

与二次函数有关的“恒成立”问题的求解策略

■张亮昌



解决不等式恒成立问题常见的方法有：判别式法，分离参数法，主参换位法等。下面举例分析这类问题的求解策略。

方法一：判别式法

例1 已知不等式 $(m^2 + 4m - 5)x^2 + 4(1 - m)x + 3 > 0$ 对任意实数 x 恒成立，则实数 m 的取值范围是_____。

解析 ①当 $m^2 + 4m - 5 = 0$ 时，可得 $m = -5$ 或 $m = 1$ 。

若 $m = -5$ ，则不等式化为 $24x + 3 > 0$ ，这时对任意实数 x 不可能恒大于 0。若 $m = 1$ ，则 $3 > 0$ 恒成立。

②当 $m^2 + 4m - 5 \neq 0$ 时，根据题意可得 $\begin{cases} m^2 + 4m - 5 > 0, \\ \Delta = 16(1 - m)^2 - 12(m^2 + 4m - 5) < 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m < -5 \text{ 或 } m > 1, \\ 1 < m < 19, \end{cases}$ 所以 $1 < m < 19$ 。

综上可知，所求实数 m 的取值范围是 $\{m | 1 \leq m < 19\}$ 。

评注：对于一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0 (a > 0)$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，则 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ；一元二次不等式 $ax^2 + bx + c < 0 (a < 0)$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，则 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 。

方法二：分离参数法

例2 不等式 $xy \leq ax^2 + 2y^2$ 对于 $1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 3$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是_____。

解析 不等式 $xy \leq ax^2 + 2y^2$ 对于 $1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 3$ 恒成立，等价于 $a \geq \frac{y}{x} - 2\left(\frac{y}{x}\right)^2$ 对于 $1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 3$ 恒成立。

令 $t = \frac{y}{x}$ ，则 $1 \leq t \leq 3$ ，所以 $a \geq t - 2t^2$ 在 $1 \leq t \leq 3$ 上恒成立。

令函数 $y = -2t^2 + t = -2\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}$ ，当 $t = 1$ 时， $y_{\max} = -1$ ，则 $a \geq -1$ 。

故实数 a 的取值范围是 $\{a | a \geq -1\}$ 。

评注：若 $a \geq f(x)$ 恒成立，则 $a \geq f(x)_{\max}$ ；若 $a \leq f(x)$ 恒成立，则 $a \leq f(x)_{\min}$ 。

方法三：主参换位法

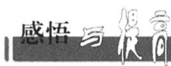
例3 已知函数 $y = ax^2 - 2ax + 8 + 3a$ ，若对于 $1 \leq a \leq 3, y < 0$ 恒成立，则实数 x 的取值范围为_____。

解析 已知函数可化为关于 a 的函数 $y = ax^2 - 2ax + 8 + 3a = (x^2 - 2x + 3)a + 8$ 。

由题意知， $y < 0$ 对于 $1 \leq a \leq 3$ 恒成立。

因为 $x^2 - 2x + 3 > 0$ 恒成立，且 y 是关于 a 的一次函数，在 $1 \leq a \leq 3$ 上随 x 的增大而增大，所以 $y < 0$ 对 $1 \leq a \leq 3$ 恒成立等价于 y 的最大值小于 0，即 $3(x^2 - 2x + 3) - 8 < 0$ ，也即 $3x^2 - 6x + 1 < 0$ ，解得 $\frac{3 - \sqrt{6}}{3} < x < \frac{3 + \sqrt{6}}{3}$ ，所以实数 x 的取值范围为 $\left\{x \mid \frac{3 - \sqrt{6}}{3} < x < \frac{3 + \sqrt{6}}{3}\right\}$ 。

评注：在一个函数式中，有两个自变量，其中给出一个自变量的范围，这时可把问题转化为关于已知范围的那个自变量的函数（本题是一次函数）。



在 $\mathbf{R}$ 上定义运算 $\otimes: A \otimes B = A(1 - B)$ ，若不等式 $(x - a) \otimes (x + a) < 4$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为_____。

提示： $(x - a) \otimes (x + a) = (x - a)[1 - (x + a)] = -x^2 + x + a^2 - a < 4$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立，即 $x^2 - x - a^2 + a + 4 > 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立，所以 $\Delta = 4 - 4(-a^2 + a + 1) = 4a^2 - 4a < 0$ ，所以 $0 < a < 1$ ，即实数 $a \in (0, 1)$ 。

作者单位：湖北省巴东县第三高级中学

（责任编辑 郭正华）