

单位代码	10602
学号	2021011694
分类号	G633.6
密级	公开



广西师范大学
GUANGXI NORMAL UNIVERSITY

硕士专业学位论文

高中生数学批判性思维倾向、数学元认知与数学
学业成绩的关系研究

A Study on the Relationship between High School Students' Tendency
to Think Critically in Mathematics, Mathematics Metacognition and
Academic Performance in Mathematics

学院(部)：数学与统计学院

学位类别：教育硕士专业学位

专业领域：学科教学(数学)

年 级：2021 级

研 究 生：余姗姗

指导教师：卢家宽教授

完成日期：2023 年 6 月

高中生数学批判性思维倾向、数学元认知与数 学学业成绩的关系研究

专业名称：学科教学（数学）

申 请 人：余姗姗

指导教师：卢家宽

论文答辩委员会

主席：孔祥忠

委员：石红忠

吕英俊

钟晓华

李军

高中生数学批判性思维倾向、数学元认知与数学学业成绩的关系研究

研究生姓名：余姗姗

导师姓名：卢家宽

学科：学科教学（数学）

研究方向：数学课程与教学论

年级：2021 级

中文摘要

素质教育是我国教育的核心，以培养学生的创新精神为重，要求学生学会学习。数学作为一门科学，与创新紧密相连，而批判正是创新的基础和前提，数学思维的严谨性和开放性也为批判性思维的培养奠定了基础。并且，元认知能够监控和调节学生的数学学习活动，帮助学生找到合适的学习策略，从学会过渡到会学。由此看来，数学批判性思维和数学元认知的培养迫在眉睫。

目前，已有大量研究证实了数学批判性思维和数学元认知二者均与数学学业成绩存在正相关关系，至于二者之间的关系，仅有少数学者从理论层面探讨，尚无学者通过实证研究对其进行深入研究。再者，思维技能的训练必须立足于思维倾向，因此在数学教育的过程中更应该重视数学批判性思维倾向的形成。鉴于此，本研究以高中生为研究对象，通过实证研究揭示数学批判性思维倾向、数学元认知与数学学业成绩三者之间的关系及其作用机制，并研究相关教学案例，探讨其教学价值，从而总结出益于提升高中生数学思维能力和学业成绩的教学启示。

首先，本研究通过系统梳理文献，明晰数学批判性思维倾向、数学元认知与数学学业成绩之间的逻辑关系，建立以数学元认知作为自变量，数学学业成绩作为因变量，数学批判性思维倾向及其各维度为中介变量的结构方程模型，并提出研究问题和研究假设。

其次，本研究采用《高中生数学批判性思维倾向和数学元认知的调查问卷》对柳州市某两所高中的 503 名高中生开展问卷调查，并使用 Excel 收集数据，运用 SPSS25.0 和 AMOS24.0 软件对量表进行项目分析、探索性因素分析、验证性因素分析和信度分析，结果表明量表的信效度均可接受。接着，再次运用 SPSS25.0 和 AMOS24.0 软件进行现状分析、差异性分析、相关性分析和中介效应分析，以了解高中生数学批判性思维倾向和数学元认知的现状，分析三个变量之间的相关性，检验数学批判性思维倾向及其各维度在数学元认知与数学学业成绩之间的中介作用，进而明确三个变量之间的关系和作用路径，验证相应的研究假设。最后，研究在数学课堂中培养学生数学批判性思维倾向和数学元认知的教学案例，探讨其教学价值。所得研究结论为：（1）

总体上，高中生的数学批判性思维倾向和数学元认知整体均处于中等偏上水平。（2）高中生数学批判性思维倾向在性别、年级、数学学业成绩、学生干部、班主任、数学喜爱程度上均存在显著差异；高中生数学元认知在性别、年级、数学学业成绩、班主任、数学喜爱程度上均存在显著差异，在学生干部上不存在显著差异。（3）数学批判性思维倾向、数学元认知及其各维度与数学学业成绩任意两者之间呈显著正相关。（4）数学元认知对数学学业成绩具有正向预测作用；数学批判性思维倾向对数学学业成绩具有正向预测作用。（5）数学批判性思维倾向及其各维度在数学元认知与数学学业成绩之间起中介作用。

最后，本研究从研究结论中总结出利于发展高中生数学批判性思维倾向和数学元认知的教学启示，为提升高中生的数学思维能力和学业成绩提供新视角。具体而言，在发展高中生数学批判性思维倾向方面，数学教师应（1）将数学教育目光转向教会学生思维，增强学生批判意识；（2）营造轻松、民主、开放的学习情境，激活学生数学热情。在培养高中生数学元认知方面，数学教师应（1）渗透数学思想方法，加强数学元认知知识的指导；（2）创设积极体验情境，重视数学元认知体验的调控作用；（3）唤醒学生自我意识，提高数学元认知监控能力。

关键词：高中生；数学批判性思维倾向；数学元认知；数学学业成绩

A Study on the Relationship between High School Students' Tendency to Think Critically in Mathematics, Mathematics Metacognition and Academic Performance in Mathematics

Graduate student: Yu Shanshan

Supervisor: Lu Jiakuan

Major: Subject Teaching (Mathematics)

Research direction: Mathematics curriculum and teaching theory

Grade: 2021

Abstract

Quality education is at the heart of our education, with a focus on cultivating students' innovative spirit and requiring them to learn. As a science, mathematics is closely linked to innovation, and criticism is the basis and prerequisite for innovation. The rigour and openness of mathematical thinking also lay the foundation for the cultivation of critical thinking. Moreover, metacognition can monitor and regulate students' mathematical learning activities, helping them to find appropriate learning strategies and make the transition from learning to learning. The development of critical thinking and metacognition in mathematics is therefore urgent.

At present, a large number of studies have confirmed the positive relationship between critical thinking and metacognition in mathematics and academic achievement in mathematics, but only a few scholars have explored the relationship between the two at a theoretical level. Furthermore, the training of thinking skills must be based on thinking dispositions, and therefore the formation of critical thinking dispositions in mathematics should be given more emphasis in the process of mathematics education. Given this, this study uses high school students as the target population to reveal the relationship between critical thinking dispositions, mathematical metacognition, and academic performance in mathematics and their mechanisms of action through empirical research, and to examining relevant teaching examples to explore their pedagogical value. From these findings, pedagogical insights are drawn to enhance the thinking skills and academic performance of senior secondary school students.

Firstly, this study systematically reviews the literature to clarify the logical relationship between critical thinking disposition, mathematical metacognition, and

academic achievement in mathematics, establishes a structural equation model with mathematical metacognition as the independent variable, academic achievement in mathematics as the dependent variable, and critical thinking disposition and its dimensions as mediating variables, and proposes research questions and research hypotheses.

Secondly, this study used the Questionnaire on Mathematical Critical Thinking Tendencies and Mathematical Metacognition of High School Students to conduct a questionnaire survey on 503 high school students from one or two high schools in Liuzhou City and used Excel to collect the data and applied SPSS25.0 and AMOS24.0 software to conduct item analysis, exploratory factor analysis, validation factor analysis, and reliability analysis on the scale, and the results showed that the scale's reliability and validity were acceptable. Then, SPSS 25.0 and AMOS 24.0 software were used again to conduct the analysis of status quo, analysis of variance, correlation analysis, and mediation effect analysis to understand the current situation of mathematics critical thinking disposition and mathematics metacognition among high school students, to analyse the correlation between the three variables, to test the mediation role of mathematics critical thinking disposition and its dimensions between mathematics metacognition and mathematics academic performance, and thus The study also identified the relationships and pathways between the three variables and tested the corresponding research hypotheses. Finally, examples of teaching and learning that develop students' dispositions to critical thinking in mathematics and mathematical metacognition in the mathematics classroom are examined to explore their pedagogical value. The findings are: (1) Overall, senior secondary students' critical thinking dispositions and mathematical metacognition are both at an average to a high level. (2) There were significant differences in high school students' tendency to think critically in mathematics in terms of gender, grade level, academic achievement in mathematics, student leaders, classroom teachers, and enjoyment of mathematics; and there were significant differences in high school students' metacognition in terms of gender, grade level, academic achievement in mathematics, classroom teachers, and enjoyment of mathematics, but not in terms of student leaders. (3) There was a significant positive correlation between critical thinking disposition in mathematics, mathematics metacognition and its dimensions, and academic achievement in mathematics in any of the two. (4) Mathematical metacognition was a positive predictor of academic achievement in mathematics, and the tendency to think critically in mathematics was a positive predictor of academic achievement in mathematics. (5) Critical thinking disposition and its dimensions mediated the relationship between mathematical metacognition and academic

achievement in mathematics.

Finally, this study draws out pedagogical implications from the findings of the study that are conducive to the development of mathematics critical thinking dispositions and mathematics metacognition in high school students, providing new perspectives to enhance their mathematical thinking skills and academic performance. Specifically, in developing senior secondary students' critical thinking dispositions in mathematics, mathematics teachers should (1) turn their attention to mathematics education to teach students to think and enhance their critical awareness; and (2) create a relaxed, democratic, and open learning environment to activate students' enthusiasm for mathematics. In terms of developing mathematical metacognition in senior secondary students, mathematics teachers should (1) permeate mathematical thinking methods and strengthen the guidance of mathematical metacognitive knowledge; (2) create positive experiential contexts and attach importance to the regulatory role of mathematical metacognitive experiences; and (3) awaken students' self-awareness and improve their ability to monitor mathematical metacognition.

Key Words: High school students; Critical thinking disposition in mathematics; Mathematical metacognition; Academic performance in mathematics

目录

中文摘要	I
Abstract	III
第 1 章 绪论	1
1.1 研究背景	1
1.1.1 基于我国发展素质教育的时代背景	1
1.1.2 基于国内数学教育领域中有待完善的理论背景	2
1.1.3 基于亟需解决的现实诉求	2
1.2 研究问题	3
1.3 研究意义	4
1.3.1 理论意义	4
1.3.2 实践意义	4
1.4 研究方法	5
1.5 研究思路	6
第 2 章 文献综述	8
2.1 数学批判性思维倾向的研究综述	8
2.1.1 数学批判性思维倾向的概念	8
2.1.2 数学批判性思维倾向的测量工具	13
2.1.3 数学批判性思维倾向的研究现状	15
2.1.4 数学批判性思维倾向的培养策略	17
2.2 数学元认知的研究综述	20
2.2.1 数学元认知的概念及结构	20
2.2.2 数学元认知的测量工具	24
2.2.3 数学元认知的研究现状	25
2.3 数学批判性思维与数学元认知关系的研究综述	27
2.4 概念界定	28
2.4.1 数学批判性思维倾向	28
2.4.2 数学元认知	29
2.4.3 数学学业成绩	29
2.5 研究假设	29
2.6 小结与思考	30
第 3 章 研究设计	32

3.1 调查问卷的设计	32
3.1.1 高中生数学批判性思维倾向量表	32
3.1.2 高中生数学元认知量表	32
3.1.3 高中生数学学业成绩	32
3.2 预调查	33
3.2.1 研究对象	33
3.2.2 研究工具	33
3.2.3 预调查问卷的施测	35
3.2.4 预调查量表的分析	35
3.3 正式调查	48
3.3.1 研究对象	48
3.3.2 研究工具	49
3.3.3 正式调查问卷的施测	50
3.3.4 正式调查量表的分析	50
3.4 数据处理	60
3.5 共同方法偏差检验	60
第4章 研究结果	62
4.1 高中生数学批判性思维倾向的现状	62
4.1.1 高中生数学批判性思维倾向的总体水平	62
4.1.2 高中生数学批判性思维倾向的差异性分析	63
4.2 高中生数学元认知的现状	68
4.2.1 高中生数学元认知的总体水平	68
4.2.2 高中生数学元认知的差异性分析	69
4.3 相关性分析结果	78
4.3.1 三变量之间的相关分析	78
4.3.2 三变量各维度之间的相关分析	78
4.4 中介效应检验	79
4.4.1 数学元认知对数学学业成绩的总效应检验	80
4.4.2 数学批判性思维倾向在数学元认知和数学学业成绩之间的中介效应检验	82
4.4.3 数学批判性思维倾向各维度在数学元认知和数学学业成绩之间的中介效应检验	84
第5章 分析与讨论	88
5.1 高中生数学批判性思维倾向现状的分析	88

5.1.1 高中生数学批判性思维倾向总体水平的分析	88
5.1.2 高中生数学批判性思维倾向的差异性分析	88
5.2 高中生数学元认知现状的分析	90
5.2.1 高中生数学元认知总体水平的分析	90
5.2.2 高中生数学元认知的差异性分析	91
5.3 高中生数学批判性思维倾向、数学元认知与数学学业成绩关系的分析	93
5.3.1 数学批判性思维倾向与数学元认知关系的分析	93
5.3.2 数学批判性思维倾向与数学学业成绩关系的分析	93
5.3.3 数学元认知与数学学业成绩关系的分析	94
5.3.4 中介效应分析	94
第 6 章 教学案例研究	96
6.1 《余弦定理》教学案例	96
6.2 《余弦定理》教学反馈	102
6.3 本章小结	103
第 7 章 研究结论与反思	105
7.1 研究结论	105
7.2 教学启示	106
7.2.1 发展高中生数学批判性思维倾向的启示	106
7.2.2 培养高中生数学元认知的启示	107
7.3 研究不足与展望	109
参考文献	110
附录 1 高中生数学批判性思维倾向和数学元认知的调查问卷（初始卷）	118
附录 2 高中生数学批判性思维倾向和数学元认知的调查问卷（正式卷）	122
致谢	
论文独创性声明	
论文使用授权声明	

图表目录

图 1-1 研究思路图	6
图 2-1 研究假设模型简图	30
图 3-1 高中生数学批判性思维倾向量表的结构模型	54
图 3-2 高中生数学批判性思维倾向量表的修正结构模型	55
图 3-3 高中生数学元认知量表的结构模型	57
图 3-4 高中生数学元认知量表的修正结构模型	58
图 4-1 中介模型示意图	80
图 4-2 数学元认知对数学学业成绩的总效应模型 M1	81
图 4-3 以数学批判性思维倾向为中介变量的简单中介模型 M2 预设图	82
图 4-4 以数学批判性思维倾向为中介变量的简单中介模型 M2 修正图	83
图 4-5 以数学批判性思维倾向为中介变量的简化模型图	84
图 4-6 以数学批判性思维倾向各维度为中介变量的并行多重中介模型 M3 预设图	84
图 4-7 以数学批判性思维倾向各维度为中介变量的并行多重中介模型 M3 修正图	85
图 4-8 以数学批判性思维倾向各维度为中介变量的简化模型图	87
图 6-1 修建过山隧道例题图	97
图 6-2 学生 1 的方案设想图	97
图 6-3 学生 4 的方案设想图	98
图 6-4 根据隧道问题抽象而来的三角形 ABC	98
图 6-5 学生 5 的解题思路图	99
图 6-6 学生 7 的解题思路图	100
表 2-1 数学批判性思维倾向各维度的操作性定义	13
表 2-2 数学元认知各一级维度的操作性定义	23
表 2-3 数学元认知各二级维度的操作性定义	23
表 2-4 研究假设	30
表 3-1 预调查对象基本信息统计表	33
表 3-2 高中生数学批判性思维倾向量表预调查的结构和题目分布	34
表 3-3 高中生数学元认知量表预调查的结构和题目分布	34
表 3-4 高中生数学批判性思维倾向量表独立样本 t 检验结果	36

表 3-5 高中生数学元认知量表独立样本 t 检验结果	36
表 3-6 高中生数学批判性思维倾向量表题项与总分的相关系数	37
表 3-7 高中生数学元认知量表题项与总分的相关系数	38
表 3-8 高中生数学批判性思维倾向量表的项总计统计结果	38
表 3-9 高中生数学元认知量表的项总计统计结果	39
表 3-10 高中生数学批判性思维倾向量表的共同性和因素负荷量	40
表 3-11 高中生数学元认知量表的共同性和因素负荷量	41
表 3-12 两个量表项目分析结果统计表	42
表 3-13 高中生数学批判性思维倾向量表各维度的 KMO 与 Bartlett's 检验结果	43
表 3-14 高中生数学批判性思维倾向量表探索性因素分析结果	43
表 3-15 高中生数学元认知量表各维度的 KMO 与 Bartlett's 检验结果	44
表 3-16 高中生数学元认知知识维度的探索性因素分析结果	45
表 3-17 高中生数学元认知体验维度的探索性因素分析结果	45
表 3-18 高中生数学元认知监控维度的探索性因素分析结果	46
表 3-19 高中生数学批判性思维倾向量表及各维度信度分析	47
表 3-20 高中生数学元认知量表及各维度信度分析	48
表 3-21 正式调查对象基本信息统计表	48
表 3-22 高中生数学批判性思维倾向量表正式调查的结构和题目分布	49
表 3-23 高中生数学元认知量表正式调查的结构和题目分布	50
表 3-24 两个量表的 KMO 与 Bartlett's 检验结果	51
表 3-25 高中生数学批判性思维倾向量的探索性因素分析结果	51
表 3-26 高中生数学批判性思维倾向量表正式调查最终题目分布	53
表 3-27 高中生数学批判性思维倾向量表模型拟合结果	55
表 3-28 高中生数学批判性思维倾向量表收敛效度检验结果	56
表 3-29 高中生数学元认知量表模型拟合结果	57
表 3-30 高中生数学元认知量表收敛效度检验结果	58
表 3-31 高中生数学批判性思维倾向量表及各维度的信度分析	59
表 3-32 高中生数学元认知量表及一级维度信度分析	60
表 3-33 共同方法偏差检验结果	61
表 4-1 高中生数学批判性思维倾向总分的描述性统计	62
表 4-2 高中生数学批判性思维倾向水平划分及统计情况	62
表 4-3 高中生数学批判性思维倾向及各维度平均分的描述性统计	63
表 4-4 高中生数学批判性思维倾向的性别差异	63
表 4-5 高中生数学批判性思维倾向的年级差异	64

