

不同的视角 同样的精彩

——以 2023 年全国新高考 I 卷第 18 题为例

■ 河北省南宫中学

秘晓达 霍忠林

对立体几何中空间角计算的考查是高考中的热点内容。本文通过四种视角六种解法对 2023 年全国新高考 I 卷第 18 题第二问进行多视角剖析,以期对同学们有所启示。

题目:(2023 年全国新高考 I 卷第 18 题)如图 1,在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$

中, $|AB|=2$, $|AA_1|=4$, 点 A_2, B_2, C_2, D_2 分别在棱 AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 上, $|AA_2|=1, |BB_2|=|DD_2|=2, |CC_2|=3$ 。

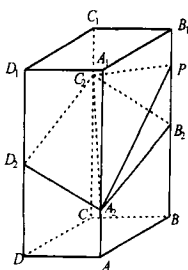


图 1

(1) 证明: $B_2C_2 \parallel A_2D_2$; (2) 点 P 在棱 BB_1 上, 当二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 150° 时, 求 $|B_2P|$ 的值。

视角一、空间向量坐标法

该视角就是通过建立空间直角坐标系, 写出点的坐标, 进而求出所需向量, 这种处理手段基本上不用作辅助线就能使问题得到解决, 且解答过程具有可操作、可模仿、机械化的特点, 因此受到大家的喜爱。

解法 1: 由题意知 CD, CB, CC_1 两两垂直, 如图 2 建立空间直角坐标系 $C-xyz$ 。

则 $A_2(2, 2, 1), C_2(0, 0, 3), D_2(2, 0, 2)$ 。

设 $P(0, 2, t)$ (其中 $0 \leq t \leq 4$), 从而 $\overrightarrow{A_2C_2} = (-2, -2, 2), \overrightarrow{PA_2} = (2, 0, 1-t), \overrightarrow{A_2D_2} = (0, -2, 1)$ 。

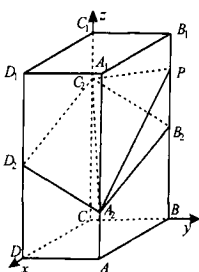


图 2

设平面 PA_2C_2 的法向量 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{A_2C_2} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{PA_2} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} -2x_1 - 2y_1 + 2z_1 = 0, \\ 2x_1 + (1-t)z_1 = 0. \end{cases}$$

取 $z_1 = 2$, 可得 $\mathbf{m} = (t-1, 3-t, 2)$ 。

设平面 $D_2A_2C_2$ 的法向量 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_2C_2} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_2D_2} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -2x_2 - 2y_2 + 2z_2 = 0, \\ -2y_2 + z_2 = 0. \end{cases}$$

取 $z_2 = 2$, 可得 $\mathbf{n} = (1, 1, 2)$ 。

$$\text{所以 } |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} =$$

$$\frac{|(t-1) \cdot 1 + (3-t) \cdot 1 + 2 \cdot 2|}{\sqrt{(t-1)^2 + (3-t)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = |\cos 150^\circ|, \text{ 解得 } t=1 \text{ 或 } t=3, \text{ 故 } |B_2P|=1.$$

评注: 本解法将二面角问题转化为两个法向量夹角问题来处理, 这是利用空间向量坐标法处理二面角问题的最常用方法。

解法 2: 由解法 1 可得

$P(0, 2, t)$ (其中 $0 \leq t \leq 4$), $\overrightarrow{A_2C_2} = (-2, -2, 2)$ 。连接 B_2D_2 , 设 B_2D_2 交 A_2C_2

于 O 点, 则 $\overrightarrow{OD_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD_2} = (1, -1, 0)$, 且 $\overrightarrow{A_2C_2} \cdot \overrightarrow{OD_2} = 0$, 故 $D_2O \perp A_2C_2$ 。如图

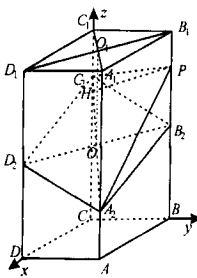


图 3

3, 作 $PH \perp A_2C_2$, 垂足为 H , 从而 $\overrightarrow{OD_2}$ 与 $\overrightarrow{HP}$ 所成的角就等于二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 的大小。

$$\text{因此, } \cos \langle \overrightarrow{OD_2}, \overrightarrow{HP} \rangle = \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

令 $\overrightarrow{A_2H} = \lambda \overrightarrow{A_2C_2} = (-2\lambda, -2\lambda, 2\lambda)$ (其中 $0 \leq \lambda \leq 1$), 则 $H(2-2\lambda, 2-2\lambda, 1+2\lambda)$ 。

