例析齐次化方法解不同题型圆锥曲线问题

段文（陕西省渭南市渭南中学　714000）

【摘　要】　学习圆锥曲线知识内容与掌握相关问题解题思路是学生在高中数学必经的一段“苦尽甘来”的阶段. 联立方程消元是解答圆锥曲线问题最常见的解题思路，此外，齐次化方法也同样能用来解答圆锥曲线问题. 齐次化方法通常运用在一些与圆锥曲线相关的直线斜率问题中，关键在于对等式的变形处理，运用齐次化后等式解答相关问题. 本文主要对齐次化方法解答不同类型圆锥曲线问题展开讨论，以具体例题进行分析，思考并总结得到齐次化方法解题的适用范围和对应解题步骤，以此促进学生对圆锥曲线的理解，提高解答相关问题的效率.

【关键词】　高中数学；圆锥曲线；齐次化

1　斜率和积问题

齐次化方法最常用于圆锥曲线的斜率和积问题，这类问题一般会给出圆锥曲线和直线的关系，要求学生对直线的斜率之和或斜率之积进行探讨和证明. 齐次化方法的运用，主要是通过联立直线和圆锥曲线方程，使其等式齐次化得到与斜率代表实数根的一元二次方程，从而解答问题. 解答这类问题时，齐次化方法的具体解题步骤表现为：① 假设未知直线解析式，根据斜率公式$\frac{y-y_0}{x-x_0}$和圆锥曲线方程，得到斜率之和或积的相关表达式；② 将斜率之和或斜率之积表达式齐次化，得到与$\frac{y}{x}$有关的方程；③ 将两直线斜率看作方程的两个实数解，凭借根与系数的关系解题即可.

例 1　已知椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上有点 $A(0,-1)$，若经过点$(1,1)$并且斜率为 k 的直线与椭圆 C 交于不同的点 P、Q(点 P、Q 不与 A 点重合). 证明：直线 AP 和 AQ 斜率之和为 2.

剖析　问题针对直线 AP，AQ 斜率之和进行考查，首先将坐标系向下平移，使两直线的公共点 A 成为原点，此时两直线斜率可分别表示为$\frac{y_P}{x_P}$，$\frac{y_Q}{x_Q}$，假设点 P，Q 的坐标，则直线 PQ 的解析式应假设成 $mx+ny=1$，其次联立直线 PQ 和椭圆 C，通过代入、同除以 x^2 手段齐次化等式，得到与$\frac{y}{x}$有关的一元二次方程，根据韦达定理可以表示直线 AP 和 AQ 斜率之和，结合直线 PQ 过平移坐标系后的定点$(1,2)$得到 m，n 之间的关系等式，即可得知斜率之和表达式对应的具体值.

解　将原坐标系向下平移 1 个单位长度，使 A 点为坐标原点，

设在新坐标系中，点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

椭圆 C 在新坐标系中的方程为$\frac{x^2}{2}+(y-1)^2=1$，即$\frac{x^2}{2}+y^2-2y=0$，

由题意可知直线 l 不经过原点 A，

故假设直线 PQ 解析式为 $mx+ny=1$，

与椭圆方程式联立得$\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2-2y=0,\\ mx+ny=1.\end{cases}$

可得$\frac{x^2}{2}+y^2-2y(mx+ny)=0$，①

因为，直线 AP，AQ 斜率存在，

所以 $x_1\neq 0$，$x_2\neq 0$，

① 式两边同除以 x^2，

可得$(1-2n)\left(\frac{y}{x}\right)^2-2m\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}=0$，②

则 $k_{AP}=\dfrac{y_1}{x_1}$，$k_{AQ}=\dfrac{y_2}{x_2}$ 是②式的两个实数根，

根据韦达定理可知 $k_{AP}+k_{AQ}=\dfrac{2m}{1-2n}$，

因为直线 PQ 恒过定点 $(1,1)$，

即直线 PQ 在平移后坐标系上经过点 $(1,2)$，

可知 $m+2n=1$，

所以 $k_{AP}+k_{AQ}=\dfrac{2m}{1-2n}=\dfrac{2m}{m}=2$.

2　定点问题

圆锥曲线的一类定点问题也能运用齐次化方法解答，这类问题常常需要利用所给条件解答圆锥曲线相交的直线恒过某一定点，齐次化方法的合理运用能简化运算和解题过程，具有一定的优势. 运用齐次化方法解答圆锥曲线的定点相关问题，应用的具体解题步骤为：①假设未知直线解析式，联立圆锥曲线方程消去其中变量得到一元二次方程；②同除以 x^2 或 y^2 得到与 $\dfrac{y}{x}$ 有关的方程，此时方程的解对应两直线的斜率；③根据韦达定理求出假设参数之间的关系，代入直线解析式中，联立求得定点坐标即可.

例 2　已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，$P(0,1)$，直线 l 不过点 P，与椭圆 C 相交于不同的 A，B 两点，若直线 PA，PB 的斜率之和为 -1，证明：直线 l 过定点.

剖析　问题求相交于椭圆的直线过具体定点坐标，直接根据点 P 坐标表达 k_{PA}，k_{PB} 求解过于复杂，可考虑齐次化表达式求解. 首先假设交点 A，B 的坐标和直线 AB 的解析式，联立直线和椭圆方程式，齐次化得到和 $\dfrac{y}{x}$ 有关的一元二次方程，结合已知条件可求得假设直线解析式中参数之间的关系，即可求出直线经过的具体定点坐标.

解　将原坐标系向上平移 1 个单位长度，可得到点 P 是坐标原点，

设在新坐标系中，点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

椭圆 C 在新坐标系中的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+(y+1)^2=1$，

即 $\dfrac{x^2}{4}+y^2+2y=0$，

由题意可知直线 l 不经过原点 P，故假设直线 AB 解析式为 $mx+ny=1$，

与椭圆方程联立得 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2+2y=0,\\ mx+ny=1,\end{cases}$

可得 $\dfrac{x^2}{4}+y^2+2y(mx+ny)=0$，①

因为直线 PA，PB 斜率存在，

所以 $x_1\neq 0$，$x_2\neq 0$，

①式两边同除以 x^2 可得

$(1+2n)\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+2m\left(\dfrac{y}{x}\right)+\dfrac{1}{4}=0$，②

则 $k_{AP}=\dfrac{y_1}{x_1}$，$k_{BP}=\dfrac{y_2}{x_2}$ 是②式的两个实数根，

根据韦达定理可知 $k_{AP}+k_{BP}=-\dfrac{2m}{1+2n}=-1$，

因为 $2m-2n=1$，直线 l 在新坐标系中过定点 $(2,-2)$，

所以直线 l 在原坐标系中过定点 $(2,-1)$.

3　结语

通过上述例题的分析，不难发现齐次化方法一般用来解答圆锥曲线中与直线斜率有关的和积问题或定点问题，都是通过代入、移项、变形手段使等式齐次化. 合理运用齐次化方法，能使圆锥曲线问题得到更直观的解答. 齐次化方法的运用善于将变量 x，y 转化为次数相同的等式，深刻对齐次化方法的理解，还需要学生把理论方法和实践解题结合在一起，只有通过自身的运用和思考，才能明白解题过程中的要点，从而提高解题正确率.

参考文献：

[1] 关丽娜，曹丽华. 也谈齐次化方法在圆锥曲线中的应用[J]. 中学数学研究，2017(1)：30－32.

[2] 项海圆，黄永明. 巧用齐次化方法解圆锥曲线问题[J]. 中学数学教学参考，2021(07)：40－42.