

高中数学椭圆学习进阶研究

刘力韬 黄金莹*

【摘要】高中数学椭圆部分的内容是教学重难点，具有一定的抽象性、复杂性，学生在实际学习中可能存在障碍。文章以椭圆的学习进阶作为研究对象，通过确定进阶终点、进阶维度、成就水平，以及明确各水平的表现期望来构建椭圆的学习进阶模型，进而揭示学生在学习椭圆时认知发展的路径。

【关键词】高中数学 椭圆 学习进阶

【中图分类号】 G623.5

【文献标识码】 A

【文章编号】 1002-3275 (2023) 13-60-04

高中数学的椭圆部分既是教师教学的重点，也是学生学习的难点。在实际的教学中，一些教师为了提高教学效率，割裂了知识间的联系，讲授的知识点偏碎片化，这会使学生在一定程度上产生学习倦怠心理，导致学习质量下降。为了提高教学质量，教师应注重知识间的连贯性，将碎片化的知识点系统梳理形成结构化的知识网络，从而有效地帮助学生理解并掌握知识点。2002年，美国教育界兴起了一个新的研究方向——学习进阶。学习进阶关注的是学生随着时间的推移、学习的深入，其思维发展的过程，其内涵与注重知识间的连贯性、将碎片化知识点梳理形成知识网络这个诉求不谋而合。目前国内外关于学习进阶理论的研究主要集中于生物、化学、物理等领域，并取得了较为理想的研究成果，但在数学教育领域仍处于起步阶段。吴颖康等人通过开展学习进阶应用于数学教育的研究，阐述了数学教育中学习进阶的研究进展，并提出在数学教学中应用学习进阶理论的建议。^[1]

本研究通过分析学习进阶的相关概念，将学习进阶理论应用于椭圆教学，构建椭圆的学习进阶模型，揭示学生在学习该知识点时存在的不足，帮助教师明确教学目标并引导学生逐步学习并掌握相关知识点，优化课堂教学过程。

一、学习进阶相关概念界定

学习进阶理论先在教育测量与评价中得到了广泛应用，随后被引入课程设计、概念教学等方面，应用逐渐广泛，并且备受关注，不少研究者根据自身的理解及研究方向对学习进阶进行了定义。罗斯曼等人将学习进阶定义为“由小学延续到高中的、有逻辑的、符合学生发展规律的‘概念序列’”^[2]，史密斯等人将学习进阶定义为“学生在学习某一核心概念的过程中，所遵循的一系列逐渐复杂的思维路径”^[3]。姚建欣等人通过对比研究近几年有关学习进阶的论文，发现大多数研究者都引用美国国家研究理事会（NRC）的定义方式^[4]，即随着学习时间的不断增加，学生对于某一内容主题思考和认识不断丰富、精进和深入的一种过程。因此本研究对学习进阶的概念界定也采用NRC的定义方式。

韦斯林等人在进行大量研究的基础上，通过明确学习进阶各方面的基本特征来精确把握学习进阶的内涵，并提出了学习进阶所应包含的要素，告诉人们完整的学习进阶应该包括什么。本文在参考韦斯林等人关于学习进阶要素论述^[5]的基础上，总结出一个完整的学习进阶主要包含五个要素，分别是进阶终点、进阶维度、成就水平、学业表现期望和测评工具。

进阶终点主要指的是学习进阶的顶点（学习进阶

刘力韬 / 佳木斯大学理学院，从事中学数学教育研究；黄金莹 / 佳木斯大学理学院，教授，从事中学数学教育研究（佳木斯 154007）；*通讯作者，E-mail: hjyshuxue@163.com

要达到的最高水平),是经历某一阶段学习后期望学生能够达到的最终水平,一般由社会期望和课程标准决定。进阶维度通常是指学科中蕴含的核心概念或者核心概念的子概念,研究者可通过追踪学生对核心概念的理解运用情况和关键能力的发展来了解学习进阶进程。成就水平主要指学生在学习过程中思维发展的不同水平,这些水平体现了学生在认知过程中的思维发展情况。正如通过爬上一级又一级的台阶才能爬上山顶,而这些台阶就是成就水平。学业表现期望指的是学生在达到各成就水平时可测量的具体表现,这也是评估学生是否达到某一成就水平的重要标准。测评工具主要指用于检查学生实际的学习表现与预期的学习进阶模型的达成程度而开发的检测工具,测评结果如果不太理想,可以依据测评结果进一步修改学习进阶模型。

