

“椭圆的标准方程（复习课）”的教学与反思

邵日昶（江苏省兴化中学）

摘要：在“椭圆的标准方程”一轮复习课中，尝试采用“自主学习”的模式，以问题链形式展开教学。教学后反思发现，教学目标学习化、提炼内容精准化、变式教学一题化是自主学习努力的方向。

关键词：椭圆的标准方程；一轮复习；自主学习；教学反思

“椭圆的标准方程”是解析几何中一个重要的知识点，在江苏省高考《考试说明》中为理解要求，是高考必考的内容，也是直线与椭圆型题目的基础。在教学设计上，将教学目标设计为理解椭圆的定义和掌握椭圆的标准方程。

复习重点：求椭圆的标准方程。

复习难点：椭圆标准方程的运用。

高三学生已经有了一定的数学基础，并且有了一定的解题能力。但是因为这是学生在高二所学的知识，对于大多数学生来说，本节课的知识点已经有些遗忘。由于刚刚复习完“直线与圆”，所以在教学思路上可以类比“直线与圆”展开。

本着这样的思路，教师分别围绕椭圆的定义及椭圆的标准方程设计了四个自主学习题，并以提问形式展开，目的是让学生回忆起必要的知识点及注意点。两个例题，每个例题做到至少有两个方法解决，而且对每个例题都要做变式处理。例1仍然围绕椭圆的标准方程，例2则是在注重数形结合的应用上展开，目的不只是加深知识的理解，更主要的是让学生学会转化。课后布置了一定量的练习加以巩固。

教学实施上，尝试了自主学习模式，围绕教学目

标，通过问题和问题变式链，由浅入深，让学生在解决问题中发现新问题，然后再去解决新的问题。

通过本节课教学，笔者真正体会到了自主学习教学模式的优点。在整个教学活动中，体现了以学生为主体的思想，教师在整个过程中，只起到点拨与提炼的作用，是实现少讲及精讲的一条有效途径。

本节课教学也发现了一些问题。首先，设计的问题与学生思考方向偶有脱节现象。出现这一现象的根源在于教学目标的设计，还停留在对教材笼统地了解、理解和掌握上，还将侧重点放在教师的教而非学生的学，还没有从根本上去实现以学生为主体的学习目标。因此，变教学目标为具体的学习目标，即目标学习化是需要进行改进的地方。对于本节复习课，大多数参考书中的教学目标是照搬《考试说明》中的理解椭圆的定义与标准方程，个别参考书中，加入了过程与方法讲练结合法或变式推进法等，而情感、态度与价值观多叙述为体会问题的转化思路与方法。这些设置本身比较笼统，属于粗线条的，而真正有效的教学要求是细线条的。如果将其改进为学习目标（记住椭圆的定义与标准方程，会根据已知条件求椭圆的标准方程，会根据方程求一些量的值）、学习方法（通过问题间的类比，解剖问题转化的方向与脉络）、情感态度与价值观（体会椭圆定义、方程问题切入角度与知识的联系），笔者认为会更加实用。

其次，提炼问题要精准化，教师设计什么问题？在什么关节点变式？问题和变式如何链接？用问题和变式想要说明什么问题？要达到什么目的？提炼出什么结论？这一系列问题正是教师在自主学习教学模式中

收稿日期：2015—05—15

作者简介：邵日昶（1972—），男，中学一级教师，主要从事高中数学教学研究。

需要考虑的,也是教师要有所作为的地方.例如,想说明椭圆的定义与应用,就围绕其注意点来展开变式.

再次,变式教学是自主学习的一种很重要的方式,但这种方式的高境界是一题式教学,在变式教学一题化这方面,还有很长的路要走.例如,对于本节课的教学,可以尝试改进为由一个母题变式展开设置,这样做,减少了学生课堂上的阅读量,将重心由阅读和计算向如何转化进行了转移.

改进后的一题式教学流程设置简案.