故 $\overrightarrow{HP} = (2\lambda-2, 2\lambda, t-1-2\lambda)$ 。

由 $\overrightarrow{HP} \cdot \overrightarrow{A_2C_2} = 0$, 得 $-2(2\lambda-2) - 2 \times 2\lambda + 2(t-1-2\lambda) = 0$, 故 $t = 6\lambda - 1$ 。

所以 $\overrightarrow{HP} = (2\lambda-2, 2\lambda, 4\lambda-2)$ 。

$$\text{故 } -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \langle \overrightarrow{OD_2}, \overrightarrow{HP} \rangle =$$

$$\frac{\overrightarrow{OD_2} \cdot \overrightarrow{HP}}{|\overrightarrow{OD_2}| \cdot |\overrightarrow{HP}|} = \frac{1 \cdot (2\lambda-2) + (-1) \cdot 2\lambda + 0 \cdot (4\lambda-2)}{\sqrt{(2\lambda-2)^2 + (2\lambda)^2 + (4\lambda-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}}.$$

解得 $\lambda = \frac{1}{3}$ 或 $\lambda = \frac{2}{3}$, 即 $t = 1$ 或 $t = 3$, 故

$$|B_2P|=1.$$

评注:本解法将二面角问题转化为两个向量夹角问题来处理,这种处理手段避开了求两个平面的法向量。

视角二、空间向量基底法

由空间向量基本定理可知:空间中的任意一个向量都可以通过空间向量的一组基底来表示,一般选取模和夹角均已知的不共面的三个向量作为基底。

解法3:注意到 $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_2}$ 两两垂直且 $|\overrightarrow{DA}|=|\overrightarrow{DC}|=|\overrightarrow{DD_2}|=2$, 因此, 可以将 $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_2}$ 作为空间向量的一组基底。设 $\overrightarrow{A_2H}=\lambda\overrightarrow{A_2C_2}$ (其中 $0\leq\lambda\leq 1$), 而 $\overrightarrow{A_2C_2}=\overrightarrow{A_2A}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_2}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DD_2}+(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA})+\frac{3}{2}\overrightarrow{DD_2}=-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DD_2}$, 故 $\overrightarrow{A_2H}=\lambda(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DD_2})$ 。

设 $\overrightarrow{BP}=\mu\overrightarrow{BB_1}$ (其中 $0\leq\mu\leq 1$), 即 $\overrightarrow{BP}=2\mu\overrightarrow{DD_2}$ 。所以 $\overrightarrow{HP}=\overrightarrow{A_2P}-\overrightarrow{A_2H}=(\overrightarrow{A_2A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP})-\lambda(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DD_2})=(-\frac{1}{2}\overrightarrow{DD_2}+\overrightarrow{DC}+2\mu\overrightarrow{DD_2})-\lambda(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DD_2})=\lambda\overrightarrow{DA}+(1-\lambda)\overrightarrow{DC}+(2\mu-\frac{1}{2}-\lambda)\overrightarrow{DD_2}$ 。

由 $\overrightarrow{HP}\cdot\overrightarrow{A_2C_2}=0$, 化简得 $-4\lambda+4(1-\lambda)+4(2\mu-\frac{1}{2}-\lambda)=0$, 即 $\mu=\frac{3}{2}\lambda-\frac{1}{4}$ 。

所以 $\overrightarrow{HP}=\lambda\overrightarrow{DA}+(1-\lambda)\overrightarrow{DC}+(2\mu-\frac{1}{2}-\lambda)\overrightarrow{DD_2}=\lambda\overrightarrow{DA}+(1-\lambda)\overrightarrow{DC}+(2\lambda-1)\overrightarrow{DD_2}$ 。

而 $\overrightarrow{OD_2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC})$, 且 $|\overrightarrow{OD_2}|=\sqrt{2}$ 。

因此, $|\overrightarrow{HP}|=\sqrt{[\lambda\overrightarrow{DA}+(1-\lambda)\overrightarrow{DC}+(2\lambda-1)\overrightarrow{DD_2}]^2}=\sqrt{4\lambda^2+4(1-\lambda)^2+4(2\lambda-1)^2}=2\sqrt{6\lambda^2-6\lambda+2}$ 。
 $\overrightarrow{OD_2}\cdot\overrightarrow{HP}=-2\lambda-2(1-\lambda)=-2$ 。

