2023年高考之立体几何和空间向量考点解读

■河南省许昌市高中数学胡银伟名师工作室 胡银伟

立体几何涉及两大问题：一是空间基本图形的位置关系，主要包括线线、线面、面面的平行与垂直等；二是度量问题，主要包括点到线、点到面的距离，直线与直线、直线与平面、平面与平面所成的角等。

空间向量是用代数的方法处理立体几何问题的一种重要工具，用定量的计算代替定性的分析，从而避免了一些烦琐的推理论证。利用空间向量的工具性可以解决空间线面的位置关系，空间角、距离及探索性等问题。

下面我们结合2023年高考真题，对立体几何和空间向量的考点进行解读。

考点一 对空间几何体体积的考查

例1 (1)(2023年高考全国乙卷理数第8题)已知圆锥 PO 的底面半径为$\sqrt{3}$，O 为底面圆心，PA，PB 为圆锥的母线，$\angle AOB=120°$，若$\triangle PAB$ 的面积等于$\frac{9\sqrt{3}}{4}$，则该圆锥的体积为(　　)。

A. π　　B. $\sqrt{6}\pi$　　C. 3π　　D. $3\sqrt{6}\pi$

(2)(2023年高考全国甲卷文数第10题)在三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，$\triangle ABC$ 是边长为2的等边三角形，$|PA|=|PB|=2$，$|PC|=\sqrt{6}$，则该棱锥的体积为(　　)。

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 3

(3)(2023年新课标全国Ⅰ卷第14题)在正四棱台 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$|AB|=2$，$|A_1B_1|=1$，$AA_1=\sqrt{2}$，则该棱台的体积为____。

命题意图：本题考查圆锥、棱锥、棱台的体积，同时考查了逻辑推理、直观想象及数学运算等核心素养。

解题思路：(1)依题设条件，可利用三角形面积公式先求得圆锥的母线长，再求圆锥的高，根据圆锥的体积公式进行解答。(2)依题意可证得 $AB\perp$平面 PEC，故分割三棱锥为共底面的两个小三棱锥，其高之和为$|AB|$，得解。(3)结合图像，依次求得$|A_1O_1|$，$|AO|$，$|A_1M|$，再利用棱台的体积公式可得解。

解析：(1)在$\triangle AOB$中，$\angle AOB=120°$。而$|OA|=|OB|=\sqrt{3}$，取 AB 的中点 C，连接 OC，PC，则 $OC\perp AB$，$PC\perp AB$，如图1所示。

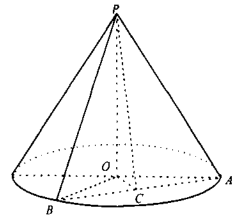


图1

$\angle ABO=30°$，$|OC|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$|AB|=2|BC|=3$。由$\triangle PAB$ 的面积为$\frac{9\sqrt{3}}{4}$，得$\frac{1}{2}\times3\times|PC|=\frac{9\sqrt{3}}{4}$，解得$|PC|=\frac{3\sqrt{3}}{2}$。

于是 $|PO|=\sqrt{|PC|^2-|OC|^2}=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{6}$。所以圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}\pi\times|OA|^2\times|PO|=\frac{1}{3}\pi\times(\sqrt{3})^2\times\sqrt{6}=\sqrt{6}\pi$。选B。

(2)取 AB 的中点 E，连接 PE，CE，如图2所示。

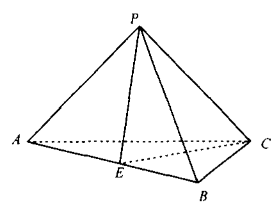


图2

因为$\triangle ABC$ 是边长为2的等边三角形，$|PA|=|PB|=2$，所以 $PE\perp AB$，$CE\perp AB$。

又 $PE,CE\subset$平面 PEC，$PE\cap CE=E$，所以 $AB\perp$平面 PEC。

又$|PE|=|CE|=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，$|PC|=\sqrt{6}$，故$|PC|^2=|PE|^2+|CE|^2$，即 $PE\perp CE$。