母题:设 $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$ 是平面上两定点,若动点 P 满足 $|PF_1| + |PF_2| = 10$, 则点 P 的轨迹方程是_____.

(1) 定义条件变式.

变式 1: 设 $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$ 是平面上两定点,若动点 P 满足 $|PF_1| + |PF_2| = 6$, 则点 P 的轨迹是_____.

变式 2: 设 $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$ 是平面上两定点,若动点 P 满足 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$, 则点 P 的轨迹是_____.

(2) 定义应用变式.

变式 3: 若 F_1, F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的两个焦点,过点 F_1 作直线与椭圆交于 A, B 两点,则 $\triangle ABF_2$ 的周长为_____.

变式 4: 设 F_1, F_2 分别是 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 椭圆的左、右焦点,点 P 为椭圆上一点, M 是 F_1P 的中点, $|OM| = 3$, 则点 P 到椭圆左焦点的距离是_____.

(3) 方程应用变式.

变式 5: 已知椭圆的焦点为 $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$, 且经过点 $M(3, -\frac{16}{5})$, 则椭圆的标准方程是_____.

变式 6: 椭圆 $16x^2 + 25y^2 = k$ 的一个焦点是 $(3, 0)$, 则 k 的值为_____.

变式 7: 已知点 P 在以坐标轴为对称轴的椭圆上,点 P 到两焦点的距离分别为 $\frac{16}{5}$ 和 $\frac{34}{5}$, 过点 P 作长轴的垂线恰好过椭圆的一个焦点,求椭圆的标准方程.

变式 8: 求经过 $A(5, 0)$, $B(4, \frac{12}{5})$ 两点的椭圆的标准方程.

附录 1

“椭圆的标准方程”复习课教学简案.

一、自主学习,知识回顾

(1) 设 $A(-3, 0)$, $B(3, 0)$ 是平面上两定点,若动点 P 满足 $|PA| + |PB| = 10$, 则点 P 的轨迹方程是_____.

(2) 已知椭圆的焦点为 $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$, 且经过点 $M(3, -2\sqrt{6})$, 则椭圆的标准方程是_____.

(3) 椭圆 $x^2 + ky^2 = 1$ 的一个焦点是 $(0, 2)$, 则 k 的值为_____.

(4) 若点 F_1, F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的两个焦点,过点 F_1 作直线与椭圆交于 A, B 两点,则 $\triangle ABF_2$ 的周长为_____.

二、交流点拨,能力提升

例 1 已知点 P 在以坐标轴为对称轴的椭圆上,点 P 到两焦点的距离分别为 $\frac{4}{3}$ 和 $\frac{14}{3}$, 过点 P 作长轴的垂线恰好过椭圆的一个焦点,求椭圆的标准方程.

例 2 设点 F_1, F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的左、右焦点,点 P 为椭圆上一点, M 是 F_1P 的中点, $|OM| = 3$, 则点 P 到椭圆左焦点的距离是_____.

三、当堂反馈,知识巩固

根据课堂教学选择教材练习题.

附录 2

“椭圆的标准方程”复习课课堂实录.

一、自主学习,知识回顾

师:同学们好!今天我们来复习椭圆的标准方程,请同学们完成自主学习第 1 题.

生₁: 因为 $|PA| + |PB| = 10$ 是常数,根据椭圆的定义,点的轨迹是椭圆. 又因为 $2a = 10$, 即 $a = 5$, $c = 3$, 所以,点 P 的轨迹方程是 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

师:生₁在课前已经对椭圆的定义做了认真复习,回答得很好.接下来,我们一起来看变式 1.

变式 1: 设 $A(-3, 0)$, $B(3, 0)$ 是平面上两定点,

若动点 P 满足 $|PA| + |PB| = 6$, 则点 P 的轨迹是_____.

生₂: 线段 AB .

师: 很好! 那么, 变式 2 中, 点 P 的轨迹是什么呢?