表 4-6 高中生数学批判性思维倾向的数学学业成绩差异	65
表 4-7 高中生数学批判性思维倾向的学生干部差异	66
表 4-8 高中生数学批判性思维倾向的班主任差异	66
表 4-9 高中生数学批判性思维倾向的数学喜爱程度差异	67
表 4-10 高中生数学元认知总分的描述性统计	68
表 4-11 高中生数学元认知水平划分及统计情况	68
表 4-12 高中生数学元认知及各维度平均分的描述性统计	69
表 4-13 高中生数学元认知的性别差异	69
表 4-14 高中生数学元认知的年级差异	70
表 4-15 高中生数学元认知及一级维度的数学学业成绩差异	71
表 4-16 高中生数学元认知二级维度的数学学业成绩差异	72
表 4-17 高中生数学元认知的学生干部差异	74
表 4-18 高中生数学元认知的班主任差异	75
表 4-19 高中生数学元认知及一级维度的数学喜爱程度差异	76
表 4-20 高中生数学元认知二级维度的数学喜爱程度差异	77
表 4-21 三变量之间的相关分析结果	78
表 4-22 三变量各维度之间的相关分析结果	79
表 4-23 数学元认知对数学学业成绩的总效应模型拟合结果	81
表 4-24 数学元认知对数学学业成绩的路径检验	81
表 4-25 数学元认知对数学学业成绩的总效应检验	81
表 4-26 以数学批判性思维倾向为中介变量的简单中介模型拟合结果	82
表 4-27 以数学批判性思维倾向为中介变量模型的路径检验	83
表 4-28 以数学批判性思维倾向为中介变量模型的中介效应检验	84
表 4-29 以数学批判性思维倾向各维度为中介变量的并行多重中介模型拟合结果	85
表 4-30 以数学批判性思维倾向各维度为中介变量模型的路径检验	85
表 4-31 以数学批判性思维倾向各维度为中介变量模型的中介效应检验	86
表 4-32 研究假设检验结果	87

第 1 章 绪论

1.1 研究背景

1.1.1 基于我国发展素质教育的时代背景

素质教育是我国教育的核心,以培养学生创新精神和实践能力为重点,相较于“应试教育”而言,素质教育更加注重创新,而批判是创新的基础和前提,创新是批判的结果。2021 年 6 月,中共教育部党组发布《关于教育系统深入学习贯彻习近平总书记在两院院士大会、中国科协第十次全国代表大会上重要讲话精神的通知》,其中提到培养高水平的创新型人才,要求更加重视学生批判性思维的培养,树立创新志向^①,由此可知批判性思维对于培养创新型人才的重要性。钟启泉教授亦曾指出,当代学校教育应由 20 世纪培养“记忆者”转型为 21 世纪培养“探究者”“思考者”,努力冲破“应试教育”观念与体制的束缚,解决这些问题的关键就在于培养批判性思维^②。数学作为一门科学,与创新紧密相连,且数学思维的严谨性和开放性为批判性思维的培养奠定了基础。尤其在高中阶段,由于数学难度的加深和高考的压力,高中生往往接受的是“应试教育”,提高的是“应试素质”,很大程度上忽略了批判性思维的培养,与素质教育相背而行。另外,《普通高中数学课程标准(2017 版)》中也明确提出高中数学课程应以学生发展为本,培育科学精神和创新意识,提升数学学科核心素养^③。由此可见,关注学生数学批判性思维水平,能够打破“应试教育”的思想桎梏,培育创新型人才,顺应了素质教育和课程标准的要求。因此,对于高中生数学批判性思维的研究势在必行。

同时,素质教育聚焦学生的全面发展,注重学生的主观能动性和创造性的发展,不仅要求学生学会,还要求学生会学,学会学习不仅是数学学科核心素养形成的有效途径,还是数学学科核心素养的综合体现^④。而元认知作为一种高级心理机能,能够调动学生的积极主动性、自觉性,使其充分发挥主体作用。此外,元认知还能够监控和调节学生的数学学习活动,帮助学生合理探寻学习数学的策略与方法,从学会过渡到会学,体会到数学学习的乐趣,使其终身受益。因此,对高中生数学元认知的培养,紧密贴合了我国发展素质教育的时代要求。

^① 中共教育部党组关于教育系统深入学习贯彻习近平总书记在两院院士大会、中国科协第十次全国代表大会上重要讲话精神的通知[EB/OL].http://www.moe.gov.cn/srcsite/A16/s7062/202106/t20210611_537472.html,2021-06-10.

^② 钟启泉.批判性思维:概念界定与教学方略[J].全球教育展望,2020,49(01):3-16.

^③ 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017 年版)[M].北京:人民教育出版社,2018.

^④ 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017 年版)[M].北京:人民教育出版社,2018.

1.1.2 基于国内数学教育领域中有待完善的理论背景

通过查阅与“批判性思维”和“元认知”相关文献可知,众多学者所得研究结果均表明,批判性思维和元认知都与数学学业成绩相关。例如,朱展霖以高中生为研究对象,经实证调查研究发现,数学学业成绩越高,数学批判性思维倾向越强^①。喻平的研究结果表明元认知对数学成绩有显著影响,成绩越优秀元认知水平越高^②。谢云天认为高分组的学生与中间组、低分组的学生相比,拥有更多的元认知知识,对自身数学问题解决能力更加自信,能够有条理的运用学习策略,因此数学成绩也更高^③。对于批判性思维和元认知的关系,仅有少数学者从理论和实证层面上对其进行了论述。例如,罗英从差异性和相通性出发,分别探讨了批判性思维与元认知的关系,认为二者的思维对象、特性和过程均有所不同,但对于现实的反思性、过往的超越性以及未来的建构性上具有相通性。她还指出批判性思维与元认知相互作用,二者的有机融合有利于科学思维的形成、实现深层次学习。其中,元认知是批判性思维认知构建的基础,而批判性思维是元认知发展的集中体现,二者是相辅相成的^④。至于在数学教育领域中三者之间的关系具体如何,至今尚无学者通过实证研究进行论证。基于以上研究背景,本研究将在我国数学教育领域中通过实证研究,进一步探讨数学批判性思维、数学元认知以及数学学业成绩之间的关系和作用机制,如此既能丰富批判性思维、元认知的相关研究成果,亦能促进数学教育的发展。

1.1.3 基于亟需解决的现实诉求

高考考查的重点,亦是教育教学改革的方向。2020年,教育部考试中心命题专家指出,数学科高考试题注重对批判性思维能力的考查,主要考查学生独立思考能力、推理判断能力、灵活运用知识的综合能力以及分析问题、解决问题的能力^⑤。不难看出,数学批判性思维在数学科高考中的重要地位,将其纳入我国考试评价领域,正是现实的迫切需要^⑥。

再者,我国几千年来中庸和顺从的社会文化,以及唯分数论的“应试教育”文化的长期荼毒,不利学生个体心理的健康发展。目前,国家依然在努力改变此现象,积极落实素质教育,关注个体心理发展,它是自主建构和价值引导之间的对立统一^⑦。其中,批判性思维在个体心理发展中的作用在于,让学生在教育所提供的发展空间中

^① 朱展霖. 高中生数学批判性思维倾向、数学学习策略与数学学业成绩的关系研究[D]. 华中师范大学, 2021.

^② 喻平. 中学生自我监控能力和 CPFS 结构对数学学业成绩的影响[J]. 数学教育学报, 2004(01): 23-26+35.

^③ 谢云天, 史滋福, 钟婷, 张卫. 不同数学学业成绩初中生在元认知上的比较: 基于 NVivo 的质性分析[J]. 教育研究与实验, 2021(02): 86-91.

^④ 罗英. 批判性思维与元认知的关系探析[J]. 教育理论与实践, 2019, 39(23): 3-5.

^⑤ 突出理性思维 重视数学本质——教育部考试中心命题专家解析二〇二〇年高考数学试题[EB/OL]. http://www.moe.gov.cn/jyb_xwfb/s5147/202007/t20200708_470733.html, 2020-07-8.

^⑥ 吴妍. 为“什么”而考: 高考考查批判性思维的问题反思[J]. 中国教育科学(中英文), 2022, 5(02): 88-94+134.

^⑦ 刘儒德. 论批判性思维的意义和内涵[J]. 高等师范教育研究, 2000(01): 56-61.

进行独立思考、自主判断和审慎选择，鼓励学生主体性、独特性的形成。元认知的作用则在于整体监控学生的学习活动过程，指导、调节学生的认知以及认知过程，使其批判性地、反思性地理解和吸收有效信息，促使学生朝着成功前进。可以看出，二者对于个体心理发展的作用是相辅相成的。然而在实际教学中，教师和学生都缺乏对批判性思维和元认知的关注，二者处于一种被冷落的状态。教师只关注学生对数学概念、定理是否理解，对数学解题方法是否掌握，所写答案是否正确，既不关心所教数学知识的真实性和现实价值，也不关心学生内化知识和理性反思的过程，即便是死记硬背也视若无睹，常常出现“注入式”的教学模式。学生则把教师看作知识的权威者，将书本上的内容定为金科玉律，不敢质疑。长期以来，学生面对海量信息无从下手，对自己的观点与选择缺乏自信，逐渐形成惰性思维，丧失学习的主体地位，成为学习的奴隶和知识的接收器。

这些现状阻碍了学生创新能力的培养，不利于学生未来的发展以及数学教育的革新。因此，忽视学生数学批判性思维和数学元认知发展的问题亟待解决。本研究将通过实证调查研究，明确数学批判性思维倾向、数学元认知和数学学业成绩三者之间的关系以及作用机制，并提出适合高中生批判性思维和数学元认知发展的有效策略，这在一定程度上能够帮助一线教师了解并改变学生现状，提高学生数学思维能力，促使数学学科核心素养的发展“落地生根”。

1.2 研究问题

基于国家的时代背景、数学教育领域中有待完善的理论背景和亟待解决的现实诉求，本研究将从高中生的角度出发，通过问卷调查探究高中生数学批判性思维倾向、数学元认知和数学学业成绩三者间的关系。以了解高中生数学批判性思维倾向和数学元认知的现状，探究两者在人口学变量上的差异，检验数学批判性思维倾向在数学元认知与数学学业成绩之间的中介作用，明确三者之间的关系及其影响机制，以及探讨出有利于提升高中生数学批判性思维倾向和数学元认知水平的教学启示。因此，本文的研究问题如下：

- （1）高中生数学批判性思维倾向、数学元认知的现状如何？
- （2）高中生数学批判性思维倾向、数学元认知分别在性别、年级、数学学业成绩、班主任是否为数学教师以及对数学的喜爱程度上是否存在显著性差异？
- （3）高中生数学批判性思维倾向、数学元认知与数学学业成绩三者之间的相关性如何？
- （4）高中生数学批判性思维倾向和数学元认知与数学学业成绩之间的作用机制如何？数学批判性思维倾向在数学元认知与数学学业成绩中是否具有中介效应？

1.3 研究意义

1.3.1 理论意义

（1）有利于批判性思维倾向学科化发展

20 世纪中后期，美国科学哲学家卡尔·波普尔曾指出，“批判性思维是打开科学创新之门的钥匙”，所以培养学生的批判性思维尤其重要，并且国内外众多学者都认为批判性思维应结合具体学科或者内容进行培养^{①②③}。然而，我国关于批判性思维的研究大多集中在英语学科和语文学科，较少研究聚焦于数学学科，其中针对批判性思维倾向的研究则更为缺乏。因此，本研究将批判性思维倾向置于数学学科之中进行研究，在一定程度上可推动批判性思维倾向研究学科化发展。

（2）有利于丰富数学批判性思维倾向、数学元认知等相关领域的研究成果

目前，我国关于数学批判性思维倾向和数学元认知的已有研究大多为现状研究、培养研究、差异性研究以及与数学学业成绩等方面的相关性研究。虽然已有相关研究从理论和实证层面上探讨出批判性思维、元认知二者之间存在一定的联系，但在数学教育领域中，少有学者探讨二者的关系，关于数学批判性思维倾向、数学元认知和数学学业成绩三者间的关系研究则更为鲜见，三者关系具体如何至今也未得到实证研究的落实。因此，本研究以高中生为研究对象，通过实证研究揭示三者之间的关系及其作用机制，明确数学批判性思维倾向和数学元认知对数学学业成绩的影响路径，并结合相关教学案例，探讨在数学课堂中培养高中生数学批判性思维倾向和数学元认知的教学价值。这不仅丰富了国内有关数学批判性思维倾向和数学元认知等相关领域的研究成果，还推动了我国数学教育的发展。

1.3.2 实践意义

（1）有利于了解高中生数学批判性思维倾向、数学元认知的现状

本研究通过分析数据，了解高中生数学批判性思维倾向和数学元认知水平，剖析各方面因素（包括性别、年级、数学学业成绩、学生干部、班主任和数学喜爱程度）对二者的影响，并建立结构方程模型，明晰三者间的关系，直观细致地呈现出数学元认知通过数学批判性思维倾向及其各维度来影响数学学业成绩的作用路径。有利于一线教师及研究者更深入地了解高中生数学批判性思维倾向、数学元认知的现状，寻找高中生思维上的薄弱之处。如此既便于教师有针对性的引导学生直面不足，使其主动地、明确地审视并调节自身，又益于教师更合理地将数学批判性思维倾向和数学元认

^① McPeck J. E.. *Critical Thinking and Education*[M]. New York: St. Martin's Press,1981.

^② Tim John Moore. Critical Thinking and Disciplinary Thinking: A Continuing Debate[J]. *Higher Education Research & Development*, 2011, 30(3):261-274.

^③ 戴维·希契柯克,张亦凡,周文慧.批判性思维教育理念[J].*高等教育研究*,2012,33(11):54-63.

知的培养融入数学课堂，从而改善现状，令学生获得未来能够独立应对社会上的种种严峻挑战的能力。

（2）有利于总结出针对性的教学启示，积极落实素质教育

教师的教学模式对学生的意识观念和思维方式有着强大的影响力，其一言一行都会对学生产生潜移默化的影响。数学批判性思维和数学元认知都是正面性、建设性的思想力量，二者的均衡发展有助于提高学生的数学素养和创新意识。本研究通过分析高中生数学批判性思维倾向和数学元认知的研究现状，明晰数学批判性思维倾向、数学元认知和数学学业成绩之间的相关性，剖析三个变量的结构方程模型，并研究培养高中生数学批判性思维倾向和数学元认知的教学案例，探讨其教学价值，最后从研究结论中总结出针对性的教学启示，为教师开展锻炼学生数学批判性思维倾向和数学元认知的数学教学提供参考。如此既能帮助教师不断完善教学模式，提高学生的数学思维能力和数学学业成就，亦能为数学教育的改革和创新指明方向，推动素质教育的有效落实。

1.4 研究方法

（1）文献研究法

本研究通过阅读和梳理与数学批判性思维倾向、数学元认知相关的文献，总结出国内外关于两个变量在概念、结构、测量工具、研究现状及培养策略方面的现状，进而厘清各变量之间的关系，建立研究理论模型，提出研究假设。

（2）问卷调查法

首先，本研究在选取国内外权威专家使用较为广泛、信效度良好的量表之后，根据数学学科特点和高中生认知发展水平对量表部分题目的表述进行一定的修改，形成《高中生数学批判性思维倾向和数学元认知的调查问卷（初始卷）》。其次，通过预调查和正式调查两个阶段，对量表进行项目分析和信效度分析，并基于分析结果对量表进行修订和完善，形成最终的《高中生数学批判性思维倾向和数学元认知的调查问卷（正式卷）》。最后，将收集到的有效样本数据作为后续研究现状分析、相关性分析和中介效应检验的分析依据，以了解高中生数学批判性思维倾向和数学元认知现状，研究数学批判性思维倾向、数学元认知与数学学业成绩三者间的关系，以及检验理论模型和相关研究假设。

（3）数据分析法

本研究主要运用 Excel、SPSS25.0 和 AMOS24.0 软件，对有效样本数据进行数据处理和统计分析。其中，运用 Excel 表格录入问卷数据；运用 SPSS25.0 软件进行项目分析、探索性因素分析、信度分析、描述性统计、独立样本 t 检验、方差性分析以及相关性分析；运用 AMOS24.0 软件进行验证性因素分析和结构方程模型分析。