所以 $V=V_{B\text{-}PEC}+V_{A\text{-}PEC}=\frac{1}{3}S_{\triangle PEC}\cdot$

万方数据

$|AB|=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times2=1$。选 A。

(3)如图3,过 A_1 作 $A_1M\perp AC$,垂足为 M,易知 A_1M 为四棱台 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的高。

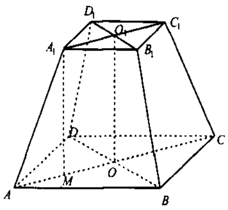


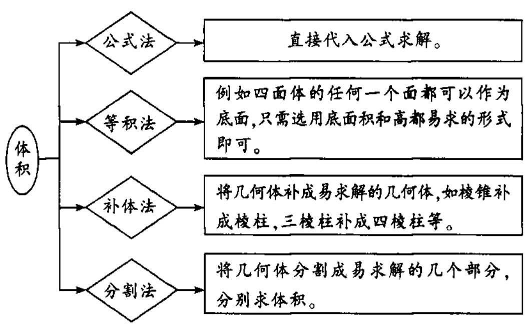
图3

因为 $|AB|=2$,$|A_1B_1|=1$,$|AA_1|=\sqrt{2}$,所以 $|A_1O_1|=\frac{\sqrt{2}}{2}|A_1B_1|=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$|AO|=\frac{\sqrt{2}}{2}|AB|=\sqrt{2}$。

故 $|AM|=|AO|-|A_1O_1|=\frac{\sqrt{2}}{2}$,则 $|A_1M|=\sqrt{|A_1A|^2-|AM|^2}=\sqrt{2-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$。

所求体积 $V=\frac{1}{3}\times(4+1+\sqrt{4\times1})\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{7\sqrt{6}}{6}$。

考点解读:空间几何体的结构特征是立体几何的基础,空间几何体的表面积和体积是高考的高频考点,多以选填题的形式考查,难度中等或偏上。求几何体体积的常用方法:



考点二 对空间直线与平面位置关系的考查

例2 (2023年高考全国乙卷文数第19题)如图4,在三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中,$AB\perp BC$,$|AB|=2$,$|BC|=2\sqrt{2}$,$|PB|=|PC|=\sqrt{6}$,BP,AP,BC 的中点分别为 D,E,O,点 F 在 AC 上,且 $BF\perp AO$。

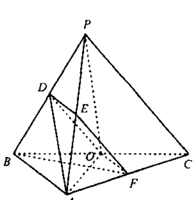


图4

(1)求证:$EF/\!/$平面 ADO;

(2)若 $\angle POF=120^\circ$,求三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的体积。

命题意图:本题考查空间线面位置关系的证明及几何体体积的计算,考查直观想象、逻辑推理等核心素养。

解题思路:(1)依题设条件,可证得四边形 $ODEF$ 为平行四边形,再利用线面平行的判定定理进行证明。(2)作出并证明 PM 为棱锥的高,再利用三棱锥的体积公式直接求解。

解析:(1)连接 DE,OF,设 $|AF|=t|AC|$,则 $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=(1-t)\overrightarrow{BA}+t\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$。

$BF\perp AO$,则 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AO}=[(1-t)\overrightarrow{BA}+t\overrightarrow{BC}]\cdot(-\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC})=(t-1)\overrightarrow{BA}^2+\frac{1}{2}t\overrightarrow{BC}^2=4(t-1)+4t=0$,解得 $t=\frac{1}{2}$,F 为 AC 的中点。

由于 D,E,O,F 分别为 PB,PA,BC,AC 的中点,故 $DE/\!/AB$,$|DE|=\frac{1}{2}|AB|$,$OF/\!/AB$,$|OF|=\frac{1}{2}|AB|$,即 $DE/\!/OF$,$|DE|=|OF|$,四边形 $ODEF$ 为平行四边形,$EF/\!/DO$,$|EF|=|DO|$。