变式 2: 设 $A(-3, 0)$, $B(3, 0)$ 是平面上两定点, 若动点 P 满足 $|PA| + |PB| = 2a (a > 0)$, 则点 P 的轨迹是_____.

生₃: 椭圆和线段.

师: 同学们先取一个特殊的 a 值. 例如, $a = 2$, 点 P 的轨迹是什么?

生₄: 没有满足条件的点 P .

师: 对了. 那么, 请大家来归纳一下, 在变式 2 中, 点 P 的轨迹是什么?

学生归纳, 教师用 ppt 导出椭圆的定义, 并强调两点: (1) $|PF_1| + |PF_2|$ 是常数; (2) 常数大于 F_1F_2 .

师: 我们一起来完成自主学习第 2 题.

生₅: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$.

师: 现在大家分析一下解题过程.

生₆: 我们可以求出 $PF_1 = 7$, $PF_2 = 5$, 即 $2a = 12$. 所以 $a = 6$. 又因为 $c^2 = 4$, 所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 32$. 再根据椭圆的焦点位置在 x 轴上, 所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$.

师: 很好. 还有什么疑问吗?

生₇: 我不是这么解的.

师: 好, 那么说一下你的解题过程.

生₇: 因为椭圆的焦点位置在 x 轴上, 所以椭圆的标准方程设为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. 代入点 $M(3, -2\sqrt{6})$, 得 $\frac{9}{a^2} + \frac{24}{b^2} = 1$. 又因为 $a^2 - b^2 = 4$, 解得 $a^2 = 36$, $b^2 = 32$. 所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$.

师: 如果椭圆的焦点位置在 y 轴上, 椭圆的标准方程还能不能设为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$?

学生有所感悟.

师: 我们如何设椭圆的标准方程?

生₈: 椭圆的焦点位置在 x 轴上, 椭圆的标准方程设为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$.

教师用 ppt 导出椭圆的标准方程, 并强调 $a > b > 0$.

二、交流点拨, 能力提升

在前面自主学习的基础上, 学生已经会求椭圆的标准方程, 设计例 1 的目的是总结求椭圆的标准方程的方法.

师: 看例 1.

在学生思考、解题的过程中, 教师在学生间巡视, 然后请两名运用典型解法解题的学生分别分析其解题思路并展示他们的解题过程.

师: 大家来总结一下求椭圆的标准方程的方法.

生₉: (1) 定义法; (2) 待定系数法.

师: 我们已经会用定义法和待定系数法来求椭圆的标准方程. 同学们一起完成变式 3.

变式 3: 求经过 $A(2, 0)$, $B(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ 两点的椭圆的标准方程.

学生板演: 根据焦点所在的坐标轴不同, 分两种情况讨论.

(1) 椭圆的焦点在 x 轴上, 椭圆的标准方程设为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0),$$

代入点的坐标, 解得 $a = 2$, $b = 1$,

所以, 椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 椭圆的焦点在 y 轴上, 椭圆的标准方程设为

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0),$$

代入点的坐标, 解得 $a = 1$, $b = 2$ (舍).

师在巡视学生解题时, 发现有学生代入点的坐标后, 只解出 $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{b^2} = 1$, 然后就直接写出椭圆的标准方程 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

教师展示该学生的解题过程.

师: 在用待定系数法设椭圆的方程时, 我们有没有更好的设椭圆方程的方法?

学生讨论交流.

生₁₀: 椭圆的方程可设为 $mx^2 + ny^2 = 1 (m > 0, n > 0)$.

通过例 1 和变式 3 的训练, 学生交流收获.

生₁₁: (1) 椭圆的焦点位置不确定时, 要分类讨论;

(下转第 53 页)

因此,在日常教学中要增加学生对现实世界空间关系的体验,构造学生学习新知的背景,强调让学生以建构的方式接受新知,注重对学生在实践中解决问题能力的培养.