1.5 研究思路

本研究大致的研究思路如图 1-1 所示：

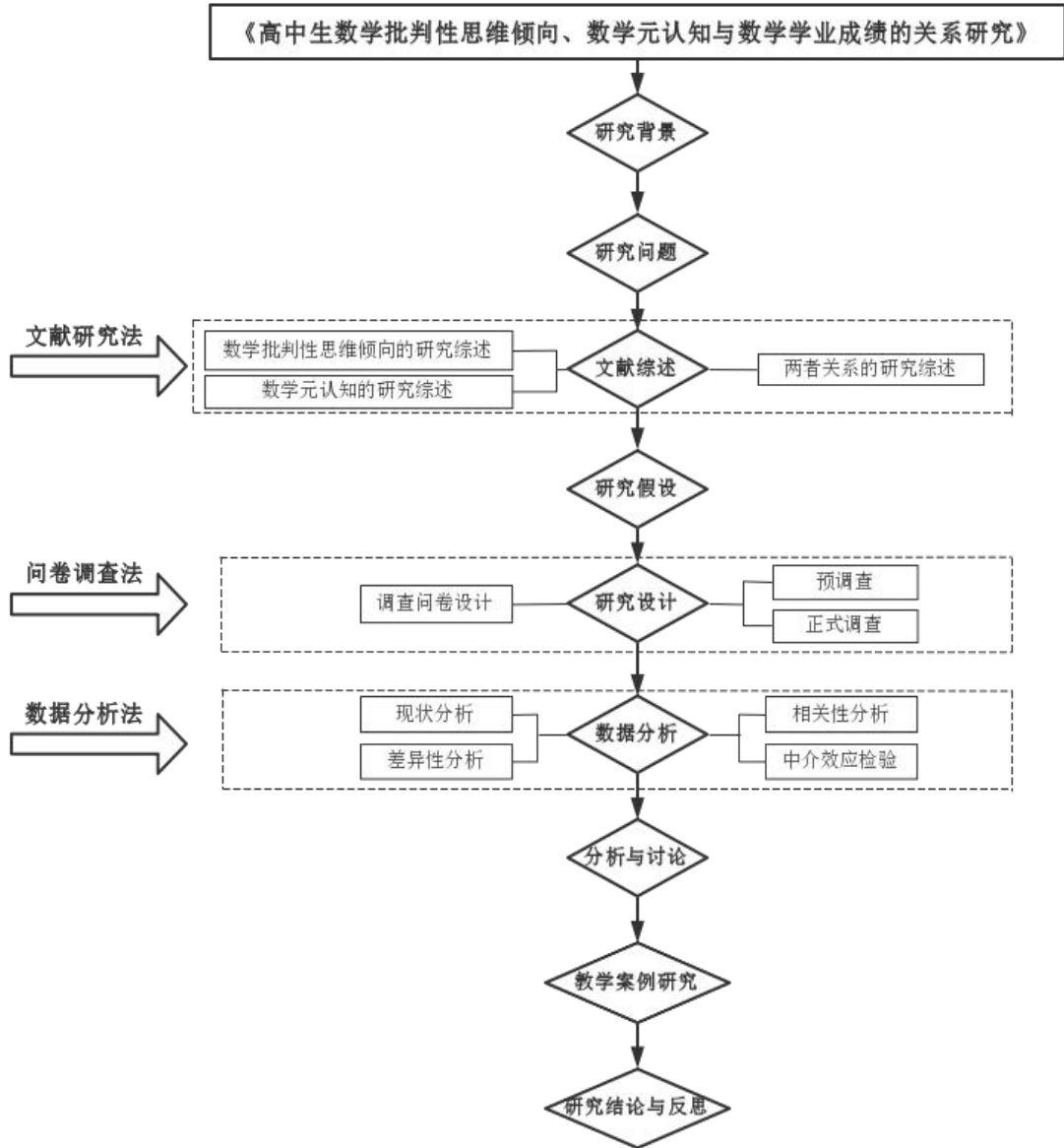


图 1-1 研究思路图

本研究的创新之处如下：

第一，从实证研究的角度来探究数学批判性思维倾向、数学元认知与数学学业成绩三者之间的关系。关于数学批判性思维、数学元认知以及数学学业成绩这三个变量，已有多数研究证实了数学批判性思维和数学元认知二者均与数学学业成绩存在一定的联系，至于数学批判性思维和数学元认知，仅有少数学者从理论层面系统探讨了二者之间的关系，尚无学者通过实证研究对其进行深入研究。因此，本研究将数学批判性思维倾向、数学元认知和数学学业成绩三个变量整合起来进行实证研究，系统探究

三者间的关系，这在一定程度上丰富了数学批判性思维和数学元认知的现有研究。

第二，揭示了数学元认知通过数学批判性思维倾向及各维度来影响数学学业成绩的作用路径。国内关于数学批判性思维倾向与数学学业成绩、数学元认知与数学学业成绩的相关性研究已经得到学界的广泛关注，但三者间的关系还需进一步研究。因此，本研究以高中生为研究对象，通过实证调查了解高中生数学批判性思维和数学元认知的现状，并建立结构方程模型深入探究三者之间的关系与影响机制，进一步明晰数学元认知通过数学批判性思维倾向及各维度来影响数学学业成绩的作用路径，旨在为提升高中生数学批判性思维和数学元认知水平提供有益的教学启示，进而提高高中生的数学思维能力和数学学业成就。

第2章 文献综述

2.1 数学批判性思维倾向的研究综述

2.1.1 数学批判性思维倾向的概念

（一）批判性思维的概念

批判性思维（Critical Thinking）中的“批判”（critical）一词源于希腊词语 kritikos（有辨明的能力）和 kriterion（标准），根据语源，批判性思维最初的意思是“基于一定标准对事物进行分析、判断的思维^①”。在历史上，曾有许多以怀疑、判断为主要思维形式的名称与批判性思维密切相关。比如，苏格拉底的“探究性质疑”、“产婆术”或者辩证法；杜威的“反思性思维”；20世纪30年代流行的“宣传分析”；布鲁纳称之为“分析性思维”；布卢姆认知目标“金字塔”中的“高阶思维”等^②。

追溯批判性思维的历史，应该从苏格拉底提出的“产婆术”开始。“产婆术”包括讥讽、助产术、归纳和定义四个步骤，实施过程中需要教师向学生不断提出问题，激发学生好奇心和探究欲望，学生再自行归纳那些自己通过思考得出的结论，从而获得相应的定义。这一过程强调学生思维的逻辑性，鼓励学生独立思考和勇敢质疑，无疑锻炼了学生的批判性思维。

现代最早论及批判性思维概念的是美国哲学家约翰·杜威（John Dewey），但在杜威之前，有学者表述过对反省的认识。英国经验主义的洛克提出：知识是与观念相关的，而一切观念都是由感觉和反省得来的^③。荷兰的斯宾诺莎则认为自己的认识论是“反思的知识”^④。杜威在《我们怎样思维》（1910）一书中大力提倡批判性思维（他称为“反思性思维”），即“对任何信念或假定存在的知识，以积极、谨慎的态度自觉的、持续的、认真的反思其根据的合理性，并进一步提出已知信念或知识可能引发的新结论^⑤”，简而言之，批判性思维就是对任何信念和假说的延迟判断。

继杜威之后40年，美国进步教育协会受其启发，大力推进“批判性思维”的研究步伐，国外学者对批判性思维概念的认识在不同时期也呈现出不同的特点，主要分为以下四个阶段。

（1）“静态化”阶段

研究初期，学者们对批判性思维的认识处于静态化阶段。1941年，爱德华·格雷

^① 武宏志.批判性思维的灵魂——理性标准[J].逻辑学研究,2016,9(03):25-41.

^② 武晓蓓.批判性思维研究[M].北京:人民出版社,2018:3.

^③ 王彦君.批判性思维[M].北京:高等教育出版社,2020:5.

^④ 王建,李如密.批判性思维与创新思维的辨析与培育[J].课程.教材.教法,2018,38(06):53-58.

^⑤ Dewey J. *How We Think*[M]. Boston, New York and Chicago: D. C. Heath,1910:6-13.

瑟（Edward Glaser）最早提出“Critical Thinking”这一术语，将其定义为怀疑的态度、逻辑推理的知识和有效辨识、推论、评估的技能的综合体^①。1953年，奥舍尔·史密斯（B. Othanel Smith）认为，在决定是否接受一个陈述的意思之前需要进行评估性的思考，而这种思考称为批判性思维^②。罗伯特·恩尼斯（Robert Ennis）在1962年将批判性思维定义为对命题的正确评判^③。

（2）“动态化”阶段

20世纪80年代，批判性思维的概念越发突出思维过程，逐渐步入动态化的认识阶段。麦裴克（J. E. McPeck）在1981年指摘恩尼斯所给出的定义，认为命题处于非批判性论证的前提下，也是可能获得正确评判的，并指出：批判性思维是主动反思问题解决活动过程的怀疑态度和技能^④。换言之，麦裴克更突出思维过程的反思性以及思维态度的重要性^⑤。恩尼斯在受到麦裴克的批判后，在1985年将定义进一步变更为：批判性思维是一种在决定相信什么或做什么时所进行的合理性、反省性的思考^⑥。1987年，国际公认的批判性思维权威的哲学家理查德·保罗（Richard W. Paul）指出：批判性思维是主动并灵活地将那些经过观察、实验、推理和交流过程后所得到的信息，进行抽象、运用、分析、综合与评估，从而使人们更好地决定自己信念和行为的思考^⑦。1988年，马修·李普曼（Mathew Lipman）提出：批判性思维是基于一定标准，可根据具体情况对信念和行为进行自我调整的思维方式^⑧。

（3）“丰富化”阶段

20世纪90年代开始，学者们对批判性思维概念的界定不再囿于技能层面，越来越关注思维倾向，使概念愈加丰富化。彼得·范西昂（Peter Facione）和专家组采用德尔菲方法对批判性思维进行了长达两年的研究探讨^⑨，最终在德尔菲报告中指出：批判性思维是有目的的、自我调节的判断，它既可以表现为解释、分析、评价、推论，还可以表现为对判断所依托的概念、方法、论据、标准或语境的具体说明^⑩。2001年，霍尔普恩（D. F. Halpern）提出：批判性思维是分析、综合、评估信息的能力以及使

^① Glaser E. *An Experiment in the Development of Critical Thinking*[M]. New York: Advanced School of Education at Teacher's College, Columbia University, 1941.

^② Smith B. The Improvement of Critical Thinking[J]. *Progressive Education*, 1953, 30: 129-134.

^③ Ennis R. A Concept of Critical Thinking[J]. *Harvard Education Form*, 1962(1).

^④ McPeck J. E. *Critical Thinking and Education*[M]. New York: St. Martin's Press, 1981.

^⑤ 钟启泉. 批判性思维: 概念界定与教学方略[J]. *全球教育展望*, 2020, 49(01): 3-16.

^⑥ Ennis R. A Logical Basis for Measuring Critical Thinking Skills[J]. *Educational Leadership*, 1985, 43(2): 44-48.

^⑦ Paul R. *Dialogical Thinking: Critical Thought Essential to the Acquisition of Rational Knowledge and Passions*[M]. New York: W. H. Freeman, 1987: 127-148.

^⑧ Lipman M. Critical Thinking: What Can It Be? [J]. *Education Leadership*, 1988(46): 38-43.

^⑨ 高瑛, 许莹. 西方批判性思维研究: 回顾与反思[J]. *外语学刊*, 2014(05): 1-6.

^⑩ Facione P. A. *The Delphi Report-critical Thinking: A Statement of Expert Consensus for Purposes of Educational Assessment and Instruction*[R]. Millbrae CA: The California Academic Press, 1990.

用这些能力的倾向^①。由此看出,批判性思维的概念逐渐丰富化,主要涉及思维过程、技能、倾向、思考内容等多种维度。

(4) “学科化”阶段

21 世纪以来,批判性思维的界定逐渐朝着学科化发展。2011 年,摩尔(Tim John Moore)认为批判性思维不是某种一般的、普遍的思维,而是存在于各种各样领域中的思维方式^②。

国内学术界关于批判性思维概念的界定尚未统一,各学者见仁见智。

罗清旭(2000)将批判性思维定义为一种品质,即个体对获取知识的过程、理论、方法、背景、依据以及知识评估标准等方面的正确性作出自我调节性判断的一种个性品质^③。同样持有这一观点的还有林崇德(2006),他认为批判性思维是思维活动中严谨地检查思维材料与思维过程的智力品质^④。

刘儒德(2000)强调批判性思维是一种思维过程,具体表现为个体在学习事物前,对其真实性、准确性、性质与价值进行判断,进而对自身行为和信念作出合理决策^⑤。

谷振诣(2006)指出:批判性思维是一种提出恰当问题和作出合理论证的思维能力^⑥。

董毓(2012)指出人们对批判性思维的三大误解:批判性思维不代表否定,不等于论证逻辑,而是对事物进行谨慎反思与创造,强调辩证认知过程,以及理智美德与技巧相得益彰的思维^⑦。

钟启泉(2020)则突出强调批判性思维的建设性,将其定义为:基于依据的公正且有逻辑的思考;也是一个自觉审思自身的思维过程;旨趣在于让个体有目的地思考,从而更好地适应目标与情境的要求^⑧。

武宏志(2012)认为出现多种多样的批判性思维概念的原因有两点:一是众多学者理解批判性思维的视角或路向不同,主要涉及哲学、心理学和教育等领域;二是无法从单一视角中获得对批判性思维的完满理解,其概念的多样化有助于丰富人们对批判性思维的理解,但其最为突出的特性在于怀疑、质疑的观念和做法^⑨。

(二) 批判性思维倾向的概念

^① Halpern D. F. Assessing the Effectiveness of Critical Thinking Instruction[J]. *The Journal of General Education*,2001(4).

^② Tim John Moore. Critical Thinking and Disciplinary Thinking: A Continuing Debate[J]. *Higher Education Research & Development*, 2011, 30(3):261-274.

^③ 罗清旭.论大学生批判性思维的培养[J].清华大学教育研究,2000(04):81-85.

^④ 林崇德.思维心理学研究的几点回顾[J].北京师范大学学报(社会科学版),2006(05):35-42.

^⑤ 刘儒德.论批判性思维的意义和内涵[J].高等师范教育研究,2000(01):56-61.

^⑥ 谷振诣,刘壮虎.批判性思维教程[M].北京:北京大学出版社,2006:1-2.

^⑦ 董毓.批判性思维三大误解辨析[J].高等教育研究,2012,33(11):64-70.

^⑧ 钟启泉.批判性思维:概念界定与教学方略[J].全球教育展望,2020,49(01):3-16.

^⑨ 武宏志.批判性思维:多视角定义及其共识[J].延安大学学报(社会科学版),2012,34(01):5-14.

虽然各学者对批判性思维概念的看法有所不同,但是学术界基本一致认同美国哲学学会提出的批判性思维的双维结构框架——由批判性思维技能和批判性思维倾向这两个维度构成。在杜威看来,两者都是个体反省思维发展的关键,但“如果一定要在个人态度和包含逻辑推理方法与技巧的原则性知识之间作出选择,我们将选择前者^①”。并且,“思维技能的训练必须立足于思维倾向^②”,也就是说,倘若个体只拥有批判性思维技能,却无恰当、正确地使用这些技能的批判性思维倾向,那么批判性思维将是机械的、轻率的,甚至会形成错误的信念。因此,在教学中不仅要教授批判性思维技能,更要重视批判性思维倾向的形成。

20 世纪 90 年代以后,恩尼斯开始将情感倾向界定在批判性思维的概念中,并坚持认为技能和倾向是可教可迁移的,虽然重心仍放在批判性思维技能上。他还指出理想的批判性思维者在思维倾向上具备三个特点:关心信念的真实性与可证明性;关心每个人观点的诚实性与公正性;关心他人的尊严与价值^③。保罗指出高级的批判性思维不仅需要思维技能,还应当包括态度、倾向等情感维度,批判性思维倾向表现在思维的独立性、信念的公正性、自信推理、敢于判断等。西格尔(Siegel H., 1988)则表示批判性思维的两个关键成分是:包含主张、论证等技能与能力的推理评价成分,以及复杂的倾向、态度、习惯等批判性精神成分。其中,批判性精神包括信念的客观性、追求证据的公正、富有同情心等人格特质^④。

范西昂认为批判性思维倾向是运用思维确定信念和做出行动的一种稳定的内部动机^⑤,并将其划分为以下 7 个维度:寻找真相(Truth-Seeking)、思想开放性(Open-Mindedness)、分析性(Alyticity)、系统性(Systematicity)、自信心(Self-confidence)、求知欲(Inquisitiveness)和认知成熟度(Maturity)。值得一提的是,这一关于批判性思维倾向维度的划分得到了学术界的广泛认可并沿用至今。

(三) 数学批判性思维倾向的概念

数学的发展需要批判,批判性思维能够不断促进数学理论的完善。例如非欧几何是在对欧氏几何的质疑下诞生的;第三次数学危机是在罗素悖论对康托尔的集合论的挑战下引发的;等等。众多学者认为,数学批判性思维是批判性思维在数学学习活动中的体现,因此它隶属于批判性思维。

孙联荣(1995)将数学教育中的批判性思维归纳为 4 点:遇到问题冷静思考,随时抱有“反省的怀疑”;重点关注所得结论的由来,并基于已有数学知识,通过逻辑推

^① [美]约翰·杜威.我们怎样思维:经验与教育[M].姜文闵译.北京:人民教育出版社,1991:28.