又 $EF\not\subset$平面 ADO,$DO\subset$平面 ADO,所以 $EF/\!/$平面 ADO。

(2)如图5,过 P 作 PM 垂直 FO 的延长线交于点 M。因为 $|PB|=|PC|$,O 是 BC 的中点,所以 $PO\perp BC$。

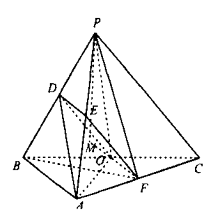


图5

在 $\mathrm{Rt}\triangle PBO$ 中,$|PB|=\sqrt{6}$,$|BO|=\frac{1}{2}|BC|=\sqrt{2}$,所以 $|PO|=\sqrt{|PB|^2-|OB|^2}=\sqrt{6-2}=2$。

因为 $AB\perp BC$,$OF/\!/AB$,所以 $OF\perp BC$。又 $PO\cap OF=O$,$PO,OF\subset$平面 POF,所以 $BC\perp$平面 POF。

又 $PM\subset$平面 POF,所以 $BC\perp PM$。

万方数据

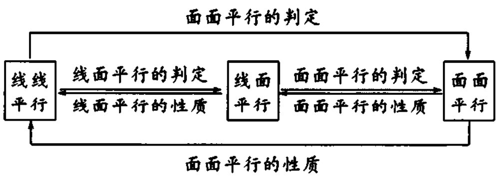
又 $BC\cap FM=O$，BC，$FM\subset$平面 ABC，所以 $PM\perp$平面 ABC，即三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的高为 PM。

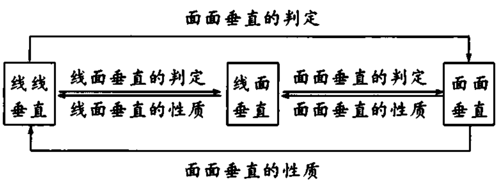
因为$\angle POF=120°$，所以$\angle POM=60°$。

因此，$|PM|=|PO|\sin 60°=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$。

又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|BC|=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$，所以 $V_{P\text{-}ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot|PM|=\frac{1}{3}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$。

考点解读：高考对空间线面位置关系的考查，一是空间线面关系的命题真假的判断，以选填题的形式考查，属于基础题；二是空间线线、线面、面面平行和垂直关系交汇的综合命题，常放在解答题的第一问，属于中档题。平行、垂直关系的证明主要应用转化思想，即通过判定定理、性质定理将线线、线面、面面之间的平行、垂直关系相互转化。





考点三 对空间几何体外接球的考查

例 3 (1)(2023 年高考全国乙卷文数第 16 题)已知点 S,A,B,C 均在半径为 2 的球面上，$\triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形，$SA\perp$平面 ABC，则$|SA|=$____。

(2)(2023 年高考全国甲卷理数第 15 题)在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F 分别为 AB,C_1D_1 的中点，以 EF 为直径的球的球面与该正方体的棱共有____个公共点。

(3)(2023 年高考全国甲卷文数第 16 题)在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$|AB|=4$，O 为 AC_1 的中点，若该正方体的棱与球 O 的球面有公共点，则球 O 的半径的取值范围是____。

命题意图：本题考查空间几何体的外接球问题，考查直观想象、逻辑推理及数学运算等核心素养。

解题思路：(1)依题意，先由正弦定理求得底面外接圆的半径，再结合直棱柱的外接球及性质进行求解。(2)根据正方体的对称性知，球心到各棱距离相等，可得解。(3)依题意，当球是正方体的外接球时半径最大，当边长为 4 的正方形是球的大圆的内接正方形时半径达到最小。

解析：(1)如图 6，将三棱锥 $S\text{-}ABC$ 转化为直三棱柱 $SMN\text{-}ABC$。设$\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O_1，半径为 r，则 $2r=\frac{|AB|}{\sin\angle ACB}=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$，可得 $r=\sqrt{3}$。设三棱锥 $S\text{-}ABC$ 的外接球球心为 O，连接 OA，OO_1，则$|OA|=2$，$|OO_1|=\frac{1}{2}|SA|$。因为$|OA^2|=|OO_1|^2+|O_1A|^2$，即 $4=3+\frac{1}{4}|SA|^2$，所以解得$|SA|=2$。

