

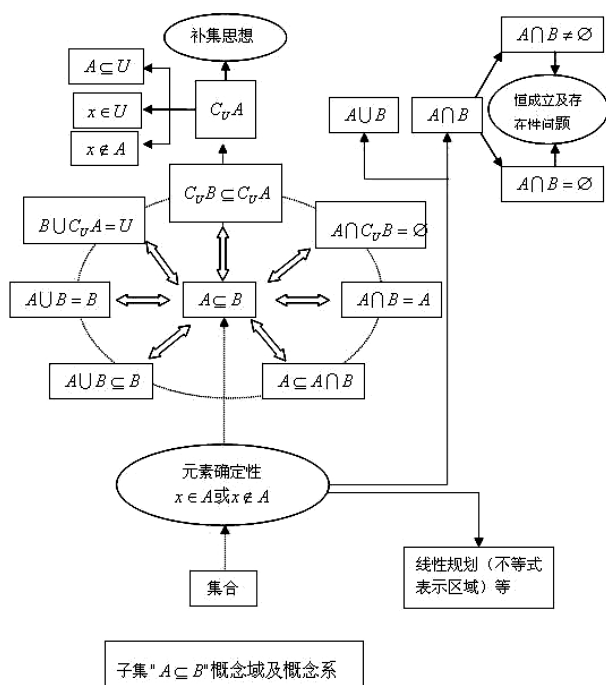


图1

3、重视元认知教学策略,提高学生自我监控能力

数学解题的认知结构是由解题知识结构、思维

结构和解题的元认知结构所组成。因此加强学生数学元认知能力的培养,有利于训练学生解决问题的“自醒意识”,避免走弯路或少走弯路,并能做好及时调节。一旦这种“自我监控能力”得到提高,就会从根本上改善学生的学习方式,学生个体“CPFS结构”的生成建构,便会由点到线、由线到面。同时,也会随着学生数学认识的提高和对数学实践的反思,对已有的“CPFS结构”进行动态调整、完善。所以,帮助学生提高元认知知识,丰富学生的元认知体验,指导学生调节与监控自己的学习过程,是教师日常教学中不应忽视的重要任务。

发展和完善学生的“CPFS结构”对学生的数学学习意义重大,对老师的教学提出更高的要求和挑战。对此,我们应不懈努力。

参考文献

- [1] 喻平. 数学学习心理的 CPFS 结构理论与实践[M]. 南宁:广西教育出版社,2008. 4.
- [2] 喻平. 数学教学心理学[M]. 北京:北京师范大学出版社,2010. 2.
- [3] 沈文选,杨清桃. 数学思想领悟[M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2008. 1.

抽象函数对称性的高三复习教学建议

江苏省溧阳中学 (213300) 徐 兰 徐 倩

高三复习除了帮助学生建构知识网络,熟悉基本题型之外,笔者认为最重要的是通过高三课堂加深学生对数学知识的认知,理解数学知识之间内在的结构和关联,理解知识的本质,从而提高解决数学问题的关键能力。本文从抽象函数来谈谈如何整合学生已有的知识经验来提升学生对抽象函数性质的深刻理解。

一、夯实落脚点——深刻理解旧知

高三复习首先要熟悉基本知识,但是不能停留在对知识的重复记忆上。学生经历了两年高中数学的学习,对知识的理解与刚学新知时的认知已经不一样,所以教师在复习这些旧知时,要高屋建瓴,以问题解决的形式来唤醒学生对知识的记忆与理解。以抽象函数的性质复习为例,学生已经初步具备图像语言,数学符号语言的相互转换即从直观想象、逻辑推理到用数学的眼光观察世界,用数学的语言

表达世界的能力。高三的课堂教学可以设计如下:

问题1 函数的奇偶性有哪些刻画方式?(图像语言、文字语言、数学符号语言)

问题2 谈谈对这三者之间的理解?