^② [美]约翰·杜威.我们如何思维[M].伍中友译.北京:新华出版社,2010:25.

^③ 罗清旭.批判性思维理论及其测评技术研究[D].南京师范大学,2002.

^④ Siegel H. *Educating Reason: Rationality, Critical Thinking, and Education*[M]. Routledge, 1988.

^⑤ FACIONE P A, FACIONE N C, GIANCARLO C A. The disposition toward critical thinking: its character, measurement, and relationship to critical thinking skill[J]. *Informal Logic*, 2000, 20(1):61-84.

理对数学事实的合理性做出评价；敢于多角度提出猜想，并对其进行检验，若发现谬误需勇于反驳；修正谬误，坚持探索，完善数学认知^①。

李文婧（2004）认为，数学批判性思维是指学习者在数学学习活动中所体现出来的个性品质，具体表现为学习者以已有的数学表述和数学思维过程、结果为数学批判性思维的行为对象，有目的、有意识地对其作出自我调节性分析、独立性评判、逻辑性推理、合理性解释和灵活性调控等操作性行为。数学批判性思维倾向则表现为思想的独立性与开放性，对事物的探究性与好奇心，以及对错误进行自我矫正的愿望^②。

再者，肖永红和习萍（2008）针对大学生提出数学批判性思维的概念，即学生有目的地对现有的数学观点、方法、定理、证明、表述以及应用价值等重新“验证”、“辩护”和再思考。数学批判性思维倾向是指学生对数学问题进行主动审视和评判的心理准备、意愿和倾向，它能够激发学习者的批判意识，指引学习者的思考方向。主要包括五大要素：强烈的兴趣、独立的思想品质、乐于思考、开放心理、对错误自我矫正的愿望^③。

除此之外，赵轩（2019）等人认为，批判性思维在数学学科中具体体现在发现问题和提出问题，根据已知信息猜测结论，通过逻辑推理检验猜想的探索过程中^④。2020年，教育部考试中心亦表示，高考数学对批判性思维能力的考查内容主要是学生的推理论证能力、发现并修正错误的能力、以及解决问题的方向和方法的能力^⑤。

总而言之，数学不只是一门严谨、精确，富有逻辑性和既定规则的学科，它更是一个具有无限生长性，且充满质疑、批判的开放性领域。数学批判性思维在数学学习活动中的表现集中在勤于反省、敢于质疑、理性分析、审慎评判、勇于猜想、逻辑推理、反复验证这些方面。而数学批判性思维倾向的表现则聚焦于个体的求知欲、好奇心、思想的独立性和开放性、敢于怀疑的求实态度、坚持追求真理的意愿这些方面。并且，数学科高考也开始重视对学生批判性思维能力的考查，可见数学批判性思维的培养应成为提升学生数学思维的一个着力点。

因此，基于对已有文献的整理和总结，本研究将数学批判性思维倾向划分为 7 个维度，分别为寻找真相、开放思想、分析性、系统性、自信心、求知欲和认知成熟度，各维度的操作性定义如 2-1 表所示。

^① 孙联荣.数学教育中培养批判性思维的探讨[J].数学教育学报,1995(04):16-20.

^② 李文婧. 数学批判性思维及其教学研究[D].山东师范大学,2004.

^③ 肖永红,习萍.大学生数学批判性思维及培养途径[J].教育探索,2008(09):11-12.

^④ 赵轩,任子朝,陈昂.高考数学科批判性思维考查研究[J].数学通报,2019,58(12):38-42.

^⑤ 教育部考试中心.以评价体系引领内容改革,以科学情境考查关键能力——2020 年高考数学全国卷试题评析[J].中国考试,2020(08):29-34.

表 2-1 数学批判性思维倾向各维度的操作性定义

维度	操作性定义
寻找真相	拥有寻求数学知识真相的真诚和积极态度，敢于质疑，且不受个人喜好和先前观念所影响，能客观辩证地看待数学事实。
开放思想	不仅能对他人不同的意见、观点与方法保持宽容和尊重的态度，理性且有依据地对其进行评价、借鉴和采纳，还能客观公正地审视自身见解。
分析性	善于挖掘数学知识间的逻辑关系，重视推理的应用，在利用已有数学知识去分析、解决问题的同时还能预计后果。
系统性	有组织、有目标、有逻辑地对数学问题进行全面探究，善于系统地整理数学知识。
自信心	面对各类数学问题时，能够保持镇静自若和积极解决问题的自信态度，并且对自己的分析问题和解决问题的能力有把握。
求知欲	拥有对数学知识的好奇心和学习数学的愿望，能够主动理解和学习新的数学知识，积极探究各类数学问题。
认知成熟度	审慎地作出判断，理性地选择解决问题的方法，正确认识数学本质。

2.1.2 数学批判性思维倾向的测量工具

（一）国外常用的批判性思维测量工具

目前，国外已有的批判性思维测量工具有三十多种，测量方式各式各样，大多被用于测量个体的批判性思维技能与批判性思维倾向，大致可分为三种主要的题型：客观题型、主观题型与主客观相结合的题型。

客观题型以选择试题为主，属于此类题型的常见测量工具有：范西昂等人于 1990 年创建的《加利福尼亚批判性思维技能测量》（The California Critical Thinking Skills Test, CCTST）以及《加利福尼亚批判性思维倾向测量量表》（The California Critical Thinking Dispositions Inventory, CCTDI）；恩尼斯和米尔曼（Millman J.）于 1985 编制的《康奈尔批判性思维测量：X 水平》和《康奈尔批判性思维测量：Z 水平》（Cornell Critical Thinking Test, Level X&Z, Cornell CTT: Level X&Z；沃森（Goodwin Watson）和格雷瑟于 1980 年开发的《沃森—格雷瑟批判性思维评价》（Watson-Glaser Critical Thinking Appraisal, WGCTA）等。

主观题型以面谈、口试、作文等开放试题为主，属于此类题型的常见测量工具有：恩尼斯和韦尔（Weir E.）于 1985 年编制的《恩尼斯—韦尔批判性思维作文测量》（The Ennis-Weir Critical Thinking Essay Test, EWCTET）；基钦纳和金开发的《反省判断面

谈》(The Reflective Judgment Interview, RJI)、美国大学测验计划于 1986 年出版的《推理和交流评价测量》(Assessment of Reasoning and Communication, ARC)等。

主客观相结合的题型则包括选择题与开放题,如《霍尔普恩批判性思维测量》(The Halpern Critical Thinking Assessment)、《美国教育考试服务中心能力测试》(ETS Proficiency Profile)则属于此类题型^①。

其中,多用于测量批判性思维倾向且比较成熟、应用范围较为广泛的测量工具为范西昂等人编制的《加利福尼亚批判性思维倾向测量量表》(The California Critical Thinking Dispositions Inventory, 以下简称 CCTDI)。CCTDI 测量的对象主要是中学高年级学生以及大学生,包括寻求真理性、思想开放性、分析性、系统性、自信性、好询问性和成熟性 7 个维度^②。每个维度都是包含若干陈述题项的子量表,7 个子量表共同组成批判性思维倾向问卷。

(二) 国内常用的批判性思维倾向测量工具

国外批判性思维测量工具的不断更迭是我国开发研制符合中国社会文化背景的本土化测量工具的良好助推器。目前,我国研制的批判性思维的测量工具大多是在国外量表的基础上进行汉译和修订。比较有代表性的研究是罗清旭和杨鑫辉(2001)对 CCTDI 作了中文版的修订,经过试测与重测后得出结论,即各子量表的平均因素符合基本达到 0.4 水平,总量表的 α 系数为 0.86,各子量表的 α 系数为 0.46~0.83,说明该问卷的中文修订版有良好的信效度,且适用于对中国中学高年级学生或大学生的测验^③。另外,彭美慈等人(2004)对 CCTDI 在保留 7 个维度的基础上进行修改后得到 CTDI-CV,共 70 个题项。研究者对量表的部分题项加入了情景化描述,在用词上融入中国文化元素,以确保学生在测量过程中能理解题意、把握重点。选择高中到硕士的护理专业学生作为研究对象,其统计结果表明,CTDI-CV 的信效度良好,具有颇高的内部一致性(内容效度为 0.89,总体的 α 系数达到 0.90,各维度的 α 系数为 0.54~0.77)^④。两者相较而言,彭美慈等人的 CTDI-CV 信效度更好,更注重中国本土文化及语言特征,被研究者们广泛应用。

除了对国外批判性思维测量工具进行翻译和修订之外,国内部分学者还会借鉴国外量表,自行编制针对不同研究对象的中文版量表。其中,台湾学者朱苑瑜、叶玉珠编制的《批判性思考倾向量表》在自编量表中具有一定的代表性,该量表共 20 个题

^① 罗清旭.批判性思维理论及其测评技术研究[D].南京师范大学,2002.

^② Facione P. A, Facione N. C. *The California Critical Thinking Disposition Inventory*[M]. Millbrae: California Academic Press, 1992.

^③ 罗清旭,杨鑫辉.《加利福尼亚批判性思维倾向问卷》中文版的初步修订[J].心理发展与教育,2001(03):47-51.

^④ 彭美慈,汪国成,陈基乐,陈满辉,白洪海,李守国,李继平,蔡芸芳,王君俏,殷磊.批判性思维能力测量表的信效度测试研究[J].中华护理杂志,2004(09):7-10.

项, 具有较为理想的信效度(总体信度为 0.88, 各子量表信度为 0.58~0.83)^①。戚业国、孙秀丽(2020)共同编制的《中国普通高中生批判性思维发展状况测量量表》中包含“普通高中生批判性思维倾向问卷量表”, 该量表的基础结构包括批判性思维“五性”品质(批判性思维主动性、公正性、独立性、严谨性以及客观性)与批判性思维背景知识这 6 个因素, 分别选取不同层次的四所学校的高中生进行问卷调查研究, 有效样本量高达 6204 人, 分析结果显示该量表内部一致性 α 系数为 0.75, 具有较好的信效度^②。

(三) 数学教育领域中的批判性思维倾向测量工具

国内有少数学者围绕着批判性思维倾向与数学教育展开相关研究, 所用量表大多是参考 CCTDI 及其中文版改编而来的, 如此不仅促进了批判性思维学科化, 并且在一定程度上还丰富了我国批判性思维领域的研究。在小学层面, 高利红(2020)的《小学生批判性思维倾向问卷》是参考 CCTDI 和 CTDI-CV 改编而来的, 围绕小学中高年级学生的数学批判性思维倾向与数学问题解决表现展开分析, 并对两者的关系问题予以探讨, 分析结果表明该问卷信效度良好^③。裴昌根和范建成(2022)的《数学批判性思维倾向问卷》是参考 CCTDI 及其中文版编制而成的, 对 2850 名小学生展开调查, 分析结果显示该问卷具有良好的信效度, 为以后进一步开发数学批判性思维倾向的测量工具提供参考^④。在初中层面, 马净净(2017)在借鉴 CCTDI 的基础上编制出适用于初中生的《数学批判性思维倾向的测量量表》, 对 1000 名初中生展开调查后, 结果显示该量表具有较好的信效度, 总量表克伦巴赫 α 系数为 0.9, 各子量表为 0.54~0.77^⑤。在高中层面, 朱展霖(2021)根据 CCTDI 及其中文修订版编制了《高中生数学批判性思维倾向量表》, 该量表信效度较为理想, 在正式测量中通过对 783 名学生的数学学习策略、数学批判性思维倾向进行现状分析, 并探讨二者与数学成绩的关系问题, 最后结合研究结果提出针对性的教学建议^⑥。

2.1.3 数学批判性思维倾向的研究现状

研究者主要利用 CCTDI 及其中文修订版量表对批判性思维倾向进行实证调查研究, 大多是关于性别、年级、学业成绩、学科、专业、地区、家庭背景等因素的相关性研究, 并且研究对象范围广, 涉及基础教育阶段至大学阶段, 仅有少数研究者将批判性思维倾向的研究视角聚焦于数学教育领域。

^① 吕国光. 教师批判性思维倾向量表(TCTS)的修订[J]. 黄冈师范学院学报, 2007(03):63-67.

^② 戚业国, 孙秀丽. 我国普通高中生批判性思维状况与教育应对[J]. 教师教育研究, 2020, 32(02):63-70.

^③ 高利红. 小学生批判性思维倾向与数学问题解决表现的关系研究[D]. 西南大学, 2020.

^④ 裴昌根, 范建成. 数学批判性思维倾向问卷的编制及其信效度分析[J]. 中国考试, 2022(03):44-50.

^⑤ 马净净. 初中生数学批判性思维倾向的调查研究[D]. 山东师范大学, 2016.

^⑥ 朱展霖. 高中生数学批判性思维倾向、数学学习策略与数学学业成绩的关系研究[D]. 华中师范大学, 2021.

在大学阶段，卢忠耀和陈建文（2017）编制出《批判性思维倾向量表》，并对6所普通本科院校的437名大学生进行调查，其结果显示：大学生批判性思维倾向总体良好，但思维的自信性与认知成熟度水平偏低，且其能显著预测成就目标定向、学业自我效能以及学习投入三个变量^①。马军英、赵强（2015）等人以高师院校的1553名大学生为研究对象，发现该校大学生的批判性思维倾向总分呈正性但不明显；师范生的批判性思维倾向比非师范生弱，而在师范类学生中，理科强于文科、艺体学科；高年级显著低于低年级等，进而建议应该重视师范生批判性思维的培养，主张将其融入学科并结合实践来培养大学生的批判性思维^②。坎达吉（M. A. Khandaghi）等人（2011）利用里基茨的批判性思维倾向问卷（Ricketts' Critical Thinking Disposition Questionnaire）对菲尔多西马什哈德大学人文学院的123名本科生展开调查研究，发现所有本科生的批判性思维倾向达到最佳的适度水平，但未达到严格水平；不存在性别差异和年级差异^③。图兰（H. Turan）等人（2012）所得结果与坎达吉一致，他们以科贾埃利大学和萨卡里亚大学教育学院不同系的194名大学生为研究对象，采用CCTDI测量学生的批判性思维倾向，此外还证实了其在院系上存在显著差异^④。

大学阶段中针对数学教育领域的批判性思维倾向的研究较少。其中，江锦（2021）采用罗清旭的CCTDI中文版对103名数学专业本科生展开调查，研究结果表明：大学生的批判性思维倾向总体缺乏；性别以及是否为数学师范生都与批判性思维倾向不相关；经常进行小组合作、解决开放性问题的学生的批判性思维倾向得分较高。经过一个学期的干预教学后，实验班学生的系统性、求知欲与认知成熟度略有进步，总体而言稍有改善，但仍不呈正性^⑤。

在高中阶段，宋长青（2018）选用CCTDI对233名高中生的批判性思维倾向进行调查，结果显示：高中生的批判性思维处于中等矛盾水平；整体上不存在性别差异；性别、学科、成绩和环境等因素是学生批判性思维倾向发展的影响变量，最后针对以上研究结论，从教师、教学、教材与课堂提问方式四个方面提出培养策略^⑥。戚业国和孙秀丽（2020）采用问卷调查法对国内四个层次共20所普通高中的6204名学生的批判性思维展开调查，发现我国高中生批判性思维出现高倾向、低能力的现象，且女生优于男生，在年级、文理科、同学关系以及成绩上均存在明显差异，并指出学校、

^① 卢忠耀,陈建文.大学生批判性思维倾向与学习投入:成就目标定向、学业自我效能的中介作用[J].高等教育研究,2017,38(07):69-77.

^② 马军英,赵强,张燕,朱爱玲.高校师范生批判性思维倾向的调查研究[J].数学教育学报,2015,24(06):21-25.

^③ Khandaghi M A, Pakmehr H. Critical thinking disposition: A neglected loop of humanities curriculum in higher education[J]. *Cypriot Journal of Educational Sciences*, 2011, 7(1):1-13.

^④ Turan H, Kolayis H, Ulusoy Y O. Comparison of the Faculty of Education Students' Critical Thinking Disposition[J]. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 2012, 46:2020-2024.

^⑤ 江锦. 数学课程中师范生批判性思维的培养研究[D].上海师范大学,2021.

^⑥ 宋长青. 高中生批判性思维倾向实证研究[D].山东师范大学,2018.