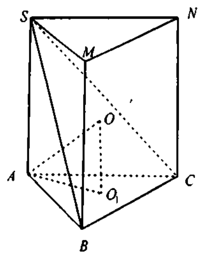


图 6

(2)不妨设正方体的棱长为 2，EF 的中点为 O。分别取 CD，CC_1 的中点 G，M，侧面 BB_1C_1C 的中心为 N，连接 FG，EG，OM，ON，MN，如图 7。

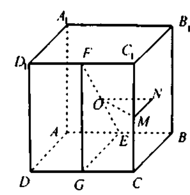


图 7

由题意可知，O 为球心，在正方体中，$|EF|=\sqrt{|FG|^2+|EG|^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，即 $R=\sqrt{2}$，则球心 O 到 CC_1 的距离为 $|OM|=\sqrt{|ON|^2+|MN|^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$。

所以球 O 与棱 CC_1 相切，球面与棱 CC_1 只有 1 个交点。

同理，根据正方体的对称性知，其余各棱和球面也只有 1 个交点，所以以 EF 为直径

万方数据

的球面与正方体每条棱的交点总数为12。

(3)设球的半径为 R。当球是正方体的外接球时,恰好经过正方体的每个顶点,所求的球的半径最大,若半径变得更大,球会包含正方体,导致球面和棱没有交点,正方体的外接球直径 $2R'$ 为体对角线长 $|AC_1|=\sqrt{4^2+4^2+4^2}=4\sqrt{3}$,即 $2R'=4\sqrt{3}$,$R'=2\sqrt{3}$,故 $R_{\max}=2\sqrt{3}$。

如图8,分别取侧棱 AA_1,BB_1,CC_1,DD_1 的中点 M,H,G,N,显然四边形 $MNGH$ 是边长为4的正方形,且 O 为正方形 $MNGH$ 的对角线交点。连接 MG,则 $|MG|=4\sqrt{2}$,当球的一个大圆恰好是四边形 $MNGH$ 的外接圆时,球的半径达到最小,即 R 的最小值为 $2\sqrt{2}$。

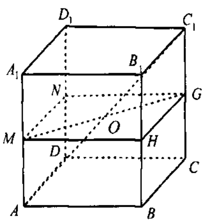
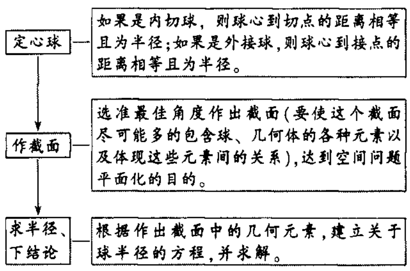


图8

综上,$R\in[2\sqrt{2},2\sqrt{3}]$。

考点解读:球与几何体的切接问题是高考命题的高频考点,常作为客观题中的压轴题。此类问题要求同学们有较强的空间想象能力和准确的计算能力,试题难度较大。解决与球有关的切接问题,其通法是作截面,将空间几何问题转化为平面几何问题求解,其解题的思维流程是:



考点四 对空间角的考查

角度1 对直线与平面所成的角的考查

例4 (2023年高考全国乙卷理数第9题)已知△ABC 为等腰直角三角形,AB 为斜边,△ABD 为等边三角形,若二面角 C-AB-D 为150°,则直线 CD 与平面 ABC 所成角的正切值为( )。

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{5}$ D. $\frac{2}{5}$

命题意图:本题考查直线与平面所成的角及二面角,考查直观想象、逻辑推理的核心素养。

解题思路:依据题设,确定线面角,再利用正弦、余弦定理进行解答。

解析:如图9,取 AB 的中点 E,连接 CE,DE。因为△ABC 是等腰直角三角形,且 AB 为斜边,所以 $CE\perp AB$。又△ABD 是等边三角形,则 $DE\perp AB$。从而 $\angle CED$ 为二面角 C-AB-D 的平面角,即 $\angle CED=150°$。

