



# 一道切点弦方程的题目引发的思考

江苏南京师范大学附属实验学校(210046) 王庆欢

[摘要]文章主要对解析几何切点弦的问题展开讨论,通过不同解法对比,使教师能认识到优化解题方法的重要性,能够注重解题方法的总结,提高学生的解题能力。

[关键词]解析几何;切点弦;思考

[中图分类号] G633.6 [文献标识码] A [文章编号] 1674-6058(2023)14-0027-03

## 一、呈现数学试题,探索解题方法

有一道解析几何多选题是这样的:

已知抛物线  $C: y^2 = 4x$ , 其焦点为  $F$ ,  $P$  为直线  $x = -2$  上任意一点, 过  $P$  点作抛物线  $C$  的两条切线, 切点分别为  $A, B$ , 斜率分别为  $k_1, k_2$ , 则( )。

A.  $k_1 \cdot k_2 = -\frac{1}{2}$

B.  $|k_1 - k_2| = 2$

C.  $AB$  过定点  $(2, 0)$

D.  $|AF| \cdot |BF|$  的最小值为 8

在考试中, 学生对于这样的一道多选题, 选对选全是很困难的, 很多学生即使做对也耗时过多, 后面的题目时间就不够用了, 造成了隐形失分。对此, 笔者首先尝试了常规解法, 具体如下:

设  $P(-2, t)$ ,  $PA: y - t = k_1(x + 2)$ ,  $PB: y - t = k_2(x + 2)$ , 与抛物线方程联立得  $k_1^2 x^2 + (4k_1^2 + 2k_1 t - 4)x + 4k_1^2 + 4k_1 t + t^2 = 0$ , 因为直线  $PA$  与抛物线相切, 所以  $\Delta = 0$ ,  $(4k_1^2 + 2k_1 t - 4)^2 - 4k_1^2(4k_1^2 + 4k_1 t + t^2) = 0$ , 即  $2k_1^2 + tk_1 - 1 = 0$ , 同理可得  $2k_2^2 + tk_2 - 1 = 0$ , 所以  $k_1, k_2$  是方程  $2k^2 + tk - 1 = 0$  的两根, 由韦达定理可得出  $k_1 k_2 = -\frac{1}{2}$ , 由此可知 A 选项正确。对于 B 选项,  $|k_1 - k_2| = \sqrt{(k_1 + k_2)^2 - 4k_1 k_2} =$

$$\sqrt{\left(-\frac{t}{2}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2} \sqrt{t^2 + 8}, \text{显然不是定值, 由此可知 B 选项错误。}$$

对于 C 选项, 就要求出切点弦  $AB$  的方程, 如果按照这个思路做下去, 只要由  $k_1^2 x^2 + (4k_1^2 + 2k_1 t - 4)x + 4k_1^2 + 4k_1 t + t^2 = 0$ , 方程有两个相等的实根得  $x_A = -2 - \frac{t}{k_1} + \frac{2}{k_1^2}$ ,  $y_A = \frac{2}{k_1}$ ,

同理  $x_B = -2 - \frac{t}{k_2} + \frac{2}{k_2^2}$ ,  $y_B = \frac{2}{k_2}$ , 当  $x_A \neq x_B$  时,

$$\text{即 } t \neq 0 \text{ 时, } k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{2}{k_2} - \frac{2}{k_1}}{\frac{2}{k_2^2} - \frac{2}{k_1^2} - \frac{t}{k_2} + \frac{t}{k_1}} =$$

$$\frac{2k_1 k_2}{2(k_1 + k_2) - tk_1 k_2} = \frac{-1}{2\left(-\frac{t}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)t} = \frac{2}{t}, \text{则直}$$

$$\text{线 } AB \text{ 的方程: } y - \frac{2}{k_1} = \frac{2}{t} \left( x + 2 + \frac{t}{k_1} - \frac{2}{k_1^2} \right), \text{化简得}$$

$$y = \frac{2}{t}x + \frac{4k_1 t - 4 + 4k_1^2}{tk_1^2}, \text{结合 } 2k_1^2 + tk_1 - 1 = 0, AB$$

$$\text{的方程为 } y = \frac{2}{t}x - \frac{4}{t}, \text{即 } y = \frac{2}{t}(x - 2), \text{当 } x_A = x_B,$$

$$\text{即 } t = 0 \text{ 时, } AB \text{ 的方程为 } x = -2 + \frac{2}{k_1^2} = 2, \text{所以选项}$$