家庭和教师对学生的批判性思维有着显著影响^①。

少数学者将批判性思维倾向的研究融入高中数学学科。其中，赵轩等人（2019）指出，数学科高考开始强调批判性思维的考查，主要考查学生独立思考能力、富有条理的分析能力、合理的判断能力以及不盲目从众的科学精神，表明数学批判性思维倾向在数学教育领域中占据着重要地位^②。朱展霖（2021）以 783 名高中生为研究对象展开实证调查，主要研究数学学习策略、数学批判性思维倾向与数学学业成绩的关系，发现三个变量之间呈显著正相关，多数高中生的数学批判性思维倾向和数学学习策略运用水平为中等水平，两者在性别、年级、数学成绩、学科、班级等 7 个方面存在明显差异，数学学习策略通过数学批判性思维倾向显著影响数学学业成绩，系统化能力、自信心和求知欲在其中起关键作用^③。

在基础教育阶段，马净净（2016）以 1000 名初中生为研究对象展开调查，发现该校初中生数学批判性思维倾向总体上呈正性但较弱；批判性思维倾向的求知欲维度得分最高，寻找真相得分最低且未达到正性标准；年龄、数学成绩、家庭收入及父母学历等因素显著影响学生的批判性思维倾向，但性别和家庭氛围对其无显著影响^④。高利红（2020）对 321 名小学五年级学生进行调查研究，结果显示：学生的数学批判性思维倾向总体保持在中高水平，但发展不均衡；存在性别和地区差异；批判性思维倾向和数学问题解决表现之间存在相关性。最后基于研究结果，从课堂环境、学生自身、教师教学三方面提出改进建议，以促进批判性思维的进一步发展^⑤。

2.1.4 数学批判性思维倾向的培养策略

关于批判性思维能否教授这一问题，国外学者达成了共识：批判性思维借助恰当的教学是可以习得的^⑥。1941 年，格雷瑟在其博士论文中提到：实验组在进行了 8 个批判性思维教学单元与相关技能的练习后，其批判性思维能力明显优于对照组。并且，他在之后的研究中也不断证实了批判性思维借助教学能有所提升^⑦。但对于如何培养批判性思维这一问题，许多学者则各自提出了富有价值的见解，大致可以分为 3 个角度：独立式教学、融合式教学和综合化教学。其中，比较有代表性的观点是恩尼斯（1989）提出的 4 种批判性思维教学方法：一般方法、融入法、沉浸法和混合方法^⑧。

① 戚业国,孙秀丽.我国普通高中学生批判性思维状况与教育应对[J].教师教育研究,2020,32(02):63-70.

② 赵轩,任子朝,陈昂.高考数学科批判性思维考查研究[J].数学通报,2019,58(12):38-42.

③ 朱展霖.高中生数学批判性思维倾向、数学学习策略与数学学业成绩的关系研究[D].华中师范大学,2021.

④ 马净净.初中生数学批判性思维倾向的调查研究[D].山东师范大学,2016.

⑤ 高利红.小学生批判性思维倾向与数学问题解决表现的关系研究[D].西南大学,2020.

⑥ 彼得·费希万,诺琳·费希万,爱格尼丝·蒂瓦里,费利克斯·尤恩.作为普遍人类现象的批判性思维——中国和美国的视角[J].北京大学学报(哲学社会科学版),2009,46(01):55-62.

⑦ Glaser E M. An Experiment in the Development of Critical Thinking[D]. Columbia University, 1941.

⑧ Ennis, R. H. Critical thinking and subject specificity: Clarification and needed research[J]. *Educational Researcher*, 1989, 18(3):4-10.

（1）“一般方法”

“一般方法”是指建设一门专门用于培养学生批判性思维的独立课程，主要重视批判性思维的技能与倾向的训练，不涉及学科知识。许多发达国家的都开设了批判性思维这门课程，光是美国就有上千所高校开设，不同版本的教材有数百种之多^①。此种独立课程的经典案例有李普曼创设的儿童哲学教程、保尔开发的“强势”批判性思维教程以及针对大学生而建立的非形式逻辑教程等^②。支持此类“独立式教学”的学者还有恩尼斯、西格尔、斯滕伯格（R. Sternberg）等，但这类培养方法的可迁移性、可操作性也遭到了人们的质疑。

（2）“融入法”

“融入法”是指将批判性思维的培养融入学科教学中，并让学生明确批判性思维的教学目标，进而促进学生批判性思维的发展。“沉浸法”与“融入法”的区别在于，“沉浸法”在学科教学中不明确批判性思维的教学目标，使学生的批判性思维在潜移默化中得到锻炼。麦裴克（J. Mcpeck）认为批判性思维不具有一般性、通用性，不同学科领域间的批判性思维必然有所不同^③。史密斯（F. Smith）与麦裴克的观点一致，表示人们运用批判性思维进行思考的前提是拥有这个领域的丰富知识^④。国外许多学者出版了批判性思维与学科教学相结合的专著，比如帕尔默（O. E. Palmer）等人出版的《阅读与写作中的批判性思维》（1955）将批判性思维融入阅读和写作；费希尔（J. A. Fisher）出版的《批判性思维与人文科学》（1956）将批判性思维应用于文学教育当中^⑤。另外，阿迪（P. Adey，1994）等人提出的认知加速教学是在数学、自然科学课程中进行的，该教学活动会激励学生表达解题想法、提出问题、发表意见以及主动反思，这在无形中锻炼了学生的批判性思维^⑥。此类“融合式教学”的培养方法则受到众多教师和学者的推崇。

（3）“混合方法”

“混合方法”是将前三种方法结合起来进行，不仅要求建设独立课程使批判性思维的培养系统化，还要求结合学科教学使其具体化、现实化。这类“综合化教学”的培养方法无疑打破了“独立式教学”与“融合式教学”的壁垒，鉴于此，后来的多数学者都开始推崇“综合化教学”。斯滕伯格和帕金斯（D. N. Perkins）是这类培养方法的代表人物，主张将“独立式教学”与“融合式教学”统合起来而不是互相推翻，如此能够加强批

^① 缪四平.美国批判性思维运动对大学素质教育的启发[J].清华大学教育研究,2007(03):99-105.

^② Coles M J, Robinson W D. *Teaching Thinking: A Survey of Programmers in Education*[M]. Connecticut: The Bristol Press, 1989: 39-41.

^③ Mcpeck J. *Critical Thinking and Education*[M]. Ontario: Robertson, 1981: 7.

^④ Smith F. *To Think in Language, Learning and Education*[M]. London: Routledge, 1992: 92.

^⑤ 陈振华.批判性思维培养的模式之争及其启示[J].高等教育研究,2014,35(09):56-63.

^⑥ Howie D. *Teaching Students Thinking Skills and Strategies*[M]. London: Jessica Kingsley Publishers, 2011: 100-103.

判性思维的培养效果^①。此外,在进行批判性思维教学时需要注意,“有效的批判性思维教学必须同时教授理智美德与知识技巧^②”。弗莱雷(P. Freire)还指出,“批判性思维的教学万万不能将知识强行灌输给学生,而是应该激励学生进行批判性思维的对话,以此形成批判性思维^③。”

国内有关批判性思维培养的研究角度与国外基本一致,不过更倾向于将批判性思维的培养融入具体学科的融合式教学,并且大多是在理论层面上提出培养策略,目前仍处于尝试阶段,其有效性未经过大量的实践论证。

目前,我国个别高校开设了培养学生批判性思维的独立课程,如华中科技大学开设的《批判性思维》课程、同济大学设立的《批判性思维与训练》课程、北京大学开设的《逻辑与批判性思维》课程等。另外,部分中小学对学生批判性思维的培养的重视程度也在逐渐提高,如南京市中华中学于2017年首开《逻辑与批判性思维》校本必修课;华中科技大附属小学将批判性思维教育渗透于所有学科的教学之中,为学科教学带来更多的效益。值得一提的是,这两所学校分别是国内首次开设批判性思维课程的中小学。

此外,我国学者也在踊跃探寻批判性思维的培养策略,其中结合数学教育领域对其进行研究的学者也在逐渐增加。孙联荣(1995)提出数学教育中培养批判性思维的教学方法有以下几点:引导学生用批判的态度看待数学命题,并提供反例进行批判性思维训练;采用开放的数学问题;引导学生多角度反复思考;鼓励学生勇于猜想^④。管宏斌(2006)则认为独立的时间和空间、勇于质疑和筛选的能力是培养批判性思维的两个先决条件^⑤。李文婧、傅海伦(2012)表示学生个体与教师分别是影响学生数学批判性思维能力和倾向发展的内外部因素,还提出了有效培养学生数学批判性思维的3个策略,包括加强学生的批判意识、提升批判性思维能力以及为学生创造良好的教育环境^⑥。赵轩等人(2019)从近几年的数学科高考试题对批判性思维的考查规律中总结出几点建议,即注重题目的开放性、综合性、创新性,并适当增加思维量,引导学生独立探究,强调合理运用知识,考查学生理性思维与理解分析能力,从而发展学生的创新意识和独立思考的能力^⑦。

^① Coles M J, Robinson W D. *Teaching Thinking: A Survey of Programmers in Education*[M]. Connecticut: The Bristol Press, 1989: 16.

^② FACIONE P A, FACIONE N C, GIANCARLO C A. The disposition toward critical thinking: its character, measurement, and relationship to critical thinking skill[J]. *Informal Logic*, 2000, 20(1):61-84.

^③ 保罗·弗莱雷.被压迫者教育学[M].顾建新,等,译.上海:华东师范大学出版社,2001:28,41.

^④ 孙联荣.数学教育中培养批判性思维的探讨[J].*数学教育学报*,1995(04):16-20.

^⑤ 管宏斌.论批判性思维在数学教学中的建构[J].*教学与管理*,2006(01):62-65.

^⑥ 李文婧,傅海伦.数学批判性思维的影响因素及其培养[J].*中国成人教育*,2012(18):124-125.

^⑦ 赵轩,任子朝,陈昂.高考数学科批判性思维考查研究[J].*数学通报*,2019,58(12):38-42.

2.2 数学元认知的研究综述

2.2.1 数学元认知的概念及结构

（一）元认知的概念及结构

（1）元认知的概念

追本溯源，我国元认知思想从春秋时期的孔子那便出现了，主要体现在《学记》中的“教学相长”、“长善救失”等词句。而在国外，最早在古希腊时期的亚里士多德论述的读书方法中就蕴藏着丰富的元认知思想。在心理学研究历史上，从莱布尼兹的统觉学说、詹姆士的自我学说以及弗洛伊德的人格结构论中也能发掘到元认知的影子^①。此外，杜威在《我们如何思维》一书中也明确提出积极监控能力与批判性思维能力的重要性^②。

元认知（metacognition）中的“元”的概念最早是由哲学家塔斯基（Alfred Tarski）于 1956 年提出的，意思是“关于什么的什么”^③。基于此，元认知可以定义为“关于认知的认知”。而最早提出元认知的概念的是弗拉维尔（John Hurley Flavell, 1976），认为元认知是个体所具备的关于自己认知过程的知识以及对认知活动的监控、调节。换言之，他认为元认知既是有关认知的知识，又是对认知活动的调节^④。但在 1981 年，弗拉维尔又将元认知简洁地定义为：反映或调节认知活动的任何一方面的知识或认知活动^⑤。在 1978 年，布朗（A. L. Brown）等人指出：元认知是个体关于认知领域的知识体系和对它的控制^⑥。之后，国外众多学者纷纷开始表达自己对元认知的看法，比如韦纳特（Weinert）、帕特里夏（Patricia）、斯滕伯格（Sternberg）等学者。其中，斯滕伯格（1994）通过比较元认知和认知两者的区别与联系，从而提出元认知的含义，即“关于认知的认知”，包含对个体的知识和策略的监控、领会^⑦。关于元认知概念的界定各学者众说纷纭，但目前最具代表性的仍是弗拉维尔所提出的观点，其界定了元认知最基本的特征，即以认知活动本身为认知对象。

在我国，较早对元认知的概念进行研究的学者是刘范和张梅玲（1984），他们表示元认知（文中被翻译为“解悟认知”）与我国心理学界在五十年代时所探讨的自觉性、

^① 姜英杰.元认知研究的历史源流与发展趋势[J].东北师大学报(哲学社会科学版),2007(02):156-161.

^② 董奇.论元认知[J].北京师范大学学报,1989(01):68-74.

^③ Nelson T O. Consciousness and metacognition[J]. *American Psychologist*, 1996, 51(2):102-116.

^④ Flavell J H. Metacognitive aspects of problem solving[J]. *Nature of Intelligence*, 1976:232.

^⑤ 汪玲,郭德俊.元认知的本质与要素[J].心理学报,2000(04):458-463.

^⑥ Brown A L. Knowing When, Where, and How to Remember: A Problem of Metacognition[J]. *Advances In Instructional Psychology*, 1978(1): 77-165.

^⑦ Sternberg R J. *Encyclopedia of Human Intelligence*. Vol. 2[M]. Macmillan Publishing House, 1994: 725.

能动性相近,指的是个体能够认识并指导自己的认知活动^①。董奇(1989)的表述突出自我性,认为元认知的实质在于个体在投入认知活动的同时对其所进行的自我意识和自我约束^②。郭成(1998)指出:元认知是个体关于自身认知活动所包含的过程以及结果的认知、自我意识和体验,并对认知活动起到计划、推进、调控的作用^③。汪玲等人(2000)认为元认知是一种活动过程,实质是个体对眼下的认知活动的认知调节,其中,调节活动主要包括监测与控制这两种相互依存、循环往复基本过程^④。

(2) 元认知的结构

随着学者们对元认知研究的不断深入,元认知的结构也逐渐成为一个研究热点。布朗(1978)提出:关于认知的知识和认知调节是元认知的两个组成成分。前者指个体本身所拥有的认知资源的知识,以及与认知情境相容的那部分知识;后者是指个体采取一系列调节技能(如计划、监测等)来解决问题的调节机制^⑤。弗拉维尔(1979)则认为元认知组成的成分为元认知知识和元认知体验,其中,元认知知识是一些认知因素(如认知主体、任务、目标、策略等)对个体的认知活动造成影响的知識。元认知体验是伴随智力活动而产生的认知情感体验^⑥。

国内学界对于元认知结构划分的观点,大致可以分为二维度论与三维度论。在二维度论中,张荣声(1995)认为元认知是由两部分组成:一是元认知知识,二是元认知活动的监控。前者指以元认知体验为基础,能使认知能力与学习情境达到平衡状态的,与认知规律有关的知识。后者指个体结合知识和心理结构的特征,调控自己的认知过程,从而随时调整思维活动的方向与选择策略,最终达到快捷、高效地完成认知目标的最佳“工作状态”^⑦。程素萍(1996)指出元认知的组成要素为认知知识和认知调节,这一主张与布朗一致^⑧。杜晓新(1997)则与弗拉维尔的观点一致,认为元认知主要包括元认知知识和元认知体验两方面^⑨。在三维度论中,董奇(1989)指出:元认知包括元认知知识、元认知体验以及元认知监控这三个紧密联系的成分,其中元认知监控是个体以认知活动为意识对象,一直对其进行能动地监控和调节,主要有制定计划、实际控制、检查结果与采取补救措施这几个方面^⑩。汪玲等人(2002)认为

^① 刘范,张梅玲.美国认知发展研究近况简介[J].心理学报,1984(03):339-346.

^② 董奇.论元认知[J].北京师范大学学报,1989(01):68-74.

^③ 郭成.智力研究的新思路——元认知研究[J].南京师大学报(社会科学版),1998(03):79-84.

^④ 汪玲,郭德俊.元认知的本质与要素[J].心理学报,2000(04):458-463.

^⑤ Brown A L. Knowing When, Where, and How to Remember: A Problem of Metacognition[J]. *Advances In Instructional Psychology*, 1978(1): 77-165.

^⑥ Flavell J H. Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive-developmental inquiry[J]. *American Psychologist*, 1979: 906-911.

^⑦ 张荣声.元认知对提高数学思维能力的作用——元认知与数学思维的关系初探[J].数学通报,1995(08):50+1-5.

^⑧ 程素萍.问题解决中的元认知研究综述[J].教育理论与实践,1996(03):16-19+60.

^⑨ 杜晓新.元认知在认知活动中的作用——兼论如何培养学生的元认知能力[J].上海师范大学学报(哲学社会科学版),1992(03):136-139+135.

^⑩ 董奇.论元认知[J].北京师范大学学报,1989(01):68-74.

元认知包括元认知知识、元认知体验、元认知技能这三个基本要素,其中元认知技能是指个体对认知活动进行计划、检查、监测等一系列调节操作的技能^①。此外,主张三维度论的学者还有李玉琪(1995)^②、郭成(1998)^③、陈英和(1996)^④等人。

(二) 数学元认知的概念及结构

20 世纪 90 年代,我国有关元认知的研究才慢慢融入数学教育领域。

研究初期,研究者主要从理论层面对数学元认知的概念和结构进行定性分析。黄晓学(1993)认为数学元认知是个体对数学认知活动的认识与监控,并由数学元认知知识、数学元认知体验以及数学元认知监控组成,分别是元认知的前提、基础和关键^⑤。同样持有这一观点的学者还有李建才和张生春(1998)^⑥、涂荣豹(2002)^⑦等人,但他们是结合数学解题活动对数学元认知进行研究。此外,欧慧谋和唐剑岚(2012)通过梳理国内数学元认知的相关研究,指出学界对数学元认知的概念与结构基本达成了共识:数学元认知是个体对数学认知活动的认识,实质是人们对数学认知活动进行自我意识和自我调节,由数学元认知知识、数学元认知体验以及数学元认知调控 3 个成分组成^⑧。

随着相关研究逐步推进,研究者便开始依靠定量的方法对数学元认知的概念和结构进行研究。章建跃和林崇德(2000)认为数学学科自我监控能力是指学生以自身的数学活动为意识对象,并积极主动地对其进行计划、检测、调节等操作,以达到完成预期目标的能力。他们通过因素分析,确定其包括计划、检验、调节、管理与评价 5 个因素^⑨。唐剑岚等人(2005)从实证的角度出发,通过探索性因素分析和验证性因素分析,得出数学问题解决活动中的元认知结构包括“三主因素九次因素”,^⑩。王光明、崔宝蕊等人(2016, 2018, 2021)在唐剑岚、章建跃、喻平等学者编制的测量工具的基础上,综合已有文献与专家意见,确定了针对不同学段学生的数学学习过程的问卷维度,包括 3 个一级维度和 10 个二级维度,具体划分为元认知知识(包括关于个体的知识、关于任务的知识、关于策略的知识)、元认知体验(包括认知体验、情感体验)和元认知监控(包括定向与计划、组织与管理、监控与调节、反馈与检验、反思与评价)^{⑪⑫⑬}。其中,数学元认知各一级维度的操作性定义如表 2-2 所示,数学

^① 汪玲,郭德俊,方平.元认知要素的研究[J].心理发展与教育,2002(01):44-49.