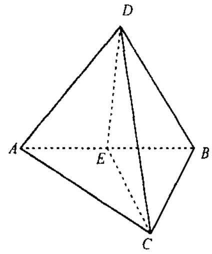


图9

显然 $CE\cap DE=E$,$CE,DE\subset$ 平面 CDE,于是 $AB\perp$ 平面 CDE。又 $AB\subset$ 平面 ABC,所以平面 $CDE\perp$ 平面 ABC。显然平面 $CDE\cap$ 平面 $ABC=CE$,直线 $CD\subset$ 平面 CDE,则直线 CD 在平面 ABC 内的射影为直线 CE,从而 $\angle DCE$ 为直线 CD 与平面 ABC 所成的角。

令 $|AB|=2$,则 $|CE|=1$,$|DE|=\sqrt{3}$,在△CDE 中,由余弦定理得:

$$|CD|=\sqrt{|CE|^2+|DE|^2-2|CE|\cdot|DE|\cos\angle CED}$$

$=\sqrt{1+3-2\times1\times\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\sqrt{7}$。由正弦定理得 $\frac{|DE|}{\sin\angle DCE}=\frac{|CD|}{\sin\angle CED}$,即 $\sin\angle DCE=\frac{\sqrt{3}\sin150°}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$。显然 $\angle DCE$ 是锐角,$\cos\angle DCE=\sqrt{1-\sin^2\angle DCE}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\right)^2}=\frac{5}{2\sqrt{7}}$,所以直线 CD 与平面 ABC 所成角的正切为 $\frac{\sqrt{3}}{5}$。选C。

角度2 对二面角的考查

例5 (2023年新课标全国Ⅱ卷第20题)如图10,三棱锥 A-BCD 中,$|DA|=|DB|=|DC|$,$BD\perp CD$,$\angle ADB=$

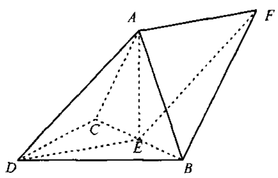


图10

万方数据

$\angle ADC=60°$，E为BC的中点。

(1)证明：$BC\perp DA$；

(2)点F满足$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}$，求二面角$D$-$AB$-$F$的正弦值。

命题意图：本题考查线线垂直及二面角，同时考查逻辑推理、数学运算的核心素养。

解题思路：(1)依题意易证$BC\perp$平面ADE，从而证得$BC\perp DA$。(2)由题设可证$AE\perp$平面BCD，所以以点E为原点，ED，EB，EA所在直线分别为x，y，z轴，建立空间直角坐标系，分别求出平面ABD，ABF的一个法向量，根据二面角的向量公式得所求。

解析：(1)连接AE，DE。因为E为BC的中点，$|DB|=|DC|$，所以$DE\perp BC$。①

因为$|DA|=|DB|=|DC|$，$\angle ADB=\angle ADC=60°$，所以$\triangle ACD$与$\triangle ABD$均为等边三角形，$|AC|=|AB|$，从而$AE\perp BC$。②

由①②知，$AE\cap DE=E$，AE，$DE\subset$平面ADE，所以$BC\perp$平面ADE。

而$AD\subset$平面ADE，所以$BC\perp DA$。

(2)不妨设$|DA|=|DB|=|DC|=2$。因为$BD\perp CD$，所以$|BC|=2\sqrt{2}$，$|DE|=|AE|=\sqrt{2}$。

所以$|AE|^2+|DE|^2=4=|AD|^2$，所以$AE\perp DE$。又因为$AE\perp BC$，$DE\cap BC=E$，DE，$BC\subset$平面BCD，所以$AE\perp$平面BCD。