故 $-\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\langle\overrightarrow{OD_2}, \overrightarrow{HP}\rangle=$

$$\frac{\overrightarrow{OD_2}\cdot\overrightarrow{HP}}{|\overrightarrow{OD_2}|\cdot|\overrightarrow{HP}|}=\frac{-2}{\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{6\lambda^2-6\lambda+2}}, \text{解得}$$

$$\lambda=\frac{1}{3} \text{ 或 } \lambda=\frac{2}{3}, \text{ 即 } t=1 \text{ 或 } t=3, \text{ 则 } |B_2P|=1.$$

评注:本解法不是通过坐标运算,而是通过基底向量 $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_2}$ 来表示 $\overrightarrow{HP}$ 和 $\overrightarrow{OD_2}$, 这种处理手段是处理不容易建系试题的一把利器。

视角三、传统法

该视角就是通过识别几何图形中的点、线、面的位置关系,通过添加辅助线来找出空间角,进而求得所求的结果,因此对同学们的逻辑推理能力要求较高。

解法4:如图4,不妨设点 P 在 B_2 上方,连接 A_1C_1, B_1D_1 , 设 A_1C_1, B_1D_1 交于 O_1 , 连接 O_1O , 易得 $B_1D_1\perp$ 面 AA_1C_1C 。而 $B_1D_1\parallel B_2D_2$, 所以 $B_2D_2\perp$ 面 AA_1C_1C , 故二面角 $O_1-A_2C_2-D_2$ 为 90° 。而二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 150° , 故二面角 $P-A_2C_2-O_1$ 为 60° 。过点 P 作 $PE\parallel B_1D_1$ 交 O_1O 于 E , 则 $|B_2P|=|OE|$, $PE\perp$ 面 AA_1C_1C 。由解法2知 $PH\perp A_2C_2$, 连接 EH , 则 $\angle PHE$ 即为二面角 $P-A_2C_2-O_1$ 的平面角, 所以 $\angle PHE=60^\circ$ 。

在 $\text{Rt}\triangle PEH$ 中, $\angle PHE=60^\circ, |PE|= \sqrt{2}$, 所以 $|EH|=\frac{|PE|}{\tan 60^\circ}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 。

在 $\text{Rt}\triangle EHO$ 中, $\sin\angle EOH=\frac{|EH|}{|OE|}=\frac{\sqrt{6}}{3|OE|}$ 。

在直角梯形 $O_1C_1C_2O$ 中, $|O_1C_1|=\sqrt{2}, |OC_2|=\sqrt{3}, \sin\angle O_1OC_2=\frac{|O_1C_1|}{|OC_2|}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 。

而 $\angle EOH=\angle O_1OC_2$, 所以 $\sin\angle EOH=\sin\angle O_1OC_2$, 即 $|OE|=1$, 故 $|B_2P|=1$ 。

根据对称性,当点 P 在 B_2 下方时,也有 $|B_2P|=1$ 。综上可知 $|B_2P|=1$ 。

评注:本解法采取分割二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 的策略,将二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 转化为二面角 $O_1-A_2C_2-D_2$ 和二面角 $P-A_2C_2-O_1$ 之

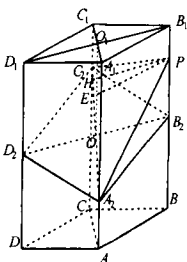


图4

和來處理。

解法 5: 如圖 5, 不妨設點 P 在 B_2 上方, 連接 $A_1C_1, A_1O, A_1B_2, A_2P$, 其中 A_1B_2 交 A_2P 於 Q , 連接 OQ 。

易得 $|A_1C_2| = \sqrt{|A_1C_1|^2 + |C_1C_2|^2} = 3 = |A_1A_2|$, 所以 $A_2C_2 \perp A_1O$ 。而四邊形 $A_2B_2C_2D_2$ 為菱形, 故 $A_2C_2 \perp B_2D_2$ 。

而 $B_2D_2 \cap A_1O = O$, 所以 $A_2C_2 \perp$ 面 $A_1B_2D_2$, 故 $A_2C_2 \perp OD_2, A_2C_2 \perp OQ$, 故 $\angle QOD_2$ 即為二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 的平面角, 即 $\angle QOD_2 = 150^\circ$, 故 $\angle QOB_2 = 30^\circ$ 。

而 $|A_1B_2| = |A_1D_2| = |B_2D_2| = 2\sqrt{2}$, 所以 $\triangle A_1B_2D_2$ 為等邊三角形, 故 $\angle QB_2O = 60^\circ, \angle OQB_2 = 90^\circ$ 。