函数 $f(x)$ 的图像关于原点对称,该函数为奇函数,数学符号表达为 $f(-x) = -f(x)$ 。设 $p(x, y)$ 为函数 $f(x)$ 上任意一点,那么关于原点对称的点 $P(-x, -y)$ 也在函数图像上,即 $y = f(x)$, $\therefore -y = f(-x) = -f(x)$ 。函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称,该函数为偶函数,数学符号表达为 $f(-x) = f(x)$ 。设 $p(x, y)$ 为函数 $f(x)$ 上任意一点,那么关于 y 轴对称的点 $p(-x, y)$ 也在函数图像上,即 $y = f(-x)$, $\therefore y = f(-x) = f(x)$ 。函数的奇偶性统称为函数的对称性,奇函数和偶函数只是函数对称性中的一种特例。函数的对称性包含函数关于直线对称和关于点对称,我们这里只研究关于垂直于轴的直线对称。

二、由点连线——从旧知探新知

高三复习的目的是为了提高学生解决问题的能力,所以高三的课堂教学要能够从特殊到一般,寻找一般规律,从而提高学生的认知水平.函数的奇偶性就是对称性的特殊情况,从特殊推广到一般,加深学生对一般规律和数学知识本质的理解.

问题 3 函数关于直线 $x = a$ 对称,对应的图像和数学符号该如何表达?

问题 4 函数关于点 $p(a, b)$ 对称,对应的图像和数学符号该如何表达?

关于问题 3: 函数 $y = f(x)$ 图像关于 $x = a$ 对称,图像上任取一点 $p(x_0, y_0)$ 关于直线 $x = a$ 对称的点 $p_1(2a - x_0, y_0)$ 点仍旧在图像上,所以 $y_0 = f(x_0) = f(2a - x_0)$. 所以我们得到数学符号语言表示 $f(x) = f(2a - x)$. 如果取得点 $p(a - x, y)$, 那么关于直线 $x = a$ 对称的点 $p_1(a + x, y)$ 仍在图像上,所以 $f(a + x) = f(a - x)$, 所以我们发现函数关于直线对称的数学符号语言是不唯一的,进一步探究发现只要两个点的横坐标之和为 $2a$, 纵坐标相等就满足要求. 所以用数学符号语言来刻画可以有无数种,最具有代表性的是 $f(x) = f(2a - x)$ 和 $f(a + x) = f(a - x)$. 反之也成立. 用同样的思路来研究问题 4: 函数 $y = f(x)$ 图像关于点 $p(a, b)$ 对称,图像上任取一点 $Q(x_0, y_0)$ 关于点 $p(a, b)$ 对称点 $Q_1(2a - x_0, 2b - y_0)$ 也在函数图像上,那么 $y_0 = f(x_0)$, $2b - y_0 = f(2a - x_0)$, $\therefore f(x_0) + f(2a - x_0) = 2b$. 由此可见只要数学符号能够表达出这两个点的横坐标之和为 $2a$, 纵坐标之和为 $2b$, 都满足要求. 比如 $f(a + x) + f(a - x) = 2b$. 反之也成立. 这部分的问题设计体现了从特殊到一般的研究方法,图像语言、数学符号语言、以及文字语言之间的相互理解与转换,从直观想象到逻辑推理,对学生提升理解函数的性质,应用性质解决问题起了很大的作用.

结论一 如果函数关于直线 $x = a$ 对称,则 $f(a + x) = f(a - x)$, 反之也成立.

结论二 如果函数关于点 $p(a, b)$ 对称,则 $f(a + x) + f(a - x) = 2b$, 反之也成立.

问题 5 你是怎样理解人教版教材必修第一册 87 页上的拓广探究题,即求函数 $f(x) = x^3 - 3x^2$ 图像的对称中心.

人教版拓广探究题: 我们知道, 函数 $y = f(x)$ 的图像关于坐标原点成中心对称图形的充要条件是函数 $y = f(x)$ 为奇函数, 有同学发现可以将其推广为: 函数 $y = f(x)$ 的图像关于点 $p(a, b)$ 成中心对称图形的充要条件是函数 $y = f(x + a) - b$ 为奇函数. (1) 求函数 $f(x) = x^3 - 3x^2$ 图像的对称中心;

(2) 类比上述推广结论, 写出“函数 $y = f(x)$ 的图像关于轴成轴对称图形的充要条件是函数 $y = f(x)$ 为偶函数”的一个推广结论.