C 正确。对于 D 选项, 由前面可知,  $AB$  的方程  $ty = 2(x - 2)$  与抛物线方程  $y^2 = 4x$  联立得  $4x^2 - (16 + 4t^2)x + 16 = 0$ , 则  $x_1 + x_2 = 4 + t^2$ ,  $x_1 x_2 = 4$ , 由抛物线的性质得  $|AF|$  等于点  $A$  到准线  $x = -1$  的距离,  $|BF|$  等于点  $B$  到准线  $x = -1$  的距离, 故  $|AF| \cdot |BF| = (x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 = t^2 + 9$ , 当  $t = 0$  时,  $|AF| \cdot |BF|$  的最小值为 9。

本题虽然解答完毕, 但是耗时较多, 尤其是在求切点弦  $AB$  时。作为一道多选题, 有没有办法让学生更为快捷地得出答案呢? 笔者做了如下研究。

## 二、寻找新思路, 优化解题方法

过抛物线  $C: y^2 = 2px$  外一点  $P(x_0, y_0)$ , 作抛物线的两条切线  $PA, PB$ , 则切点弦  $AB$  的直线方程为  $y_0 y = p(x + x_0)$ 。证明:  $y^2 = 2px$ , 左右两边求导:

$$2yy' = 2p, y' = \frac{p}{y}, \text{则过切点 } (x_1, y_1) \text{ 的切线方程是}$$



$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1)$ , 化简  $y = \frac{p}{y_1}x - \frac{p}{y_1}x_1 + y_1$ ,  $y = \frac{p}{y_1}x - \frac{p}{y_1} \cdot \frac{y_1^2}{2p} + y_1$ , 即  $y = \frac{p}{y_1}x + \frac{y_1}{2}$ , 又因为切线过  $(x_0, y_0)$ , 所以  $y_0 = \frac{p}{y_1}x_0 + \frac{y_1}{2}$ , 即  $y_0 y_1 = p x_0 + \frac{y_1^2}{2}$ , 化简得  $y_0 y_1 = p(x_0 + x_1)$ , 同理  $y_0 y_2 = p(x_0 + x_2)$ , 所以切点弦  $AB$  的方程是  $y_0 y = p(x_0 + x)$ , 证毕。

那么本题设  $P(-2, t)$ ,  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ , 则由切点弦方程的知识, 得  $AB$  的方程为  $ty = 2(x - 2)$ , 与抛物线方程联立得  $y^2 - 2ty - 8 = 0$ ,  $y_1 + y_2 = 2t$ ,  $y_1 y_2 = -8$ ,  $x_1 + x_2 = \frac{t}{2}(y_1 + y_2) + 4 = t^2 + 4$ ,  $x_1 x_2 = \left(\frac{t}{2}y_1 + 2\right)\left(\frac{t}{2}y_2 + 2\right) = \frac{t^2}{4}y_1 y_2 + t(y_1 + y_2) + 4 = 4$ 。

$AB$  的方程:  $ty = 2(x - 2)$ , 过定点  $(2, 0)$ ,  $C$  选项正确;  $|AF| \cdot |BF| = (x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 = t^2 + 9 \geq 9$ ,  $D$  选项错误。

### 三、及时反思, 归纳总结方法

通过抛物线切点弦的结论, 我们能更快地判断  $C$ 、 $D$  选项, 下面笔者整理一下常见曲线的切点弦。

#### (一) 圆的切点弦方程

过圆  $C: x^2 + y^2 = r^2$  外一点  $P(x_0, y_0)$  作圆的两条切线  $PA$ 、 $PB$ , 则切点弦  $AB$  所在的直线方程为  $x_0 x + y_0 y = r^2$ 。

#### (二) 椭圆的切点弦方程

过椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  外一点  $P(x_0, y_0)$  作椭圆的两条切线  $PA$ 、 $PB$ , 则切点弦  $AB$  所在的直线方程为  $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ 。

#### (三) 双曲线的切点弦方程

过双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  外一点  $P(x_0, y_0)$  作双曲线的两条切线  $PA$ 、 $PB$ , 则切点弦  $AB$  所在的直线方程为  $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ 。

以上几种曲线的切点弦方程在证明时都可以通过类比得到, 这种“设而不求”的方法大家可以仿照上面证明抛物线切点弦的方法尝试应用。下面我们再来研究一下相关的题目。

[例 1] 已知  $\odot O$  的方程为  $x^2 + y^2 = 4$ , 过点

$A(3, 4)$  作  $\odot O$  的切线, 切点分别为  $B$ 、 $C$ 。求直线  $BC$  的方程。

解法一: 转化为求两相交圆的公共弦所在直线的方程。

如图 1 所示, 连接  $OB$ 、 $OC$ 、 $OA$ 、 $BC$ , 则  $\angle OBA = \angle OCA = 90^\circ$ , 所以  $O$ 、 $C$ 、 $A$ 、 $B$  四点共圆, 且此圆是以  $OA$  为直径的圆, 其方程