学习进阶理论刻画的是学生在学习过程中的思维认知路径,它能厘清知识点概念间所包含的逻辑关系,指出所学知识点的前后顺序,通过已学的知识铺垫后续的学习。学习进阶不仅描述学生学习和思维发展的路径,而且能够确定学生目前思维所处的层次,通过对学生思维所处的每一个阶段进行描述,呈现学生需要达到的成就水平,帮助教师确定学生在该阶段学习中存在的误区,从而制订合理的教学方式,促使学生在学习中不断完善知识架构,不断进步。

二、椭圆的学习进阶

常见的学习进阶研究范式一般由模型预设和实证检验两大部分组成,其构建主要遵循以下步骤:首先确定需要研究的核心概念。其次构建学习进阶预设的模型,其中包括确定合适的进阶终点、进阶维度、成就水平、学业表现期望。最后开发相关的测评工具,收集数据并进行测评分析。根据测评的数据结果完成对假设的学习进阶模型的修订与完善工作。

(一) 进阶终点的确定

1. 课程标准分析

《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》(以下简称课程标准)要求学生掌握椭圆的定义、标准方程及简单几何性质,并且强调了椭圆、抛物线的简单应用。

2. 教材分析

本研究以高中数学选择性必修第一册第三章圆锥曲线的方程的有关内容为例进行研究。教材中对于椭圆

圆部分的知识点层层递进、承上启下,由椭圆的定义引出标准方程,接着通过标准方程进一步探索椭圆的几何性质,最终实现椭圆的简单应用。

因此本研究确定椭圆教学的进阶终点为:运用椭圆的性质解决相关的综合问题,进一步培养学生的数学思想以及数学核心素养。

(二) 进阶维度的确定

本研究通过分析课程标准中对于椭圆教学的要求,整理高中数学选择性必修第一册的内容设置,总结出教材中椭圆部分以“椭圆的定义—椭圆的标准方程—椭圆的简单几何性质—椭圆的应用”的学习顺序逐步推进,以此来进行椭圆纵向维度的研究。因此可将椭圆学习进阶模型的进阶维度确定为以下四个:

维度1:结合生活情境,类比圆的概念及定义,认知椭圆的定义。

维度2:根据椭圆的定义,通过建立合适的直角坐标系研究椭圆的标准方程表达式。

维度3:类比研究圆的标准方程得出几何性质的方法,结合椭圆的标准方程研究椭圆的几何性质。

维度4:明晰椭圆与直线的联系(求解直线与椭圆联立的问题)。

(三) 成就水平的确定

成就水平描述的是学生在学习过程中从最初的水平不断发展到最终水平时其思维发展的路径。最低水平的确定一般基于学生在进行某阶段学习前的已有经验,包括学生头脑中已有的相关经验以及与某阶段学习有关的前概念等。最高水平一般依据社会期望、课程标准对学生的要求等来确定。中间各水平的确定则基于已有的对于学生情况的研究结果,包括学生的认知发展规律以及具体某阶段学习的实际情况。已有研究发现,学习进阶理论与SOLO分类理论之间存在一致性^[6],基于SOLO分类理论可以很好地刻画学生在认知过程中思维发展的过程与水平。因此本研究将根据SOLO分类理论将椭圆学习进阶模型的成就水平划分为以下五个:

前结构水平:学生在进行本阶段学习前头脑已经存在的有关信息,一般是学生掌握的零碎信息,这些信息可能是正确的,也可能是错误的,学生对概念未形成精确的认知。

单一结构水平:了解并掌握部分简单的信息,未建立信息间的联系。

多元结构水平:能说出多个信息的内涵,能进行

完整的解释与说明。

关联结构水平：从能建立少部分信息间的联系到建立所有信息的联系，能解决简单问题。

抽象结构水平：形成系统的信息体系，能灵活运用并迁移知识，能解决复杂问题。

（四）各水平表现期望的确定

各水平表现期望描述的是学生达到各水平时可测量的具体表现，是判断学生处于何种水平的标准，细致描述了学生在学习过程中认知的发展，即学生应当掌握什么知识，把握什么技能，等等。本研究结合SOLO分类理论，通过分析椭圆相关文献以及教材的内容确定了椭圆学习四个进阶维度对应各成就水平的表现期望，分别见表1、表2、表3、表4。