^② 李玉琪,黄晓学.试析数学认知活动中的元认知[J].数学教育学报,1995(04):26-29.

^③ 郭成.智力研究的新思路——元认知研究[J].南京师大学报(社会科学版),1998(03):79-84.

^④ 陈英和.认知发展心理学.杭州:浙江人民出版社[M].1996:312-344.

^⑤ 黄晓学.数学元认知在数学问题解决中的作用[J].数学教育学报,1993(02):88-89.

^⑥ 李建才,张生春.试论数学解题活动中的元认知[J].首都师范大学学报(自然科学版),1998(02):3-8.

^⑦ 涂荣豹.数学解题学习中的元认知[J].数学教育学报,2002(04):6-11.

^⑧ 欧慧谋,唐剑岚.国内数学元认知的研究与思考[J].课程·教材·教法,2012,32(05):58-61.

^⑨ 章建跃,林崇德.中学生数学学科自我监控能力的发展[J].中国教育学报,2000(04):46-49.

^⑩ 唐剑岚,周莹,汤服成.数学问题解决中的元认知问卷量表的设计[J].数学教育学报,2005(04):48-52.

^⑪ 王光明,余文娟,王兆云.高中生数学元认知水平调查问卷的设计与编制[J].心理与行为研究,2016,14(02): 152-161.

元认知各二级维度的操作性定义如表 2-3 所示。

表 2-2 数学元认知各一级维度的操作性定义

一级维度	操作性定义
数学元认知知识	学生关于自己和他人数学认知活动过程、数学任务、学习策略等方面的陈述性知识和程序性知识。
数学元认知体验	学生在数学学习活动中所产生的认知和情感的体验。
数学元认知监控	学生对自身数学认知活动进行积极主动的监控、检验、评价和调节。

表 2-3 数学元认知各二级维度的操作性定义

一级维度	二级维度	操作性定义
数学元认知知识	关于个体的知识	学生对自身和他人的数学学习能力、知识储备、学习情况的认知。
	关于任务的知识	学生对数学问题的性质、目的、要求等方面的认知，以及对数学知识的思考与迁移。
	关于策略的知识	学生在进行数学知识学习与解决数学问题时，对数学知识和技能运用、策略的选择及选择原因等的认知。
数学元认知体验	认知体验	学生对数学知识的难易程度、熟悉程度的体验，还有学生在克服数学困难与认知障碍等方面的体验。
	情感体验	学生在数学学习过程中的各类情感体验，如成就感、挫败感等。
数学元认知监控	定向与计划	学生根据实际情况安排的数学学习计划和解题策略，如确定学习目标、选择学习和解题方法等。
	监控与调节	学生对自身数学学习状况的感知与调节，如调整解题步骤和方法、调控学习情绪等。
	反思与评价	学生通过回顾来复盘数学学习中的得失，并对其进行反思和评价，包括对学习策略合理性和有效性的评价、对学习和解题失败经验或教训的反思等。

^⑫ 崔宝蕊,李健,王光明.初中生数学元认知水平调查问卷的设计与编制[J].数学教育学报,2018,27(03):45-51.
^⑬ 王光明,邱冬,李健.小学生数学元认知水平调查问卷的设计与编制[J].考试研究,2021,17(01):70-78.

反馈与检验	学生对数学学习成果的反馈和检验,还有对学习策略或解题方法的判断与推广。
组织与管理	学生对数学知识和数学问题的剖析和组织、管理和控制,如专心理解某一新的数学概念的定义。

2.2.2 数学元认知的测量工具

国外关于元认知的测量方式主要分成在线测量和离线测量两类,但也慢慢倾向于综合使用两种测量方法进行研究。

在线测量的方法有出声思维法(think-aloud protocols)、日志文件法(logfile)、观察法(observation)等。其中,出声思维法要求被试运用口头语言尽可能详细地说出自己执行任务的思维过程。日志文件法的操作过程主要是:先呈现学习任务,然后将被试完成学习任务的过程记录在日志文件中,接着会按照编码方案自动进行编码,最后由研究者根据日志文件对被试的元认知进行分析研究。观察法则是观察被试在解决问题过程中的种种行为,从而评估被试的元认知水平^①。

相较于在线测量,离线测量由于它本身可用于测量大样本的优点,使其应用更为广泛,主要以问卷和访谈的形式进行。访谈法能帮助研究者对学生学习的思维过程有更深入的了解,可以用来评价元认知知识和元认知监控。比如,1998年,斯蒂尔曼(G. A. Stillman)和加尔布雷思(P. L. Galbraith)设计的访谈内容是以问题解决过程为主线的,并围绕着定向、组织、执行、验证、信念这5个角度对初中生展开访谈调查,从而评估学生的数学问题解决元认知水平^②。目前,比较常用的问卷有施劳(G. Schraw)和丹尼森(R. S. Dennison)于1994年设计的《元认知意识量表》(Metacognitive Awareness Inventory,简称MAI)^③;唐宁(K. J. Downing)于2009年创建的《学习策略量表》(Learning and Study Strategies Inventory,简称LASSI)中的《元认知策略分量表》^④。随后,祖尔基普利(N. Zulkiply, 2009)以73名中学生为研究对象,采用MAI量表对其进行调查研究,结果表明:MAI信效度良好,其中总量表的信度为0.89,各分量表的信度为0.79、0.84^⑤。

国内学者也开始研制符合中国学生特点的数学元认知测量工具,主要也是以问卷和访谈的形式为主。我国在数学元认知问卷的编制方面有以下3个特点^⑥:

^① 谢云天.初中生元认知的发展特点及其与数学学业成绩的关系[D].湖南师范大学,2021.

^② Stillman G A, Galbraith P L. Applying mathematics with real world connections: Metacognitive characteristics of secondary students[J]. *Educational Studies in Mathematics*, 36(2): 157-194.

^③ Schraw G, Dennison R S. Assessing metacognitive awareness[J]. *Contemporary Educational Psychology*, 19(4): 460-475.

^④ Downing K J. Self-efficacy and metacognitive development[J]. *International Journal of Learning*, 16(4):185-199.

^⑤ Zulkiply N. Metacognition and its relationship with students' academic performance[J]. *The International Journal of Learning*, 15(11):91-106.

^⑥ 王光明,余文娟,王兆云.高中生数学元认知水平调查问卷的设计与编制[J].心理与行为研究,2016,14(02): 152-161.

一是针对数学问题解决过程。比如,唐剑岚等人(2005)通过梳理国内外有关元认知的相关研究,编制出《数学问题解决中的元认知问卷量表》,研究对象主要为中学生和大学生,前后经过三次测试终于确定了“三主因素九次因素”,正式量表共37个题项,总体量表的信度高达0.901,各子量表的信度为0.533~0.820,信效度较好^①。

二是针对数学元认知的某一维度。其中,比较具有代表性的是章建跃(2003)在论述数学学习、解决数学问题等过程的基础上,自编了《数学学科自我监控能力问卷》,该问卷信效度较高,包括计划、调节、检验、管理、评价5个因素^②。

三是针对不同学段的数学学习过程。王光明等人(2016, 2018, 2021)在唐剑岚、章建跃、喻平等学者编制的测量工具的基础上,编制适用于不同学段学生的数学元认知问卷,分别是《小学数学元认知水平调查问卷》(共36题)、《初中数学元认知水平调查问卷》(共33题)、《高中数学元认知水平调查问卷》(共55题),这些问卷包含3主维度和10子维度,且信效度良好。并且,他们在后续的研究中会以这三份问卷作为调查工具,确立不同学段学生的数学元认知常模及其水平等级标准,并提出针对性的教学建议。与此同时,这三份问卷也是我国当前较为权威、广泛应用的数学元认知问卷。

2.2.3 数学元认知的研究现状

目前,学界关于元认知的研究不囿于理论层面,开始关注教育领域的实证研究,尤其是数学学科。同时,研究者也会基于所得研究结论提出相关培养建议。关于数学元认知的研究现状,主要集中在以下4个方面。

一是只对数学元认知水平进行研究。杨国章(2007)曾采用问卷调查的方式,对132名高中生的数学元认知水平展开分析,发现在元认知知识方面,大多数学生的自主学习能力一般,学习目的性、主动性较差;在元认知体验方面,学生在学习过程中具备较强的自我意识能力,但反思习惯差,对学习结果的体验较弱;在元认知监控方面,学生缺乏反馈和补救意识,学习策略匮乏,并且在学习的坚持性上较弱,缺乏深刻性。他结合以上结论,要求数学教师应该主动提高自身运用元认知教学的意识,将元认知理论渗透于教学之中,并充分利用课堂教学,重视元认知操作的培养,从而提高学生的数学元认知能力^③。胡映恒(2016)采用问卷调查法和访谈法,以196名初中生进行统计研究后发现,初中生整体的数学元认知水平良好;不存在年级差异、性别差异,但存在显著的成绩差异。并提出提高初中生数学元认知水平的教学建议:创设问题情境,感知元认知知识;教授训练策略,增强元认知体验;注重课后反思,提

^① 唐剑岚,周莹,汤服成.数学问题解决中的元认知问卷量表的设计[J].数学教育学报,2005(04):48-52.

^② 章建跃.中学生数学学科自我监控能力[M].上海:华东师范大学出版社.

^③ 杨国章.高中数学教学中元认知能力培养研究[D].湖南师范大学,2006.

升元认知监控^①。

二是研究数学问题解决中的数学元认知。问题是数学的心脏，问题解决的过程中也包含着元认知活动。梅瓦雷奇和泽米拉（Mevarech & R. Zemira, 1999）围绕着色列 174 名七年级学生展开有关数学问题解决的研究，并将他们分成 3 组：元认知训练组、直接策略指导组、控制组。研究者让元认知训练组讨论三类问题（理解性问题、比较性问题和策略问题），为直接策略组介绍图标策略的使用方法，对控制组不做任何训练。最终笔试结果显示：3 组问题解决能力水平先后排序为元认知训练组、直接策略指导组、控制组，因此，他们得出结论，即元认知训练能有效提高学生的数学问题解决能力^②。朱德全（1997）从理论层面分析数学问题解决的表征和元认知之间的关系，指出元认知不仅能够修正数学问题解决的目标，激活、修改问题解决策略，还能强化解题者在解题过程中的主体意识。他还提出在教学中，教师开发学生的元认知可以采取激励与强化目标意识、创设思维情景、重视知识发生过程、构建知识网络、注重及时反馈的策略^③。汤服成等人（2005）采用自编的静动态元认知调查问卷，对 102 名初一学生在数学问题解决中的元认知展开调查，结果显示：静态、动态元认知和问题解决能力、数学学业成绩密切相关，尤其是动态元认知，与两者有着高度相关性^④。

三是将数学元认知与数学思维品质结合起来进行研究。庞静（2014）采用问卷调查法对高中生的数学元认知和数学思维品质（包括思维的深刻性、广阔性、灵活性、独创性、批判性和敏捷性）的相关性展开研究，发现数学元认知和数学思维品质整体呈正向的相关关系，其中思维的灵活性、深刻性与元认知之间具有最高的相关程度^⑤。

四是关于数学元认知与数学学业成绩的研究。卡尔和杰赛普（M. Carr & D. L. Jessup, 1995）的研究结果表示元认知知识与数学学业成绩密切相关，并显著影响小学低年级学生的策略实施情况^⑥。施耐德和阿泰尔特（W. Schneider & C. Artelt, 2010）对 15 岁学生的元认知进行 PISA 测试，结果表明元认知指标在数学成绩方差中占大约 18%的比重^⑦。同样持有这一观点的还有 Ohtani 和 Hisasaka (2018)，他们分别采用在线工具（大声思考和日志文件）与离线工具（问卷和访谈）对儿童进行研究后得出此结论^⑧。喻平（2004）对 143 名中学生进行实证调查研究，结果表明元认知对数学

^① 胡映恒. 初中生数学元认知现状分析及培养策略研究[D].湖南师范大学,2015.

^② Mevarech, Zemira R. Effects of Metacognitive Training Embedded in Cooperative Settings on Mathematical Problem Solving[J]. *Journal of Educational Research*, 1999, 92(4): 195-205.

^③ 朱德全. 数学问题解决的表征及元认知开发[J]. 教育研究, 1997(03): 50-54.

^④ 汤服成, 郭海燕, 唐剑岚. 初一学生数学问题解决中的动静态元认知研究[J]. 数学教育学报, 2005(01): 59-62.

^⑤ 庞静. 高中生元认知与数学思维品质相关性研究[D]. 南京师范大学, 2014.

^⑥ Carr M, Jessup D L. Cognitive and metacognitive predictors of mathematics strategy use[J]. *Learning & Individual Differences*, 1995, 7(3): 235-247.

^⑦ Schneider W, Artelt C. Metacognition and mathematics education[J]. *ZDM*, 2010, 42(2): 149-161.

^⑧ Annemie Desoete, Brigitte Craene. Metacognition and mathematics education: an overview[J]. *ZDM*, 2019, 51(4).

成绩有显著影响,成绩越优秀则元认知水平越高^①。谢云天等人(2021)应用 NVivo 软件,对 141 名初中生所撰写的主题为“我怎样学习数学”的文章进行编码、分析,并收集学生最近一次的数学期中考试成绩,分成高分组、中间组、低分组,调查结果显示:数学学业成绩与元认知有着非常密切的关系,高分组的元认知表现显著优于其他两组^②。

2.3 数学批判性思维与数学元认知关系的研究综述

李文婧等(2012)曾在研究数学批判性思维的影响因素中指出,学生的数学元认知能力是数学批判性思维顺利开展的重要条件^③。但由于在数学教育领域中,鲜有学者系统研究数学批判性思维与数学元认知的关系,所以为进一步了解两者间具体的因果关系,本文将从理论研究和实证研究两个方面梳理批判性思维和元认知之间的联系。

在理论研究方面,国外学者 Kuhn(1999)指出元认知是批判性思维发展的重要基础,由于两者能相互促进,因此批判性思维的教学应与发展元认知能力同步进行^④。Magno(2010)认为反思是元认知和批判性思维联系的桥梁^⑤。国内学者罗英(2019)从差异性和相通性出发,分别探讨了批判性思维与元认知的关系,认为二者思维对象、特性和过程有所不同,具体表现在前者以思维方式本身为思考对象,更具公正性;而相较于前者,后者的思维对象更为广泛,主要以认知过程为思维对象,更强调认知的调节性。但是,对于现实的反思性、过往的超越性以及未来的建构性上具有相通性。她还指出批判性思维和元认知的作用是相辅相成的。其中,元认知是批判性思维认知构建的基础,而批判性思维是元认知发展的集中体现,二者的有机融合有利于科学思维的形成,实现深层次学习,还能帮助学生克服思维的刻板 and 保守,发展创新意识^⑥。同样持有这一观点的还有何懿雯和王祖浩(2006)^⑦、肖薇薇(2015)^⑧、王建和李如密(2018)^⑨等学者,他们均认为批判性思维和元认知存在紧密的正向关系,即发展学生的批判性思维能提高其元认知能力,反之亦然。总的来说,元认知的计划、调节和监控的思维过程中蕴含着批判性思维,它是主体发展高质量思维的支持基础。元认知能使主体在批判性思考的过程中更具理性,不受条条框框的限制,不断根据现实需求调节自身的思维方式,从而作出更合理的决策。而批判性思维能让主体积极启动元

^① 喻平.中学生自我监控能力和 CPFS 结构对数学学业成绩的影响[J].数学教育学报,2004(01):23-26+35.

^② 谢云天,史滋福,钟婷,张卫.不同数学学业成绩初中生在元认知上的比较:基于 NVivo 的质性分析[J].教育研究与实验,2021(02):86-91.

^③ 李文婧,傅海伦.数学批判性思维的影响因素及其培养[J].中国成人教育,2012(18):124-125.

^④ Deanna Kuhn. A Developmental Model of Critical Thinking[J]. *Educational Researcher*,1999,28(2): 16-46.

^⑤ Magno C. The role of metacognitive skills in developing critical thinking[J]. *Metacognition and Learning*, 2010, 5(2): 37-156.