不妨以点E为原点，ED，EB，EA所在直线分别为x轴，y轴，z轴，建立空间直角坐标系，如图11所示。

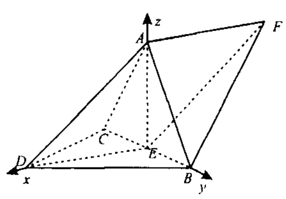


图11

则$D(\sqrt{2},0,0)$，$A(0,0,\sqrt{2})$，$B(0,\sqrt{2},0)$，$E(0,0,0)$。

设平面DAB与平面ABF的一个法向量分别为$\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$。

二面角D-AB-F平面角为θ，且$\overrightarrow{AB}=(0,\sqrt{2},-\sqrt{2})$。

因为$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}=(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$，所以$F(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$，即有$\overrightarrow{AF}=(-\sqrt{2},0,0)$。

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DA}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AB}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}-\sqrt{2}x_1+\sqrt{2}z_1=0,\\ \sqrt{2}y_1-\sqrt{2}z_1=0。\end{cases}$

取$x_1=1$，得$\boldsymbol{n}_1=(1,1,1)$。

同理：

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AF}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}\sqrt{2}y_2-\sqrt{2}z_2=0,\\ -\sqrt{2}x_2=0。\end{cases}$

取$y_2=1$，得$\boldsymbol{n}_2=(0,1,1)$。

所以，$|\cos\theta|=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{2}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，从而$\sin\theta=\sqrt{1-\dfrac{6}{9}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

所以二面角D-AB-F的正弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

考点解读：利用空间向量求二面角或线面角是高考热点，常以解答题的形式出现，难度中等。对解答题中线面角、二面角问题的求解，或已知线面角、面面角求参数问题，常通过建系，利用空间向量的坐标的方法进行解答，正确求出平面的法向量是解答问题的关键。

考点五 对立体几何综合应用的考查

例6 (1)(2023年新课标全国Ⅱ卷第9题)(多选)如图12，已知圆锥的顶点为P，底面圆心为O，AB为底面直径，$\angle APB=120°$，$|PA|=2$，点C在底面圆周上，且二面角P-AC-O为$45°$，则(　　)。

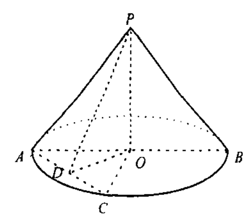


图12

A. 该圆锥的体积为π

B. 该圆锥的侧面积为$4\sqrt{3}\pi$

C. $|AC|=2\sqrt{2}$

D. $\triangle PAC$的面积为$\sqrt{3}$

(2)(2023年高考全国甲卷理数第11题)已知四棱锥P-$ABCD$的底面是边长为4的正方形，$|PC|=|PD|=3$，$\angle PCA=45°$，则$\triangle PBC$的面积为(　　)。

A. $2\sqrt{2}$　　B. $3\sqrt{2}$

C. $4\sqrt{2}$　　D. $6\sqrt{2}$

命题意图：本题是对立体几何问题综合应用的考查，考查直观想象、逻辑推理及数学建模的核心素养。

万方数据

解题思路：(1)根据圆锥的体积、侧面积及二面角的知识进行逐项判断。(2)思路一：先依次证得$\triangle PDO\cong\triangle PCO$，$\triangle PDB\cong\triangle PCA$，得$|PA|=|PB|$。再在$\triangle PAC$中利用余弦定理求得$PA$，从而得$PB$，然后在$\triangle PBC$中利用余弦定理与三角形面积公式得所求。思路二：先在$\triangle PAC$中利用余弦定理求得PA，$\cos\angle PCB$的值，从而求得$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$，利用空间向量的数量积运算与余弦定理得到关于$PB$，$\angle BPD$的方程组，从而求得$PB$的值，然后在$\triangle PBC$中利用余弦定理与三角形面积公式即可得所求。