表1 椭圆学习进阶——进阶维度1

维度1：结合生活情境，类比圆的概念及定义，认知椭圆的定义	
成就水平	表现期望
前结构水平 (水平0)	掌握了圆的定义以及有关概念；对于椭圆的定义及有关概念记忆混乱或不理解
单一结构水平 (水平1)	粗略了解椭圆的定义，知道椭圆的形状；不能全部记忆椭圆中涵盖的要素（例如 $2a > 2c$ ）
多元结构水平 (水平2)	能够记忆椭圆的定义，能够记忆椭圆包含的要素，理解椭圆上的点的要求，但是仍停留在记忆层面；不理解且无法应用椭圆定义的内涵
关联结构水平 (水平3)	能够理解椭圆的定义并在简单问题中加以运用
抽象结构水平 (水平4)	能在日常生活中根据定义抽象出椭圆并解决实际问题

表2 椭圆学习进阶——进阶维度2

维度2：根据椭圆的定义，通过建立合适的直角坐标系研究椭圆的标准方程表达式	
成就水平	表现期望
前结构水平 (水平0)	掌握了椭圆的定义，知道字母 c 的实际意义；对于椭圆标准方程的表示仍不理解或未掌握（例如将椭圆的标准方程与圆的标准方程混淆）
单一结构水平 (水平1)	能够记忆椭圆标准方程的正确形式，但是往往忽略其中某一种形式（例如只记忆了 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 或 $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ 其中的一种）
多元结构水平 (水平2)	能够正确识记椭圆的两种标准方程形式，但是不知道 a 、 b 、 c 三个字母的代数关系；未掌握椭圆的标准方程推导过程且无法根据条件求解标准方程，也无法根据椭圆的标准方程来解决问题

续表

维度2：根据椭圆的定义，通过建立合适的直角坐标系研究椭圆的标准方程表达式	
成就水平	表现期望
关联结构水平 (水平3)	能够准确且独立推导椭圆的标准方程，知道 a 、 b 、 c 之间的代数关系，能够利用已知信息求解椭圆的标准方程，也能利用标准方程解决简单问题
抽象结构水平 (水平4)	能够内化椭圆标准方程的求解过程并抽象出来用以解决问题

表3 椭圆学习进阶——进阶维度3

维度3：类比研究圆的标准方程得出几何性质的方法，结合椭圆的标准方程研究椭圆的几何性质	
成就水平	表现期望
前结构水平 (水平0)	掌握椭圆标准方程的有关概念，但是不了解或未掌握椭圆的几何性质
单一结构水平 (水平1)	掌握 a 、 b 、 c 三个字母的实际意义（例如 $2a$ 既是长轴长，也可以表示为椭圆上任意一点到两焦点的距离之和， $2b$ 是短轴长，等等）；能够记忆椭圆的部分几何性质（例如范围、对称性、离心率 e 等），但是对于几何性质的实际意义并不了解（例如离心率 e 是表示椭圆扁平程度的量）
多元结构水平 (水平2)	能够记忆椭圆的所有几何性质（例如会计算离心率 e ，可以根据图象得出椭圆的范围，等等），并且能够理解性质的实际意义；不能将这些几何性质结合起来加以运用
关联结构水平 (水平3)	能够将椭圆的几何性质结合起来解决问题
抽象结构水平 (水平4)	能够在现实生活中利用椭圆的性质解决问题（例如圆锥曲线的光学性质等）

表4 椭圆学习进阶——进阶维度4

维度4：明晰椭圆与直线的联系（求解直线与椭圆联系的问题）	
成就水平	表现期望
前结构水平 (水平0)	掌握了椭圆的定义、标准方程、几何性质，但是无法在实际问题中灵活运用这类信息
单一结构水平 (水平1)	能够在实际问题中提取椭圆的定义、标准方程、几何性质并灵活运用，掌握椭圆与直线的位置关系（例如相离、相切、相交）；但是无法处理难度较高的椭圆与直线的问题（例如求解直线被椭圆所截的线段长度）
多元结构水平 (水平2)	知道计算直线与椭圆联立类型的问题的思路，但是不能联系所有信息得出正确的结果；无法灵活运用所学的椭圆的定义、标准方程、几何性质来优化解决问题的过程
关联结构水平 (水平3)	能够求解出直线与椭圆联立类型的题目，能够灵活熟练运用所学习的圆锥曲线的所有知识
抽象结构水平 (水平4)	在实际生活中抽象出椭圆解决实际问题