^⑥ 罗英.批判性思维与元认知的关系探析[J].教育理论与实践,2019,39(23):3-5.

^⑦ 何懿雯,王祖浩.国外教学中的元认知研究新进展[J].上海教育科研,2006(05):56-59+31.

^⑧ 肖薇薇.批判性思维缺失的教育反思与培养策略[J].中国教育学刊,2015(01):25-29.

^⑨ 王建,李如密.批判性思维与创新思维的辨析与培育[J].课程.教材.教法,2018,38(06):53-58.

认知,提高主体监控自身认知过程和行为意识,并使思维过程更具客观公正性和开放性,养成自觉分析、时刻质疑自己思想和观点的良好习惯。

在实证研究方面,Sadeghi等(2014)对两所语言学院的102名学生进行问卷调查研究,结果表明批判性思维与元认知呈正相关^①。Arslan(2015)针对土耳其的萨卡里亚大学中的390名大学生展开研究,通过结构方程模型来检验批判性思维和元认知之间的关系,研究结果亦显示两者存在显著的正向相关关系^②。此外,还有Buku等(2016)^③,Naimnule和Corebima(2018)^④等学者在不同学科领域或对不同阶段的学生所展开的实证调查研究结果均表明,批判性思维和元认知之间呈现出显著正相关。国内学者所得研究结论与国外学者的研究结论基本一致。例如,吕磊和张正厚(2014)通过实证调查探究元认知、批判性思维和自主学习三者关系时,发现批判性思维在其余两者之间存在显著的部分中介效应,并且元认知对批判性思维有着显著的影响作用^⑤。

可见,国内有关批判性思维和元认知的关系研究主要偏重理论研究,实证研究成果占比相对较少。然而,在数学教育领域中尚无学者通过实证研究探究数学批判性思维和数学元认知的关系,因此,对两者关系进行学科化探讨的实证研究十分有意义。

2.4 概念界定

2.4.1 数学批判性思维倾向

数学批判性思维是指在数学学习活动中,学生以已有的数学表述和数学思维过程、结果为思维对象,有目的、有意识地对其进行自我调节性分析、独立性评判、逻辑性推理、合理性解释和灵活性调控的个性品质。

数学批判性思维倾向是指在数学学习活动中,学生具有独立性和开放性的思想、积极自信的学习态度和强烈的求知欲望,能够客观看待已有数学表述和数学问题,拥有主动关联知识、系统化归纳知识和分析问题的思维习惯,以及对数学思维过程、结果作出审慎判断的思维能力。

^① Sadeghi B, Hassani M T, Rahmatkhan M. The Relationship between EFL Learners' Metacognitive Strategies, and Their Critical Thinking[J]. *Journal of Language Teaching & Research*, 2014, 5(5): 1167-1175.

^② Arslan S. Investigating Predictive Role of Critical Thinking on Metacognition with Structural Equation Modeling[J]. *Malaysian Online Journal of Educational Sciences*, 2015, 3(2):1-10.

^③ Buku M N I, Corebima A D, Rohman F. The correlation between metacognitive skills and the critical thinking skills of the senior high school students in biology learning through the implementation of problem based learning (PBL) in Malang, Indonesia[J]. *International Journal of Academic Research and Development*, 2016, 1(5): 58-63.

^④ Naimnule L, Corebima A D. The Correlation between Metacognitive Skills and Critical Thinking Skills toward Students' Process Skills in Biology Learning[J]. *Journal of Pedagogical Research*, 2018,2(2): 122-134.

^⑤ 吕磊,张正厚.批判性思维在元认知与自主学习之间的中介效应分析[J].中国高等医学教育,2014,No.215(11):57+74.

2.4.2 数学元认知

数学元认知是指个体对数学认知活动的认知，也是个体对数学认知活动进行自我意识、用心体验、客观评价和主动调控的过程，由数学元认知知识、数学元认知体验以及数学元认知监控构成。

2.4.3 数学学业成绩

数学学业成绩是指学生在数学科目考试中的成绩，一般用来检测学生经过短期或长期教育后的学习效果，以衡量其达到教育目标的程度。

2.5 研究假设

首先，通过梳理已有相关文献可知，大多学者通过实证研究证实了数学批判性思维倾向和数学学业成绩之间具有较高的关联性（马净净，2017；朱展霖，2021 等），数学元认知和数学学业成绩之间亦具有密切的相关性（喻平，2004；谢云天等，2021 等），数学批判性思维倾向和数学元认知均能正向影响数学学业成绩。

其次，在数学教育领域中，仅有少数学者从理论层面上系统论述数学批判性思维和数学元认知之间的因果关系（缪雪松，2010；李文婧，傅海伦，2012 等），尚未通过实证研究加以证实。而对于批判性思维和元认知，部分学者分别从理论和实证层面上探讨了二者间的逻辑关系，这也为之后在数学教育领域中研究二者关系提供了一定的理论依据。其中，在理论研究方面，Kuhn（1999）和罗英（2019）等学者均指出元认知是批判性思维发展的重要基础，两者能相互促进；在实证研究方面，Sadeghi 等人（2014）和 Arslan（2015）等学者均发现批判性思维与元认知呈正相关。因此，基于以上研究成果，提出以下研究假设：

H1：数学批判性思维倾向、数学元认知和数学学业成绩三个变量，两两之间相关性显著；

H2：数学批判性思维倾向、数学元认知对数学学业成绩均具有正向预测作用；

H2a：数学元认知对数学学业成绩具有正向预测作用；

H2b：数学批判性思维倾向对数学学业成绩具有正向预测作用；

最后，对于数学批判性思维、数学元认知和数学学业成绩之间的逻辑关系，李文婧等（2012）曾指出，学生的数学元认知能力是数学批判性思维顺利开展的重要条件。罗英（2019）亦表示元认知是批判性思维认知构建的基础，而批判性思维是元认知发展的集中体现。并且，数学批判性思维、数学元认知均能正向影响数学学业成绩。因此，基于上述剖析，进而提出以下研究假设：

H3：数学批判性思维倾向在数学元认知和数学学业成绩之间起中介作用；

H4：数学批判性思维倾向各维度在数学元认知和数学学业成绩之间起中介作用；

综上所述，本研究综合已有研究成果，剖析了数学批判性思维、数学元认知和数学学业成绩之间的逻辑关系，明确提出以下研究假设模型和研究假设，如图 2-1 和表 2-4 所示。

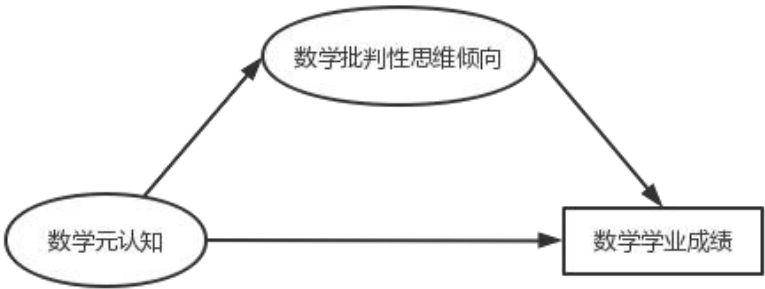


图 2-1 研究假设模型简图

表 2-4 研究假设

H1: 数学批判性思维倾向、数学元认知和数学学业成绩三个变量，两两之间相关性显著
H2: 数学批判性思维倾向、数学元认知对数学学业成绩均具有正向预测作用
H2a: 数学元认知对数学学业成绩具有正向预测作用
H2b: 数学批判性思维倾向对数学学业成绩具有正向预测作用
H3: 数学批判性思维倾向在数学元认知和数学学业成绩之间起中介作用
H4: 数学批判性思维倾向各维度在数学元认知和数学学业成绩之间起中介作用

2.6 小结与思考

本研究从概念与结构、测量工具、研究现状及培养策略这几个方面，对数学批判性思维倾向和数学元认知的相关文献进行系统梳理后，得出以下几点结论：

一是目前国内外学术界关于数学批判性思维倾向的概念尚未统一，维度划分较为明确，而数学元认知概念的界定和结构的划分基本一致。

二是国外关于批判性思维倾向的测量工具非常丰富，国内的测量工具大多是在此基础上的翻译和修订，数学学科化的测量工具目前较为缺乏且不够成熟；国外关于数学元认知的测量工具也十分多元化，国内主要以问卷和访谈的形式为主，且量表较为成熟。

三是国内外学者主要采用问卷调查的形式对学生的数学批判性思维倾向和数学元认知进行实证研究，并从研究结果中总结出针对性的培养策略。

四是国内学者更倾向于将批判性思维的培养融入具体学科之中，但大多是在理论层面上提出培养策略，目前仍处于尝试阶段，其有效性未经过大量的实践论证。

五是在关于数学批判性思维倾向、数学元认知和数学学业成绩三者之间关系的论述上，已有研究从理论和实证层面上证实了数学批判性思维倾向和数学学业成绩的关系、数学元认知和数学学业成绩的关系，而对于批判性思维和元认知二者关系的探讨仅停留在理论层面，放在数学教育领域中，更是鲜有学者系统研究数学批判性思维与数学元认知的关系，甚至尚无学者通过实证研究探究二者关系。

因此，基于上述结论，通过实证研究系统探讨数学批判性思维倾向、数学元认知和数学学业成绩三者之间关系和作用机制是十分有必要的，并且具有一定的可行性，如此不仅能促进批判性思维倾向的研究学科化发展，完善数学教育研究领域中的理论背景，还能为高中生数学思维的培养提供新视野，进而提升高中生的数学学业成绩。

第3章 研究设计

3.1 调查问卷的设计

本研究的调查问卷《高中生数学批判性思维倾向和数学元认知的调查问卷》包括指导语、基本信息和量表三个部分。其中，基本信息包括性别、年级、班级、数学学业成绩、是否担任学生干部、班主任、数学喜爱程度；量表包括高中生数学批判性思维倾向量表、高中生数学元认知量表。

3.1.1 高中生数学批判性思维倾向量表

本研究所编初始量表《高中生数学批判性思维倾向量表》是参照“加利福尼亚州批判性思维倾向量表”（CCTDI）、罗清旭修订的“CCTDI 中文版”和彭美慈团队制订的“批判性思维能力测量表”（CTDI-CV）得来的，原量表的题项约 70 道，但由于高中生学业繁忙，且为了避免由于题目过多造成问卷数据失真的情况，于是根据高中生的个性心理特征、认知水平以及数学学习特点，对上述量表的部分题项进行引用、删减和修订，包括寻找真相、开放思想、分析性、系统性、自信心、求知欲、认知成熟度七个维度，共 30 道题目。量表采用李克特 5 点计分法，选项“非常符合”、“符合”、“不确定”、“不符合”、“非常不符合”依次计为“5”、“4”、“3”、“2”、“1”分，分数越高表示高中生的数学批判性思维倾向越强。

3.1.2 高中生数学元认知量表

本研究所编初始量表《高中生数学元认知量表》是参照王光明、崔宝蕊等人编制的“高中生元认知水平调查问卷”（共 55 题）和“初中生元认知水平调查问卷”（共 36 题）得来的，但由于高中生学业繁忙，且为了避免由于题目过多造成问卷数据失真的情况，因此对上述量表的部分题项进行引用和删减，包括数学元认知知识（子维度为关于个体的知识、关于任务的知识、关于策略的知识）、数学元认知体验（子维度为认知体验、情感体验）、数学元认知监控（子维度为定向与计划、组织与管理、监控与调节、反馈与检验、反思与评价）三个维度，共 40 道题目。量表采用李克特 5 点计分法，选项“非常符合”、“符合”、“不确定”、“不符合”、“非常不符合”依次记为“5”、“4”、“3”、“2”、“1”分，分数越高表示高中生的数学元认知水平越高。

3.1.3 高中生数学学业成绩

为了提高研究结果的有效性和真实性，降低单一成绩的偶然性影响，本研究所采用的高中生数学学业成绩是学生最近几次大型数学考试成绩的平均分数，如月考、期中考、期末考等出题、监考及阅卷都相对严格和公平公正的大规模考试。并将高中生

数学平均成绩划分为 5 个分数段：“131-150”、“111-130”、“91-110”、“71-90”、“70 及以下”，学生根据实际平均分数进行勾选即可，如此不仅能更好地保护学生的个人隐私，也便于后续研究结果的分析。

3.2 预调查

3.2.1 研究对象

预调查样本来自柳州市一所重点高中的高一年级的学生，共发放问卷 154 份，剔除漏答、多答、测谎题得分差值大于 3 及以上或者测谎题答案不符合题意的无效问卷，得到有效问卷 136 份，问卷有效回收率为 88.31%。其中男生 57 人，女生 79 人。预调查样本的基本情况如表 3-1 所示。

表 3-1 预调查对象基本信息统计表

人口学变量	类别	人数	占比
性别	男	57	41.9%
	女	79	58.1%
数学学业成绩	131-150	10	7.4%
	111-130	21	15.4%
	91-110	42	30.9%
	71-90	41	30.1%
	70 及以下	22	16.2%
学生干部	是	42	30.9%
	否	94	69.1%
班主任	数学教师	46	33.8%
	其他教师	90	66.2%
数学喜爱程度	非常喜欢	18	13.2%
	喜欢	53	39.0%
	不确定	45	33.1%
	不喜欢	13	9.6%
	非常不喜欢	7	5.1%

3.2.2 研究工具

采用《高中生数学批判性思维倾向和数学元认知的调查问卷（初始卷）》对被试展开预调查，包括指导语、基本信息和量表三个部分。

3.2.2.1 高中生数学批判性思维倾向量表

预调查采用的《高中生数学批判性思维倾向量表》包括寻找真相、开放思想、分析性、系统性、自信心、求知欲、认知成熟度七个维度，共 30 道题目，均采用李克特 5 点计分法，分数越高表示高中生的数学批判性思维倾向越强。量表的具体结构和题目分布情况如表 3-2 所示。

表 3-2 高中生数学批判性思维倾向量表预调查的结构和题目分布

维度	题数	题号
寻找真相	5	1*、2*、3*、4*、5*
开放思想	4	6、7、8、9
分析性	4	10、11、12、13
系统性	4	14、15*、16、17*
自信心	5	18、19、20、21、22*
求知欲	5	23、24、25、26、27
认知成熟度	3	28*、29*、30*
总量表	30	

注：带*的题项为反向计分题

3.2.2.2 高中生数学元认知量表

预调查采用的《高中生数学元认知量表》包括数学元认知知识、数学元认知体验、数学元认知监控这三个一级维度，共 40 道题目，均采用李克特 5 点计分法，分数越高表示高中生的数学元认知水平越高。量表具体结构和题目分布情况如表 3-3 所示。

表 3-3 高中生数学元认知量表预调查的结构和题目分布

一级维度	二级维度	题数	题号
数学元认知知识	关于个体的知识	4	1、2、3、4
	关于任务的知识	3	6、7、8
	关于策略的知识	4	9、10、11、12
数学元认知体验	认知体验	4	13、14、15、16
	情感体验	3	17、18*、19
数学元认知监控	定向与计划	4	21、22、23、24
	监控与调节	4	25、26、27、28
	反思与评价	4	29、30、31、32
	反馈与检验	4	33、34、35、36
	组织与管理	3	37、38、39
	测谎题	3	5、20、40

注：带*的题项为反向计分题

3.2.3 预调查问卷的施测

由研究者担任主试，以班级为单位，利用班会课或者自习课的时间，采用纸质问卷对学生进行团体测试。在测试前，主试向全班学生说明统一的指导语，并强调不能漏答、多答以及乱填，一定要参照自身真实情况进行答题。由数学课代表当场发放和回收问卷，测试时间约为 20 分钟。

3.2.4 预调查量表的分析

3.2.4.1 项目分析

通过项目分析的方法来检验所编量表或每道题项的适切和可靠程度，其分析结果可作为量表题项筛选或修改的依据^①。本研究采用临界比值法和同质性检验法进行项目分析。

（1）临界比值法

第一步，将《高中生数学批判性思维倾向量表》的 30 道题依次编码为 A_A_1、A_A_2.....A_G_29、A_G_30，除去《高中生数学元认知量表》的测谎题第 5、20、40 题，其余 37 道题依次编码为 B_A_1_1、B_A_1_2.....B_C_5_38、B_C_5_39。检验数据无缺失值或错误值后，使用 SPSS25.0 将量表的反向题进行反向计分，并分别计算两个量表的总分。

第二步，将量表总分进行高低排列，分为高分组和低分组两组，前 27%定为高分组，后 27%定为低分组。其中，《高中生数学批判性思维倾向量表》的高分组为 109-136 分，低分组为 37-91 分；《高中生数学元认知量表》的高分组为 131-181 分，低分组为 49-110 分。

第三步，使用独立样本 t 检验进行极端组比较，检验高分组和低分组在每个题项上的差异。保留临界比值大于 3 ($t > 3.000$)，并达到显著性水平 ($p < 0.05$) 的题项，反之，则说明该题项鉴别度较差，需删除或修改题项。

《高中生数学批判性思维倾向量表》的检验结果如表 3-4 所示，虽然所有题项都达到 0.05(双尾)的显著性水平，但第 1、5 题的决断值较低($t_{A_A_1} = 2.750 < 3$; $t_{A_A_5} = 2.769 < 3$)，因此考虑删除或修改第 1、5 题。

^① 吴明隆.问卷统计分析实务——SPSS 操作与应用[M].重庆:重庆大学出版社,2010(5):158.