理解一: 应用图像平移变换来理解, 若函数 $y = f(x + a) - b$ 是奇函数, 则关于原点对称, 那么由 $y = f(x + a) - b$ 右移 a 个单位, 再上移 b 个单位, 得到函数 $y = f(x)$, 原来的对称中心 $(0, 0)$ 变成了新的对称中心 (a, b) , 反之, 同理成立;

理解二: 函数 $y = f(x)$ 的图像关于点 $p(a, b)$ 成中心对称图形, 那么 $f(x + a) + f(-x + a) = 2b$, 即 $f(-x + a) - b = -[f(x + a) - b]$, 所以函数 $y = f(x + a) - b$ 为奇函数. 反之, 如果 $y = f(x + a) - b$ 是奇函数, 则 $f(-x + a) - b = -[f(x + a) - b]$, 即 $f(x + a) + f(-x + a) = 2b$. 所以函数 $y = f(x)$ 的图像关于点 $p(a, b)$ 成中心对称图形. 得出结论三和结论四.

结论三 若函数是奇函数, 则函数的图像关于点成中心对称图形, 反之也成立.

结论四 若函数为偶函数, 则函数的图像关于成轴对称图形, 反之也成立. (证明同上).

解答问题 5:

法一: $f(x) = x^3 - 3x^2 = (x - 1)^3 - 3(x - 1) - 2$, 令 $g(x) = x^3 - 3x$, $g(x)$ 是奇函数, $f(x) = g(x - 1) - 2$, 所以 $f(x)$ 是 $g(x)$ 右移 1 个单位, 再下移 2 个单位得到, 对称中心为 $(1, -2)$.

法二: 设 $f(x)$ 的对称中心为 (a, b) , 则 $f(x + a) + f(-x + a) = 2b$ 对 $\forall x \in R$ 恒成立, 即 $(6a - 6)x^2 + 2a^3 - 6a^2 - 2b = 0$, 对任意 x 均成立, $\therefore 6a - 6 = 0$ 且 $2a^3 - 6a^2 - 2b = 0$, 解之 $a = 1, b = -2$.

三、编织出网——链接知识的交汇点

高三复习要建立知识网络, 老师要能够帮助学生找到知识之间的连接点, 内化学生所学的知识, 建构更广的知识结构图, 提升解决问题的能力.

问题 6 如果一个函数既有对称中心又有对称轴, 那么它还具有什么性质?

从直观上我们可以感知函数图像具有周期性, 从代数上我们可以给予证明: 如果函数 $f(x)$ 关于 $x = a$, 又有对称中心 (c, b) , 那么 $f(x) = f(2a - x)$, $f(x) = -f(2c - x) + 2b$, 即 $f(2a - 2c + x) = -f(x) + 2b$, 令 $t = 2a - 2c$, $f(t + x) = -f(x) + 2b$, $\therefore f(2t + x) = -f(t + x) + 2b = -[-f(x) + 2b] + 2b = f(x)$, $\therefore f(x)$ 的周期为 $T = 2|t| = 4|a - c|$. 这个证明得到下面的结论.

结论五 如果一个函数既有对称轴, 又有对称中心, 那么这个函数就有周期, 且周期是对称中心到对称轴距离的 4 倍. 周期的一半是相邻两条对称

轴之间的距离. 或者相邻两个对称中心之间的距离.

这个结论可以用基本函数 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 的图像直观感知.

高考真题呈现:

例 1 (2021 年全国高考甲卷数学试题) 设 $f(x)$ 是定义域为 R 的奇函数, 且 $f(1+x) = f(-x)$.

若 $f(-\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$, 则 $f(\frac{5}{3}) = (\quad)$.

A. $-\frac{5}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{5}{3}$

解析: $\because f(x)$ 是定义域为 R 的奇函数, $\therefore f(-x) = -f(x)$, 且 $f(1+x) = f(-x)$, $\therefore f(1+x) = -f(x)$, $\therefore f(2+x) = f(x)$, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 的周期 $T = 2$, $\therefore f(\frac{5}{3}) = f(\frac{5}{3} - 2) = f(-\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$.