解析：(1)依题意，$\angle APB=120°$，$|PA|=2$，所以$|OP|=1$，$|OA|=|OB|=\sqrt{3}$。对于A，圆锥的体积为$\frac{1}{3}\times\pi\times(\sqrt{3})^2\times1=\pi$，故A正确。对于B，圆锥的侧面积为$\pi\times\sqrt{3}\times2=2\sqrt{3}\pi$，故B错误。对于C，设$D$是$AC$的中点，连接$OD$，$PD$，则$AC\perp OD$，$AC\perp PD$，所以$\angle PDO$是二面角$P\text{-}AC\text{-}O$的平面角，则$\angle PDO=45°$，$|OP|=|OD|=1$。故$|AD|=|CD|=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$，则$|AC|=2\sqrt{2}$，C正确。对于D，$|PD|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，所以$S_{\triangle PAC}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$，D错误。故选AC。

(2)解法一：连接AC，BD交于O，连接PO，则O为AC，BD的中点，如图13所示。

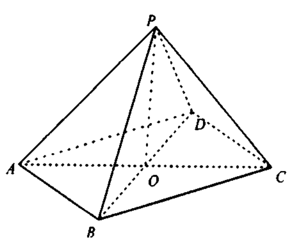


图13

因为底面$ABCD$为正方形，$|AB|=4$，所以$|AC|=|BD|=4\sqrt{2}$，则$|DO|=|CO|=2\sqrt{2}$。

又$|PC|=|PD|=3$，$|PO|=|OP|$，所以$\triangle PDO\cong\triangle PCO$，$\angle PDO=\angle PCO$。

又$|PC|=|PD|=3$，$|AC|=|BD|=4\sqrt{2}$，所以$\triangle PDB\cong\triangle PCA$，$|PA|=|PB|$。

在$\triangle PAC$中，$|PC|=3$，$|AC|=4\sqrt{2}$，$\angle PCA=45°$，由余弦定理得，$|PA|^2=|AC|^2+|PC|^2-2|AC|\cdot|PC|\cos\angle PCA=32+9-2\times4\sqrt{2}\times3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=17$，故$|PA|=\sqrt{17}$。

则$|PB|=\sqrt{17}$。故在$\triangle PBC$中，$|PC|=3$，$|PB|=\sqrt{17}$，$|BC|=4$。

所以$\cos\angle PCB=\frac{|PC|^2+|BC|^2-|PB|^2}{2|PC|\cdot|BC|}=\frac{9+16-17}{2\times3\times4}=\frac{1}{3}$。

又$0<\angle PCB<\pi$，所以$\sin\angle PCB=\sqrt{1-\cos^2\angle PCB}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$。

所以$\triangle PBC$的面积为$S=\frac{1}{2}|PC|\cdot|BC|\sin\angle PCB=\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{2}$。选C。

解法二：连接AC，BD交于O，连接PO，则O为AC，BD的中点，如图13所示。

因为底面$ABCD$为正方形，$|AB|=4$，所以$|AC|=|BD|=4\sqrt{2}$。

在$\triangle PAC$中，$|PC|=3$，$\angle PCA=45°$，则由余弦定理可得$|PA|^2=|AC|^2+|PC|^2-2|AC|\cdot|PC|\cos\angle PCA=32+9-2\times4\sqrt{2}\times3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=17$，故$|PA|=\sqrt{17}$。

所以$\cos\angle APC=\frac{|PA|^2+|PC|^2-|AC|^2}{2|PA|\cdot|PC|}=\frac{17+9-32}{2\times\sqrt{17}\times3}=-\frac{\sqrt{17}}{17}$。

则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PC}|\cos\angle APC=\sqrt{17}\times3\times\left(-\frac{\sqrt{17}}{17}\right)=-3$。

不妨记$|PB|=m$，$\angle BPD=\theta$。因为$\overrightarrow{PO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD})$，所以$(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC})^2=(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD})^2$，即$\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PC}^2+2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}^2+\overrightarrow{PD}^2+2\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}$，则$17+9+2\times(-3)=m^2+9+2\times3\times m\cos\theta$，整理得$m^2+6m\cos\theta-11=0$。①