为  $x(x - 3) + y(y - 4) = 0$ , 即  $x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0$ 。

故直线  $BC$  为  $\odot O$  与以  $OA$  为直径的圆的公共弦所在直线, 将两圆的方程相减得直线  $BC$  的方程为  $3x + 4y - 4 = 0$ 。

解法二: 设两切点的坐标, 利用圆的切线方程, 得到过两切点的直线方程。

设点  $B(x_1, y_1)$ ,  $C(x_2, y_2)$ , 则切线  $AB$  的方程为  $x_1 x + y_1 y = 4$ 。

因为切线  $AB$  过点  $A$ , 所以  $3x_1 + 4y_1 = 4$ , ①

同理,  $3x_2 + 4y_2 = 4$ 。②

由①②知, 切点  $B$ 、 $C$  都在直线  $3x + 4y - 4 = 0$  上, 因此直线  $BC$  的方程为  $3x + 4y - 4 = 0$ 。

在本题的解法中, 解法一计算量要求相对要多一些, 如果学生了解圆的切点弦相应结论, 利用解法二问题就会简化很多。我们也可以将结论进行拓展, 如: 过圆  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  上一点  $P(x_0, y_0)$  的圆的切线方程为  $(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2$ ; 过圆  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  外一点  $P(x_0, y_0)$  作圆的两条切线, 则两切点所在直线方程为  $(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2$ 。

[例 2]  $P$  是抛物线  $y^2 = 2px$  准线上一点, 过点  $P$  向抛物线  $y^2 = 2px$  引两条切线  $PA$ 、 $PB$ ,  $A$ 、 $B$  是切点。

(1) 证明  $AB$  过定点, 并求出该定点坐标;

(2) 证明:  $PF \perp AB$ 。

证明: (1) 因为  $P$  在抛物线  $y^2 = 2px$  的准线上, 可设  $P\left(-\frac{p}{2}, t\right)$ , 则由抛物线切点弦的结论知  $AB: ty = p\left(x - \frac{p}{2}\right)$  (证明直线  $AB$  过定点, 即证明  $AB$  所过点与  $t$  无关, 所以令  $y = 0$ ), 令  $y = 0$ , 则  $x = \frac{p}{2}$ , 所以直线  $AB$  过定点  $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ , 即  $AB$  过抛物线的焦点。

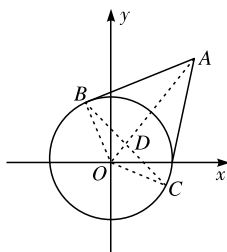


图 1



(2) 当  $t = 0$  时,  $AB: x = \frac{p}{2}$ , 则  $PF \perp AB$ .

当  $t \neq 0$ ,  $k_{AB} = \frac{p}{t}$ ,  $k_{PF} = \frac{t}{-\frac{p}{2} - \frac{p}{2}} = -\frac{t}{p}$ , 所以  $k_{AB} \cdot k_{PF} = -1$ , 所以  $PF \perp AB$ .

所以  $PF \perp AB$ .

本题过  $P(x_0, y_0)$  向抛物线  $y^2 = 2px$  引两条切线, 切点分别为  $A, B$ , 则切点弦  $AB$  所在直线方程为  $y_0 y = p(x + x_0)$ , 在上面结论中已经证明.

**[例3]** 过椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  上不同两点  $A, B$  的切线互相垂直, 证明: 两切线交点  $M$  的轨迹方程为  $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ .

**证明:** 设  $M(x_0, y_0)$ , 则切点弦  $AB$  所在的直线方程为  $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ .

代入椭圆  $C$  的方程并消去  $y$  得  $\left(1 - \frac{x_0 x}{a^2}\right)^2 = \frac{y_0^2}{b^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ , 即  $\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right)x^2 - 2x_0 x + a^2 \left(1 - \frac{y_0^2}{b^2}\right) = 0$ .

设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 则  $k_{MA} = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$ ,  $k_{MB} = -\frac{b^2 x_2}{a^2 y_2}$ ,

且  $k_{MA} \cdot k_{MB} = \frac{b^4 x_1 x_2}{a^4 y_1 y_2} = -1$ .