点评: 函数 $f(x)$ 既有对称中心 $(0,0)$, 又有对称轴 $x = \frac{1}{2}$, 所以函数的周期为 2. 快速解决问题.

例 2 (2021 年全国高考甲卷数学试题) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 R , $f(x+1)$ 为奇函数, $f(x+2)$ 为偶函数, 当 $x \in [1,2]$ 时, $f(x) = ax^2 + b$. 若 $f(0) + f(3) = 6$, 则 $f(\frac{9}{2}) = (\quad)$.

A. $-\frac{9}{4}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{7}{4}$ D. $\frac{5}{2}$

解析: $\because$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 R , $f(x+1)$ 为奇函数, $\therefore f(-x+1) = -f(x+1)$, $f(x)$ 的对称中心为 $(1,0)$, $f(x+2)$ 为偶函数, $\therefore f(-x+2) = f(x+2)$, $\therefore f(x)$ 的对称轴为 $x = 2$; $\therefore f(x)$ 的周期 $T = 4$, $\therefore f(0) + f(3) = -f(2) + f(1) = -4a - b + (a + b) = -3a = 6$, $a = -2$; 又 $\because f(x)$ 的对称中心为 $(1,0)$, $\therefore f(1) = a + b = 0$, $\therefore b = 2$. $\therefore f(x) = -2x^2 + 2$, $\therefore f(\frac{9}{2}) = f(\frac{1}{2}) = -f(\frac{3}{2}) = \frac{5}{2}$.

点评: 本题使用函数的对称性, 周期性把所求函数值变换到已知区间 $[1,2]$ 即可.

例 3 已知 $f(x)$ 是定义域为 R 的函数, $f(x-2)$ 为奇函数, $f(2x-1)$ 为偶函数, 则 $\sum_{i=0}^{16} f(i) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解析: $\because f(x-2)$ 为奇函数, $\therefore f(x)$ 的对称中心为 $(-2,0)$. $\because f(2x-1)$ 为偶函数, $\therefore f(2x-1) = f(-2x-1)$, 即 $f(x-1) = f(-x-1)$, $f(x)$ 的对称轴为 $x = -1$. $\therefore f(x)$ 的周期 $T = 4$, $f(-2) = 0$, 因为 $f(x)$ 关于 $x = -1$ 对称, $\therefore f(0) = 0 = f(2) = f(4)$, 又 $(0,0), (2,0)$ 都是对称中心, 所以 $f(1) + f(3) = 0$, 所以 $\sum_{i=0}^{16} f(i) = f(0) + 4(f(1) + f(2) + f(3) +$

$f(4)) = 0$.

点评: 应用结论五我们画个草图也可以迅速把问题解决.

四、纵横成片 —— 提升解题关键能力

高三数学课堂是提升学生关键能力的主阵地. 关注通性通法固然重要, 但是更重要的是数学思想的渗透, 数学抽象的表达, 数学推理的完成, 这样才能提高学生的数学核心素养.

问题 7 人教版教材必修一 87 页上的拓广探究题的三次函数的对称中心, 与它与导函数有关联吗?

问题 8 如果原函数 $f(x)$ 具有对称性, 那么它的导函数是否也具有对称性?

如果原函数 $y = f(x)$ 关于 (a,b) 成中心对称, 则 $f(x+a) = -f(-x+a) + 2b$. 两边求导得 $f'(x+a) = [-f(-x+a) + 2b]'$, 即 $f'(-x+a) = f'(-x+a)$, 所以 $y = f'(x)$ 关于 $x = a$ 对称. 如果原函数 $f(x)$ 关于直线 $x = a$ 对称, 那么导函数又会又什么性质呢? $f(x) = f(2a-x)$, 两边求导得到 $f'(x) = -f'(2a-x)$, 即导函数关于 $(a,0)$ 中心对称. 反之是否也成立呢? 如果导函数 $y = f'(x)$ 关于 $x = a$ 对称, $\therefore f'(x+a) = f'(-x+a)$, $\therefore f(x+a) = -f(-x+a) + c$, 令 $x = 0$, $c = 2f(a)$, $\therefore f(x+a) + f(-x+a) = 2f(a)$, $\therefore$ 原函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(a, f(a))$ 对称. 如果导函数 $y = f'(x)$ 关于 $(a,0)$ 对称, 则 $f'(x) + f'(2a-x) = 0$, 令 $F(x) = f(x) - f(2a-x)$, $\therefore F'(x) = f'(x) + f'(2a-x) = 0$, $\therefore F(x) = c$ (c 为常数). 又 $F(a) = f(a) - f(2a-a) = 0$. $\therefore F(x) = 0 = f(x) - f(2a-x)$, $\therefore f(x) = f(2a-x)$, 从而函数 $f(x)$ 关于 $x = a$ 对称.