又在$\triangle PBD$中，$|BD|^2=|PB|^2+|PD|^2-2|PB|\cdot|PD|\cos\angle BPD$，即$32=m^2+9-6m\cos\theta$。

则$m^2-6m\cos\theta-23=0$。②

(下转第13页)

万方数据

则以 B 为坐标原点，分别以 BA,BC,BB_1 所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，如图4。则 $B(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$B_1(0,0,2)$，$A_1(2,0,2)$，$C_1(0,2,2)$，$E(1,1,0)$，$F(0,2,1)$。

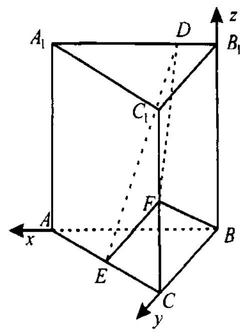


图4

由题意，设 $D(a,0,2)(0\leqslant a\leqslant 2)$。

因为 $\overrightarrow{BF}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{DE}=(1-a,1,-2)$，所以 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{DE}=0\times(1-a)+2\times1+1\times(-2)=0$，即 $BF\perp DE$。

点评：由题意得出此几何题属于典型的"墙角模型"，即建立空间直角坐标系，利用坐标运算实现目标数量积为0，从而获得证明。解答涉及"墙角模型"的立体几何试题，建立坐标系是较简便的解法。

证法4(基底法)

因为 $BF\perp A_1B_1$，$A_1B_1\parallel AB$，所以 $BF\perp AB$，故 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0$，$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AB}=0$。

所以 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{BF}\cdot(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1D})=\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{B_1D}+\overrightarrow{BF}\cdot(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BB_1})=\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BF}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BB_1}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BB_1}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BB_1}=-\frac{1}{2}|\overrightarrow{BF}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos\angle FBC+|\overrightarrow{BF}|\cdot|\overrightarrow{BB_1}|\cos\angle FBB_1=-\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times2\times\frac{2}{\sqrt{5}}+\sqrt{5}\times2\times\frac{1}{\sqrt{5}}=0$，即 $BF\perp ED$。

点评：基底法的本质是将所求向量运算关系转化为题中已知模长、夹角的两个向量运算关系，核心是转化思想，能用坐标法就可以用基底法，坐标是建立在特殊的基底之上的，所以由证法3就应该想到证法4。

总之，由于立体几何中的很多问题都可以通过"化空间为平面"的思想方法来解决，因此通过作图转化为平面几何中证明线线垂直的方法最为常见。常用到的知识有：勾股定理，菱形或正方形的对角线互相垂直，等腰三角形的三线合一，直径所对的圆周角是直角，三角形全等，过切点的半径垂直于切线等等。所以在证明过程中寻找相应的"点"进行连线是解决问题的关键。垂直问题在立体几何中占有重要的地位，是历年高考命题的热点，空间中的垂直关系常转化为证明线线垂直。因此，同学们一定要把证明线线垂直的方法研究透彻。

（责任编辑　徐利杰）

（上接第11页）

两式相加得 $2m^2-34=0$，故 $|PB|=m=\sqrt{17}$。故在 $\triangle PBC$ 中，$|PC|=3$，$|PB|=\sqrt{17}$，$|BC|=4$，$\cos\angle PCB=\frac{|PC|^2+|BC|^2-|PB|^2}{2|PC|\cdot|BC|}=\frac{9+16-17}{2\times3\times4}=\frac{1}{3}$。

又 $0<\angle PCB<\pi$，所以 $\sin\angle PCB=\sqrt{1-\cos^2\angle PCB}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$。

所以 $\triangle PBC$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}|PC|\cdot|BC|\sin\angle PCB=\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{2}$。

故选C。

考点解读：高考立体几何试题中每年都有1—2道选填题，常涉及几何体的体积，内切、外接球，截面，动点轨迹，最值及探索性问题等，试题灵活且考查的知识点综合性强，能够很好地考查同学们知识的综合应用能力及分析问题、解决问题的能力。

（责任编辑　徐利杰）

万方数据