在 $\text{Rt} \triangle OQB_2$ 中, $\angle QB_2O = 60^\circ, |OB_2| = \sqrt{2}$, 所以 $|QB_2| = |OB_2| \cos \angle QB_2O = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

而 $PB_2 \parallel A_1A_2$, 所以 $\frac{|PB_2|}{|A_1A_2|} = \frac{|QB_2|}{|A_1Q|}$, 即 $\frac{|PB_2|}{3} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, 故 $|B_2P| = 1$ 。

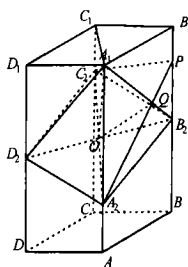


圖 5

根據對稱性, 當點 P 在 B_2 下方時, 也有 $|B_2P| = 1$ 。綜上可知 $|B_2P| = 1$ 。

評注: 本解法通過幾何關係找出 $A_2C_2 \perp$ 面 $A_1B_2D_2$, 從而直接得到 $\angle QOD_2$ 為二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 的平面角, 從而利用比例關係得出所求結果。

視角四、等體積轉化法

當其中一個半平面上的點(不是二面角棱上的點)到二面角的棱的距離已知時, 此時只需求出該點到另一半平面所在平面的距離, 就可以求出二面角(或其補角)的正弦值, 因此本視角不需要作出二面角的平面角, 只需求出點到另一個半平面的距離即可, 求點到面的距離常採用等體積轉化法來處理。

解法 6: 如圖 6, 不妨設點 P 在 B_2 上方, 且 $|PB_2| = x$ 。易得 $OB_2 \perp A_2C_2$, 設點 B_2 到

面 A_2C_2P 的距離為 h , 由

題意知二面角 $P-A_2C_2-B_2$ 為 30° , 則

$$\sin 30^\circ = \frac{h}{|OB_2|} = \frac{h}{\sqrt{2}}, \text{ 所}$$

以 $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。作 P 點關於

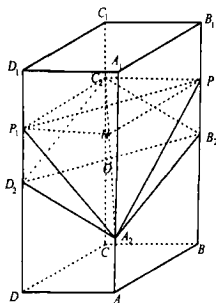


圖 6

面 ACC_1A_1 的對稱點 P_1 ,

由正四棱柱的性質易得

P_1 在棱 DD_1 上, 且 $|PB_2| = |P_1D_2|$, 二面角 $P-A_2C_2-B_2$ 與二面角 $P_1-A_2C_2-D_2$ 相等。作 $PH \perp A_2C_2$, 垂足為 H , 連接 P_1H , 則 $P_1H \perp A_2C_2$, 故 $\angle PHP_1$ 即為二面角 $P-A_2C_2-P_1$ 的平面角。而二面角 $P-A_2C_2-B_2$ 為 30° , 所以 $\angle PHP_1 = 120^\circ$ 。

在 $\triangle PHP_1$ 中, $|PP_1| = 2\sqrt{2}, |PH| = |P_2H|, \angle PHP_1 = 120^\circ$, 所以 $|PH| = \frac{2\sqrt{6}}{3}$,

$$\text{故 } S_{\triangle PA_2C_2} = \frac{1}{2} \times |PH| \times |A_2C_2| = 2\sqrt{2}。$$

$$V_{B_2-A_2C_2P} = V_{C_2-A_2B_2P}, \text{ 則 } \frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times x \right) \times 2, \text{ 解得 } x = 1, \text{ 故 } |B_2P| = 1。$$

根據對稱性, 當點 P 在 B_2 下方時, 也有 $|B_2P| = 1$ 。綜上可知 $|B_2P| = 1$ 。

評注: 由於 $OB_2 \perp A_2C_2$, 二面角 $P-A_2C_2-B_2$ 為 30° , 所以可以求出點 B_2 到面 A_2C_2P 的距離 h , 接着通過三棱錐的等體積轉化即可找到 h 與 x 的關係, 最後求出 x 的值。

綜上所述, 空間向量坐標法對同學們的數學運算素養較高, 對於容易建系的試題優先選用此方法; 但是對於一些不容易建系的試題, 空間向量基底法和傳統法更具有優勢, 其中空間向量基底法需要選擇合適的空間基底向量, 不需要找出空間角; 傳統法需要找出空間角, 但是一旦找出空間角就可以利用三角形幾何關係得出答案; 等體積轉化法也不需要找出空間角, 它是利用一個半平面的點到另一半平面的距離與該點到棱的距離之比求出二面角的正弦值, 這種轉化很巧妙。

(責任編輯 徐利杰)