结论六 如果原函数 $y = f(x)$ 关于 (a,b) 成中心对称, 那么导函数 $y = f'(x)$ 关于 $x = a$ 对称; 如果原函数 $f(x)$ 关于直线 $x = a$ 对称, 那么导函数 $y = f'(x)$ 关于 $(a,0)$ 成中心对称.

结论七 如果导函数 $y = f'(x)$ 关于 $x = a$ 对称, 那么原函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(a, f(a))$ 成中心对称; 如果导函数 $y = f'(x)$ 关于 $(a,0)$ 对称, 那么原函数 $f(x)$ 的图像关于 $x = a$ 对称. 有了这些结论, 我们研究三次函数的对称中心, 只需要求导出导函数的对称轴就行了, 函数 $f(x) = x^3 - 3x^2$ 图像的对称中心, $f'(x) = 3x^2 - 6x$, 对称轴为 $x = 1$, 所以原函数的对称中心为 $(1, -2)$.

例 4 (2022 年全国卷 I 高考题) 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 R , 记 $g(x) = f'(x)$. 若 $f(\frac{3}{2} - 2x), g(2+x)$ 均为偶函数, 则 $(\quad)$.

$$A. f(0) = 0 \quad B. g(-\frac{1}{2}) = 0$$

$$C. f(-1) = f(4) \quad D. g(-1) = g(2)$$

解析: 因为 $f(\frac{3}{2}-2x), g(2+x)$ 均为偶函数, 所以 $f(\frac{3}{2}-2x) = f(\frac{3}{2})$, $g(2-x) = g(2+x)$. $\therefore f(x)$ 的对称轴为 $x = \frac{3}{2}$, $g(x)$ 的对称轴为 $x = 2$, 可知选项 C 正确. 又 $\because g(x) = f'(x)$, $\therefore$ 由原函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x = \frac{3}{2}$, 得到导函数 $g(x)$ 的对称中心为 $(\frac{3}{2}, 0)$. 由导函数 $g(x)$ 的对称轴为 $x = 2$, 得到原函数 $y = f(x)$ 的对称中心为 $(2, f(2))$, $f(x)$ 的周期为 2, $(0, f(0))$ 是函数 $f(x)$ 的对称中心, 但 $f(0)$ 的值不确定, 选项 A 错误. $\therefore g(x)$ 的周期为 2, $g(-\frac{1}{2}) = g(\frac{3}{2}) = 0$. 选项 B 正确. 选项 D 中 $g(-1) = g(1) = -g(2)$, 所以选项 D 错误. 故本题选 B、C.

五、汇聚成面——数学思维的飞跃

数学教学以培养和发展学生思维能力为目的, 能力的考察是高考永恒的主题. 高三数学课堂要充分挖掘课本中习题的价值, 从知识的点展开延伸出线, 再由条条线织出片, 充分展示出知识的内在联系以及数学的逻辑美.