解决问题的本质就是把不熟悉的问题转化为熟悉的问题.在第(2)小题中,学生若能熟练地掌握已知图形的公式,就可以通过模式识别,把问题转化为等积变换,或先求出长方体的体积,再利用比例关系求得三棱锥的体积.这里的等积变换,就是把一个一般图形的体积转变为一个标准的特殊图形来解决其体积问题.或是通过求长方体体积,根据比例来求三棱锥的体积.如此大大地节约了思维,节省了解题时间,同时为后面的问题解决创造了有利的条件.

总之,从贵州省高考阅卷情况来看,学生对空间几何内容知识的学习还有较大程度的上升空间.作为教育工作者,课堂教学既要提高学生的思维能力、创新意识和实践能力,培育学生的理性精神,提升学生对真与美的感知力,又要关注学生的知识基础经验.因为学生数学能力的提高施力点是学生的数学现实,所以教师在教辅资料的选择和例、习题的讲解方面要更具针对性,进而寻求在学生的基础和能力间实现全面的提升.

(上接第48页)

(2)用待定系数法设椭圆方程时,可设为 $mx^2 + ny^2 = 1$ ($m > 0, n > 0$).

生₁₂:根据椭圆的定义, $\triangle ABF_2$ 的周长是 $4a$, 所以 $\triangle ABF_2$ 的周长是 8.

师:很好,生₁₂运用了椭圆的定义,巧妙地解决了此题.请看例2.

学生板演:通过作图,发现 OM 是 $\triangle F_1PF_2$ 的中位线,结合椭圆的定义,此题得到顺利解答.

师:下面请大家独立完成变式4.

变式4:已知点 F 是椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的焦点,线段 AB 的中点为 $C(0, 4)$, 点 A 关于点 F 的对称点为点 P , 则点 P 到点 B 的距离是_____.

师:例2和变式4都巧妙运用了椭圆的定义和标准方程.同学们交流一下,看看这些题有没有一些共同的特征?

生₁₃:这些问题都与椭圆的焦点有关.

参考文献:

- [1] 罗增儒. 数学新课程考什么、怎么考[J]. 中国数学教育 (高中版), 2012(1/2): 70-73.
- [2] Van Hiele P.M. Structure and insight [M]. Orlando, FL: Academic Press, 1986.
- [3] 常磊, 薛红霞. 规则课应注重规则的探索发现过程:以“平面与平面平行的判定”教学为例[J]. 中国数学教育 (高中版), 2014(11): 2-4.
- [4] 章建跃. 发挥数学的内在力量为学生谋取长期利益[J]. 中国数学教育 (高中版), 2013(1/2): 3-6.
- [6] 周远方, 田祥高, 朱再娥. 2012年高考“立体几何”专题分析[J]. 中国数学教育 (高中版), 2012(7/8): 64-70.
- [7] 徐俊国, 孙邈, 张强. 2013年高考“立体几何”专题分析[J]. 中国数学教育 (高中版), 2013(10): 28-35.
- [8] 史嘉. 从高考阅卷看立体几何的解答和复习教学[J]. 中国数学教育 (高中版), 2011(10): 24-26.

师:很好,椭圆中与焦点有关的问题,可以从椭圆的定义和标准方程的角度去解决,有时会有意想不到的效果.

师:通过自主学习和例题分析,我们已经复习了求椭圆的标准方程的方法,并且会用椭圆的标准方程来解决问题.趁热打铁,我们一起来完成下面4个小题.

三、当堂反馈,知识巩固

略.

四、课堂小结

师:我们这节课,复习了哪些内容?

生₁₄: (1) 椭圆的定义和标准方程; (2) 椭圆的标准方程的求法; (3) 圆的定义和标准方程的运用.

五、课后作业

略.

参考文献:

- [1] 徐春波. 浅析一题式课堂教学[J]. 福建中学数学, 2013(10): 33-37.