又  $\frac{x_0 x_1}{a^2} + \frac{y_0 y_1}{b^2} = 1$ ,  $\frac{x_0 x_2}{a^2} + \frac{y_0 y_2}{b^2} = 1$ , 代入得  $\frac{x_1 x_2}{a^4} + \frac{y_1 y_2}{b^4} = \frac{x_1 x_2}{a^4} + \frac{1}{y_0^2} \left(1 - \frac{x_0 x_1}{a^2}\right) \left(1 - \frac{x_0 x_2}{a^2}\right) = 0$ , 即  $\frac{x_0^2 + y_0^2}{a^4} x_1 x_2 - \frac{x_0}{a^2} (x_1 + x_2) + 1 = 0$ ,

利用韦达定理代入得:

$$\frac{x_0^2 + y_0^2}{a^2} \left(1 - \frac{y_0^2}{b^2}\right) - \frac{2x_0^2}{a^2} + \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right) = 0,$$

化简、整理得  $x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2$ .

因此, 两切线交点  $M$  的轨迹方程为  $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ .

学生如果对椭圆的切点弦方程了解得比较透彻, 就能更有方向、更快捷地证明出本题.

**[例4]** 已知中心在原点, 焦点在  $x$  轴上的椭圆  $C$  的离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 过左焦点  $F$  且垂直于  $x$  轴的直线交椭圆  $C$  于  $P, Q$  两点, 且  $|PQ| = 2\sqrt{2}$ .

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 若直线  $l$  是  $x^2 + y^2 = 8$  上的在  $(2, 2)$  处的切线, 点  $M$  是  $l$  上的任意一点, 过点  $M$  作椭圆  $C$  的切线  $MA, MB$ , 切点分别为  $A, B$ , 设切线的斜率都存在, 求证: 直线  $AB$  过定点, 并求出该点的坐标.

**解:** (1) 由题意, 设椭圆  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ), 由  $|PQ| = 2\sqrt{2}$ , 设点  $P(-c, \sqrt{2})$ , 代入椭圆方程得  $\frac{c^2}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1$ , 又由  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 得到  $\frac{1}{2} + \frac{2}{b^2} = 1$ ,  $b = c$ , 即  $b^2 = 4$ ,  $a^2 = 2b^2 = 8$ , 由此椭圆  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

(2) 由题意, 直线  $l$  的方程为  $y - 2 = -(x - 2)$ , 即  $x + y - 4 = 0$ , 设  $M(x_0, y_0), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 由切线  $MA$  的斜率存在, 设其方程为  $y - y_1 = k(x - x_1)$ , 与椭圆方程联立得  $(2k^2 + 1)x^2 + 4k(y_1 - kx_1)x + 2(y_1 - kx_1)^2 - 8 = 0$ , 由相切得  $\Delta = 16k^2(y_1 - kx_1)^2 - 8(2k^2 + 1)[(y_1 - kx_1)^2 - 4] = 0$ , 化简得  $(y_1 - kx_1)^2 = 8k^2 + 4$ , 即  $(x_1^2 - 8)k^2 - 2x_1 y_1 k + y_1^2 - 4 = 0$ , 因为方程只有一个解, 所以  $k = \frac{x_1 y_1}{x_1^2 - 8} = \frac{x_1 y_1}{-2y_1^2} = -\frac{x_1}{2y_1}$ , 所以切线  $MA$  的方程为  $y - y_1 = -\frac{x_1}{2y_1}(x - x_1)$ , 即  $x_1 x + 2y_1 y = 8$ . 同理, 切线  $MB$  的方程为  $x_2 x + 2y_2 y = 8$ , 又因为两切线都过点  $M(x_0, y_0)$ , 所以  $x_1 x_0 + 2y_1 y_0 = 8$ ,  $x_2 x_0 + 2y_2 y_0 = 8$ , 所以直线  $AB$  的方程为  $x_0 x + 2y_0 y = 8$ , 又  $x_0 + y_0 = 4$ , 所以直线  $AB$  的方程可化为  $x_0 x + 2(4 - x_0)y = 8$ , 即  $x_0(x - 2y) + 8y - 8 = 0$ , 令  $x - 2y = 0$ ,  $8y - 8 = 0$ , 得  $x = 2, y = 1$ , 所以直线  $AB$  恒过定点  $(2, 1)$ .

教师如果在平时的教学中对切点弦的方法有所渗透, 学生就会更加流畅地解决本题, 做题时间也会更短. 希望笔者这一点一滴的反思能对大家有所帮助.

#### [参考文献]

- [1] 王丙凤. 高中数学系统解析: 解析几何[M]. 南京: 东南大学出版社, 2019.
- [2] 周顺钿. 常见曲线的切点弦方程[J]. 中等数学, 2009(3): 5-11.

(责任编辑 黄桂坚)