从上述的四个维度二十个水平可以看出,学生的椭圆的学习过程是循序渐进的,从椭圆的定义出发逐步深入到椭圆的应用,学生在这个过程中经历了不同的思维层级,是一个逐步提高、不断进阶的过程。因此教师在教学过程中要充分考虑学生的认知发展规律和知识间的脉络关系,针对不同思维水平的学生,设计合理的教学方式和教学方案,以促进数学学科核心素养的不断提升与发展。

本研究将学习进阶理论应用于中学数学椭圆的教学中,结合课程标准的要求、教材内容的安排,以及椭圆内容的相关研究,构建了椭圆学习进阶模型,明确了每一个阶段的学习任务,揭示了学生在学习过程中思维和认知发展的规律及所经历的过程。能够使教师发现学生该阶段学习中可能存在的错误认知,并为学生能够更加深刻地理解各阶段的知识点提供帮助。通过构建椭圆的学习进阶模型,也进一步为教师在椭圆内

容的教学中提供新的教学思路与方式。■

【参考文献】

- [1] 吴颖康,邓少博,杨洁.数学教育中学习进阶的研究进展及启示[J].数学教育学报,2017,26(6):40-46.
- [2] 刘晟,刘恩山.学习进阶:关注学生认知发展和生活经验[J].教育学报,2012,8(2):82.
- [3] 同[2]81.
- [4] 姚建欣,郭玉英.为学生认知发展建模:学习进阶十年研究回顾及展望[J].教育学报,2014,10(5):35-42.
- [5] 韦斯林,贾远娥.学习进阶:促进课程、教学与评价的一致性[J].全球教育展望,2010,39(9):24-31.
- [6] 罗晓燕,李佳,袁萍,等.SOLO分类理论与学习进阶比较研究[J].课程教学研究,2021(1):12-17.

(上接第59页) 文字学习形象化、生活化,使“语言文字积累与梳理”课堂变得生动且有趣,促进学生全身心投入,形成具身认知,同时“唤醒儿童自主学习积累的主体意识,赋予语言文字积累以现实的意义”^[5]。

(二) 以方法发展能力

具身认知视域下的“语言文字积累与梳理”教学要求教师提供有效的学习方法,引导学生探究汉字的演变规律和构造方法。在《中国美食》具身性语言文字教学中,通过字源演变、整理归类、比较分析的方法,教师指导学生初步学会探究汉字构字规律,发展学生的自主识字能力与思维分析能力。同时,从语言文字积累与梳理过渡到口语表达与写话能力培养。在学生完成识字任务的基础上,教师以范例和提示卡的形式设计“说一说”“写一写”多种任务,引导学生将所学的一个个汉字串联成一句话或一段话,最终培养学生语言运用能力。

(三) 以文化培养情感

具身认知视域下的“语言文字积累与梳理”教学是培养学生文化情感和文化自信的过程。《中国美食》一课渗透中华汉字文化和中华美食文化,以具身性语言文字教学培养学生对汉字文化、美食文化的积极情

感。在具身性语言文字学习过程中,学生通过对汉字内涵及造字规律的学习,体会到汉字始终集音形义于一身,从而丰富自身审美情感。同时,学生在食材准备、美食制作和美食呈现过程中学习语言文字,体会中国人民的生存智慧和对生活的积极情感,感悟中华文化,“成为汉字的发现者、守护者和中华优秀传统文化的传承者”^[6]。■

【参考文献】

- [1] 郑皓元,叶浩生,苏得权.有关具身认知的三种理论模型[J].心理学探新,2017,37(3):198.
- [2] 杨子舟,史雪琳,荀关玉.从无身走向有身:具身学习探析[J].教育理论与实践,2017,37(5):5.
- [3] 殷明,刘电芝.身心融合学习:具身认知及其教育意蕴[J].课程·教材·教法,2015,35(7):62-63.
- [4] 王崧舟,陆虹.厚积而薄发 知类而通达:新课标“语言文字积累与梳理”解读[J].语文教学通讯,2022(21):22.
- [5] 谭畅.在生活运用中积累,在积累基础上梳理:“语言文字积累与梳理”学习任务群设计与实施例谈[J].语文建设,2022(12):9.
- [6] 史春妍.“语言文字积累与梳理”学习任务群内涵解读及教学实操[J].小学教学设计,2022(31):10.