例 5 (2022 年全国高考卷) 已知函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域均为 R , 且 $f(x) + g(2-x) = 5$, $g(x) - f(x-4) = 7$. 若 $y = g(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称, $g(2) = 4$, 则 $\sum_{k=1}^{22} f(k) = (\quad)$.

$$A. -21 \quad B. -22 \quad C. -23 \quad D. -24$$

解析: $\because f(x) + g(2-x) = 5$ ①, $g(2) = 4$, $\therefore f(0) = 1$, $\because y = g(x)$ 的图像关于直线 $x = 2$ 对称, $\therefore g(2-x) = g(2+x)$, $\therefore f(-x) + g(2+x) = 5$, 结合 ① 得 $f(-x) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数, 又 $\because g(x) - f(x-4) = 7$, $\therefore g(2-x) - f(-2-x) = 7$. 结合 ①, 得到 $f(x) + f(-2-x) = -2$, $\therefore f(x)$ 的对称中心为 $(-1, -1)$, 函数 $f(x)$ 的周期为 $T = 4$. $\therefore f(-1) = -1 = f(1) = f(3)$, $f(0) + f(2) = -2$, $\therefore f(2) = -3$, $f(4) = f(0) = 1$, $\sum_{k=1}^{22} f(k) = 5(f(1)$

$+ f(2) + f(3) + f(4)) + f(1) + f(2) = 5(-1 - 3 - 1 + 1) - 1 - 3 = -24$. 故选 D.

例 6 设定义在 R 上的函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的导函数分别为 $f'(x), g'(x)$. 若 $f(x+2) - g(1-x) = 2$, $f(x) = g(x+1)$, 且 $g(x+1)$ 为奇函数, 则下列说法中一定正确的是().

$$A. g(1) = 0 \quad B. \text{函数 } g'(x) \text{ 的图像关于 } x = 2 \text{ 对称}$$

$$C. \sum_{k=1}^{2022} g(k) = 0 \quad D. \sum_{k=1}^{2021} f(k)g(k) = 0$$

解析: $\because g(x+1)$ 为奇函数, $\therefore g(x)$ 的对称中心是 $(1, 0)$, $\therefore g(1) = 0$. A 选项正确. 对 $f(x+2) - g(1-x) = 2$ 两边求导, $f'(x+2) + g'(1-x) = 0$, $\therefore g'(x+3) + g'(1-x) = 0$, $\therefore$ 函数 $g(x)$ 的图像关于 $(2, 0)$ 对称. 由结论 5, 可得函数 $g(x)$ 关于直线 $x = 2$ 对称, $\therefore$ 函数 $g(x)$ 的周期, $T = 4$, $\therefore (3, 0)$ 是函数 $g(x)$ 的对称中心. $\sum_{k=1}^{2022} g(k) = 505(g(1) + g(2) + g(3) + g(4)) + g(1) + g(2)$. $\because g(1) = g(3) = 0, g(2) + g(4) = 0$, $\therefore \sum_{k=1}^{2022} g(k) = g(2)$ 而 $g(2)$ 不确定, 所以 C 错误. $\because f(x+2) = 2 + g(1-x)$, $\therefore f(x) = 2 + g(3-x)$, 又 $\because f(x+4) = 2 + g(-x-1) = 2 + g(3-x) = f(x)$, $\therefore f(x)$ 的周期 $T = 4$, 所以 $\sum_{k=1}^{2021} f(k)g(k) = 505(f(1)g(1) + f(2)g(2) + f(3)g(3) + f(4)g(4)) + f(1)g(1)$. $\because f(2) = 2 + g(1) = 2, f(4) = 2 + g(-1) = 2 + g(3) = 2, f(1)g(1) + f(2)g(2) + f(3)g(3) + f(4)g(4) = 0 + f(2)(g(2) + g(4)) = 0$. $\therefore f(1)g(1) = 0$, 所以 $\sum_{k=1}^{2021} f(k)g(k) = 0$. 故选 A、D.

高考试题源于课本, 但是又高于课本, 高三复习课教师要充分整合多种教材资源, 利用好课本习题的价值, 充分它们的内涵和外延, 课堂中尽可能给学生提供创新的情境, 从点、线、片、面的角度纵横知识之间的联系, 构建交错网络, 再结合典型例题来提升学生解决数学问题的关键能力, 学生在这样的课堂中能感受到高考数学核心素养的落脚点在哪里, 从而提升学生数学学习的自信心, 也能更好地引导学生如何自主学习, 提升自己的数学素养.