且当 $k \geq 3$ 时不符合题意,

$$\text{所以} \begin{cases} \omega + \frac{1}{6} \geq 2 \\ \omega + \frac{1}{6} < 3 \end{cases}, \text{解得} \frac{11}{6} \leq \omega < \frac{17}{6}, \text{所以} \omega \text{ 的取值}$$

范围为 $[\frac{11}{6}, \frac{17}{6})$. 故答案为: $[\frac{11}{6}, \frac{17}{6})$.

评析 本题是与函数零点相关的 ω 的取值范围问题, 求解策略一是令 $u = \omega x + \varphi$, 研究函数 $y = \sin u$ 的零点, 结合函数 $y = \sin u$ 的图象建立不等式, 求得 ω 的取值范围; 求解策略二是直接研究函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的零点, 利用零点与函数的定义域的关系建立不等式, 求得 ω 的取值范围.

4 与三角函数性质综合相关

例 4 (2021 · 山西太原模拟)(多选题) 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象

关于 $x = -\frac{\pi}{3}$ 对称, 且 $f(\frac{\pi}{6}) = 0$, $f(x)$ 在

$[\frac{\pi}{3}, \frac{11\pi}{24}]$ 上单调递增, 则 ω 的可能取值是()

A. 1 B. 3 C. 5 D. 7

解析 由于函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$

($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象关于 $x = -\frac{\pi}{3}$ 对称, 则

$$-\frac{\pi}{3}\omega + \varphi = k_1\pi + \frac{\pi}{2}, (k_1 \in \mathbf{Z}) \text{ ①},$$

由于 $f(\frac{\pi}{6}) = 0$, 所以 $\frac{\pi}{6}\omega + \varphi = k_2\pi (k_2 \in \mathbf{Z})$ ②,

② - ① 得:

$$\frac{\pi}{2}\omega = (k_2 - k_1)\pi - \frac{\pi}{2}, \text{所以} \omega = 2(k_2 - k_1) -$$

$1 (k_1 - k_2 \in \mathbf{Z})$, 故 ω 为奇数, 且 $f(x)$ 在

$[\frac{\pi}{3}, \frac{11\pi}{24}]$ 上单调递增, 所以 $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} \geq \frac{11\pi}{24} - \frac{\pi}{3}$, 解

得 $0 < \omega \leq 8$.

当 $k_2 - k_1 = 1, 2, 3, 4$, 故 ω 的取值为: 1, 3, 5, 7,

当 $\omega = 1$ 时, 可以求得 $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{6}), x \in$

$[\frac{\pi}{3}, \frac{11\pi}{24}]$ 时, $x - \frac{\pi}{6} \in [\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{24}] \subseteq [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 满足

条件; 当 $\omega = 3$ 时, 因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以不满足条件;

当 $\omega = 5$ 时, $f(x) = \sin(5x + \frac{\pi}{6}), x \in$

$[\frac{\pi}{3}, \frac{11\pi}{24}]$ 时, $5x + \frac{\pi}{6} \in [\frac{11\pi}{6}, \frac{59\pi}{24}] \subseteq [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$, 满

足条件; 当 $\omega = 7$ 时, $f(x) = \sin(7x - \frac{\pi}{6}), 7x - \frac{\pi}{6}$

$\in [\frac{13\pi}{6}, \frac{73\pi}{24}]$, 既有增区间, 又有减区间, 所以不满

足条件; 所以满足条件的 ω 的取值为 1, 5, 故选: AC.

评析 解决三角函数中已知单调区间求参数 ω 范围时, 首先要有已知的单调区间是函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ 单调区间的子集的意识, 然后明确正弦、余弦函数的单调区间长度不会超过半个周期(正切函数的单调区间长度不会超过一个周期)这一事实最终准确求得参数范围, 数形结合能给解题带来比较清晰的思路.

【基金资助: 福建省教育科学“十三五”规划课题 2020 年度教育教学改革专项课题: 学科素养视域下“读思达”教学法的数学课堂应用研究(项目编号: Fjjgzx20-077)】

参考文献:

- [1] 江志杰. 三角函数模型中“ ω ”值的求法探究[J]. 数学通讯, 2017, (05): 1-4.
- [2] 文敏. 几种求三角函数中 ω 的最值的方法[J]. 中学生数学, 2020, (15): 14-16.
- [3] 黄顺江. 绘三角图像 参数学思想 提核心素养[J]. 中学数学, 2021, (17): 56-57.