表 3-4 高中生数学批判性思维倾向量表独立样本 t 检验结果

题项	t 值	显著性（双尾）	题项	t 值	显著性（双尾）
判标准则	≥ 3.000	< 0.05	判标准则	≥ 3.000	< 0.05
A_A_1	2.750	0.008	A_D_16	7.038	0.000
A_A_2	9.235	0.000	A_D_17	5.970	0.000
A_A_3	8.180	0.000	A_E_18	9.617	0.000
A_A_4	10.483	0.000	A_E_19	8.541	0.000
A_A_5	2.769	0.007	A_E_20	5.051	0.000
A_B_6	4.625	0.000	A_E_21	9.769	0.000
A_B_7	5.856	0.000	A_E_22	7.832	0.000
A_B_8	5.715	0.000	A_F_23	4.636	0.000
A_B_9	6.685	0.000	A_F_24	9.216	0.000
A_C_10	4.507	0.000	A_F_25	7.542	0.000
A_C_11	6.498	0.000	A_F_26	7.253	0.000
A_C_12	5.273	0.000	A_F_27	4.131	0.000
A_C_13	4.298	0.000	A_G_28	3.443	0.001
A_D_14	4.913	0.000	A_G_29	5.381	0.000
A_D_15	6.444	0.000	A_G_30	4.852	0.000

《高中生数学元认知量表》的检验结果如表 3-5 所示，所有题项均达到 0.05（双尾）的显著性水平，决断值介于 3.557-10.323 之间，亦符合标准，无需删除任何题项。

表 3-5 高中生数学元认知量表独立样本 t 检验结果

题项	t 值	显著性（双尾）	题项	t 值	显著性（双尾）
判标准则	≥ 3.000	< 0.05	判标准则	≥ 3.000	< 0.05
B_A_1_1	6.971	0.000	B_C_1_21	7.522	0.000
B_A_1_2	6.105	0.000	B_C_1_22	8.924	0.000
B_A_1_3	8.183	0.000	B_C_1_23	8.486	0.000
B_A_1_4	5.587	0.000	B_C_1_24	9.158	0.000
B_A_2_6	5.859	0.000	B_C_2_25	6.798	0.000
B_A_2_7	7.507	0.000	B_C_2_26	6.970	0.000
B_A_2_8	6.173	0.000	B_C_2_27	4.903	0.000
B_A_3_9	6.327	0.000	B_C_2_28	7.065	0.000
B_A_3_10	7.895	0.000	B_C_3_29	10.323	0.000
B_A_3_11	5.634	0.000	B_C_3_30	8.741	0.000

B_A_3_12	5.663	0.000	B_C_3_31	7.291	0.000
B_B_1_13	5.536	0.000	B_C_3_32	7.745	0.000
B_B_1_14	7.663	0.000	B_C_4_33	5.698	0.000
B_B_1_15	7.957	0.000	B_C_4_34	5.446	0.000
B_B_1_16	3.557	0.001	B_C_4_35	7.165	0.000
B_B_2_17	5.857	0.000	B_C_4_36	7.129	0.000
B_B_2_18	5.749	0.000	B_C_5_37	8.356	0.000
B_B_2_19	4.623	0.000	B_C_5_38	8.580	0.000
			B_C_5_39	7.825	0.000

（2）同质性检验法

筛选题项的另一个指标为同质性检验。首先，使用双变量相关分析求出各个题项与总分的相关系数。相关系数越高，意味着题项与总量表的同质性越高，相关性也越强。一般剔除或修改相关系数小于 0.4，或相关未达显著水平（ $p < 0.05$ ）的题项。

《高中生数学批判性思维倾向量表》各题项与总分的相关系数如表 3-6 所示，所有相关性均达到 0.01（双尾）的显著水平，除了第 1、5、28 题相关系数较低（ $r_{A_A_1}=0.226 < 0.4$ ， $r_{A_A_5}=0.239 < 0.4$ ， $r_{A_G_28}=0.376 < 0.4$ ）之外，其余题项与总分的相关系数均在 0.419 以上，因此考虑删除或修改第 1、5、28 题。

表 3-6 高中生数学批判性思维倾向量表题项与总分的相关系数

题项	题项与总分 相关	题项	题项与总分 相关	题项	题项与总分 相关
判标准则	≥ 0.400	判标准则	≥ 0.400	判标准则	≥ 0.400
A_A_1	0.226**	A_C_11	0.601**	A_E_21	0.687**
A_A_2	0.621**	A_C_12	0.550**	A_E_22	0.618**
A_A_3	0.590**	A_C_13	0.496**	A_F_23	0.486**
A_A_4	0.611**	A_D_14	0.565**	A_F_24	0.682**
A_A_5	0.239**	A_D_15	0.522**	A_F_25	0.615**
A_B_6	0.419**	A_D_16	0.638**	A_F_26	0.633**
A_B_7	0.566**	A_D_17	0.552**	A_F_27	0.462**
A_B_8	0.506**	A_E_18	0.623**	A_G_28	0.376**
A_B_9	0.607**	A_E_19	0.625**	A_G_29	0.521**
A_C_10	0.483**	A_E_20	0.458**	A_G_30	0.507**

注：**表示显著性概率 $p < 0.01$

《高中生数学元认知量表》各题项与总分的相关系数如表 3-7 所示，所有相关性均达到 0.01（双尾）的显著水平，除了第 16 题相关系数较低（ $r_{B_1_16}=0.386<0.4$ ）之外，其余题项与总分的相关系数均在 0.427 以上，因此考虑删除或修改第 16 题。

表 3-7 高中生数学元认知量表题项与总分的相关系数

题项	题项与总分 相关	题项	题项与总分 相关	题项	题项与总分 相关
判标准则	≥ 0.400	判标准则	≥ 0.400	判标准则	≥ 0.400
B_A_1_1	0.630**	B_B_1_15	0.650**	B_C_3_29	0.727**
B_A_1_2	0.598**	B_B_1_16	0.386**	B_C_3_30	0.637**
B_A_1_3	0.664**	B_B_2_17	0.521**	B_C_3_31	0.659**
B_A_1_4	0.599**	B_B_2_18	0.503**	B_C_3_32	0.661**
B_A_2_6	0.480**	B_B_2_19	0.427**	B_C_4_33	0.565**
B_A_2_7	0.595**	B_C_1_21	0.625**	B_C_4_34	0.549**
B_A_2_8	0.581**	B_C_1_22	0.725**	B_C_4_35	0.656**
B_A_3_9	0.601**	B_C_1_23	0.729**	B_C_4_36	0.604**
B_A_3_10	0.684**	B_C_1_24	0.682**	B_C_5_37	0.721**
B_A_3_11	0.588**	B_C_2_25	0.636**	B_C_5_38	0.725**
B_A_3_12	0.630**	B_C_2_26	0.621**	B_C_5_39	0.686**
B_B_1_13	0.504**	B_C_2_27	0.534**		
B_B_1_14	0.672**	B_C_2_28	0.609**		

注：**表示显著性概率 $p<0.01$

其次，使用信度分析得到各个题项删除后总量表的克隆巴赫 α 系数，若其高于总量表原先的克隆巴赫 α 系数，则说明删除该题项后整体量表的信度增加，可以考虑剔除该题项。

《高中生数学批判性思维倾向量表》进行信度分析的项总计统计结果如表 3-8 所示，总量表的克隆巴赫 α 系数为 0.912，说明该量表信度非常理想。但是，第 1、5、6、28 题与总分的相关性较低，分别为 0.167、0.170、0.347、0.316，均小于 0.4 的标准值，其中第 1、5 题删除后，总量表的克隆巴赫 α 系数有所上升。因此，考虑删除或修改第 1、5、6、28 题。

表 3-8 高中生数学批判性思维倾向量表的项总计统计结果

题项	修正题项与 总分相关	题项删除后 的 α 值	题项	修正题项与 总分相关	题项删除后 的 α 值
----	---------------	-----------------------	----	---------------	-----------------------

判标准则	≥ 0.400	≤ 0.912	判标准则	≥ 0.400	≤ 0.912
A_A_1	0.167	0.914	A_D_16	0.605	0.907
A_A_2	0.574	0.907	A_D_17	0.504	0.908
A_A_3	0.539	0.908	A_E_18	0.580	0.907
A_A_4	0.560	0.907	A_E_19	0.584	0.907
A_A_5	0.170	0.914	A_E_20	0.409	0.910
A_B_6	0.347	0.912	A_E_21	0.650	0.906
A_B_7	0.526	0.908	A_E_22	0.573	0.907
A_B_8	0.465	0.909	A_F_23	0.430	0.910
A_B_9	0.571	0.908	A_F_24	0.642	0.906
A_C_10	0.444	0.909	A_F_25	0.572	0.907
A_C_11	0.571	0.908	A_F_26	0.596	0.907
A_C_12	0.514	0.909	A_F_27	0.406	0.910
A_C_13	0.451	0.909	A_G_28	0.316	0.912
A_D_14	0.524	0.908	A_G_29	0.478	0.909
A_D_15	0.479	0.909	A_G_30	0.459	0.909

《高中生数学元认知量表》进行信度分析的项总计统计结果如表 3-9 所示，总量表的克隆巴赫 α 系数为 0.953，说明该量表信度非常理想。但是，第 16、19 题与总分的相关性较低，分别为 0.352、0.384，均小于 0.4 的标准值，第 16、19 题删除后，总量表的克隆巴赫 α 系数有所上升。因此，考虑删除或修改第 16、19 题。

表 3-9 高中生数学元认知量表的项总计统计结果

题项	修正题项与 总分相关	题项删除 后的 α 值	题项	修正题项与 总分相关	题项删除 后的 α 值
判标准则	≥ 0.400	≤ 0.953	判标准则	≥ 0.400	≤ 0.953
B_A_1_1	0.598	0.952	B_C_1_21	0.595	0.952
B_A_1_2	0.568	0.952	B_C_1_22	0.702	0.951
B_A_1_3	0.638	0.952	B_C_1_23	0.709	0.951
B_A_1_4	0.571	0.952	B_C_1_24	0.656	0.952
B_A_2_6	0.449	0.953	B_C_2_25	0.610	0.952
B_A_2_7	0.567	0.952	B_C_2_26	0.593	0.952
B_A_2_8	0.554	0.952	B_C_2_27	0.504	0.953
B_A_3_9	0.568	0.952	B_C_2_28	0.574	0.952
B_A_3_10	0.658	0.952	B_C_3_29	0.706	0.951

B_A_3_11	0.559	0.952	B_C_3_30	0.606	0.952
B_A_3_12	0.604	0.952	B_C_3_31	0.633	0.952
B_B_1_13	0.476	0.953	B_C_3_32	0.633	0.952
B_B_1_14	0.649	0.952	B_C_4_33	0.533	0.952
B_B_1_15	0.626	0.952	B_C_4_34	0.517	0.953
B_B_1_16	0.352	0.954	B_C_4_35	0.628	0.952
B_B_2_17	0.486	0.953	B_C_4_36	0.574	0.952
B_B_2_18	0.467	0.953	B_C_5_37	0.700	0.951
B_B_2_19	0.384	0.954	B_C_5_38	0.704	0.951
			B_C_5_39	0.660	0.952

最后，使用因子分析，将提取因子的固定数目设定为 1，计算出每个题项的共同性和因素负荷量。共同性和因素负荷量越大，表示同质性越高。如果共同性值低于 0.2，因素负荷量小于 0.45，则说明该题项与共同因素间的关系不密切，建议剔除该题项。

《高中生数学批判性思维倾向量表》的共同性和因素负荷量如表 3-10 所示，第 1、5、6、28 题的共同性分别为 0.034、0.035、0.154、0.121，均低于 0.2 的标准值，因素负荷量分别为 0.183、0.188、0.393、0.348，均低于 0.45 的标准值。除了这四题以外的题项的共同性和因素负荷量均符合判标准则，其中，共同性介于 0.205-0.476 之间，因素负荷量介于 0.452-0.690 之间。因此，《高中生数学批判性思维倾向量表》中考虑删除或修改第 1、5、6、28 题。

表 3-10 高中生数学批判性思维倾向量表共同性和因素负荷量

题项	共同性	因素负荷量	题项	共同性	因素负荷量
判标准则	≥ 0.2	≥ 0.45	判标准则	≥ 0.2	≥ 0.45
A_A_1	0.034	0.183	A_D_16	0.423	0.651
A_A_2	0.380	0.617	A_D_17	0.310	0.556
A_A_3	0.329	0.574	A_E_18	0.394	0.628
A_A_4	0.352	0.593	A_E_19	0.403	0.635
A_A_5	0.035	0.188	A_E_20	0.210	0.458
A_B_6	0.154	0.393	A_E_21	0.476	0.690
A_B_7	0.342	0.585	A_E_22	0.382	0.618
A_B_8	0.279	0.529	A_F_23	0.243	0.493
A_B_9	0.406	0.637	A_F_24	0.475	0.689
A_C_10	0.247	0.497	A_F_25	0.382	0.618

A_C_11	0.385	0.621	A_F_26	0.406	0.637
A_C_12	0.334	0.578	A_F_27	0.205	0.452
A_C_13	0.261	0.511	A_G_28	0.121	0.348
A_D_14	0.311	0.558	A_G_29	0.252	0.502
A_D_15	0.286	0.535	A_G_30	0.240	0.490

《高中生数学元认知量表》的共同性和因素负荷量如表 3-11 所示，第 16、19 题的共同性分别为 0.143、0.160，均低于 0.2 的标准值，因素负荷量分别为 0.379、0.399，均低于 0.45 的标准值。除了这两题以外的题项的共同性和因素负荷量均符合判标准则，其中，共同性介于 0.229-0.547 之间，因素负荷量介于 0.478-0.740 之间。因此，《高中生数学元认知量表》中考虑删除第 16、19 题。

表 3-11 高中生数学元认知量表的共同性和因素负荷量

题项	共同性	因素负荷量	题项	共同性	因素负荷量
判标准则	≥0.2	≥0.45	判标准则	≥0.2	≥0.45
B_A_1_1	0.392	0.626	B_C_1_21	0.389	0.624
B_A_1_2	0.353	0.594	B_C_1_22	0.533	0.730
B_A_1_3	0.441	0.664	B_C_1_23	0.547	0.740
B_A_1_4	0.361	0.601	B_C_1_24	0.470	0.686
B_A_2_6	0.229	0.478	B_C_2_25	0.404	0.636
B_A_2_7	0.356	0.597	B_C_2_26	0.385	0.620
B_A_2_8	0.334	0.578	B_C_2_27	0.284	0.533
B_A_3_9	0.358	0.598	B_C_2_28	0.365	0.604
B_A_3_10	0.468	0.684	B_C_3_29	0.533	0.730
B_A_3_11	0.347	0.589	B_C_3_30	0.405	0.637
B_A_3_12	0.400	0.632	B_C_3_31	0.442	0.665
B_B_1_13	0.254	0.504	B_C_3_32	0.449	0.670
B_B_1_14	0.452	0.672	B_C_4_33	0.322	0.567
B_B_1_15	0.423	0.650	B_C_4_34	0.302	0.550
B_B_1_16	0.143	0.379	B_C_4_35	0.437	0.661
B_B_2_17	0.247	0.497	B_C_4_36	0.372	0.610
B_B_2_18	0.230	0.479	B_C_5_37	0.534	0.731
B_B_2_19	0.160	0.399	B_C_5_38	0.545	0.738
			B_C_5_39	0.482	0.694

预调查阶段通过临界比值法和同质性检验法对两个量表进行项目分析,将所有不符合判标准则的题项统计至表 3-12 中。对于《高中生数学批判性思维倾向量表》,若删除第 28 题,认知成熟度维度中的题项则少于 3 项,不符合共同因素保留原则,而且由信度分析的结果可知,删除第 28 题后,总量表的克隆巴赫 α 系数并未明显上升,因此对第 28 题作进一步修改,删除第 1、5、6 题;对于《高中生数学元认知量表》,若删除第 19 题,情感体验维度中的题项则少于 3 项,不符合共同因素保留原则,因此对第 19 题作进一步修改,删除第 16 题。

表 3-12 两个量表项目分析结果统计表

题项	极端组比较		同质性检验					未达标数	备注
	t 值	显著性 (双尾)	题项与总分相关	修正题项与总分相关	题项删除后的 α 值	共同性	因素负荷量		
A_A_1	×	√	×	×	×	×	×	6	删除
A_A_5	×	√	×	×	×	×	×	6	删除
A_B_6	√	√	√	×	√	×	×	3	删除
A_G_28	√	√	×	×	√	×	×	4	保留
B_B_1_16	√	√	×	×	×	×	×	5	删除
B_B_2_19	√	√	√	×	×	×	×	4	保留

3.2.4.2 效度分析——探索性因素分析

经项目分析后,《高中生数学批判性思维倾向量表》删除第 1、5、6 题,剩余总题数为 27 道题;《高中生数学元认知量表》删除第 16 题,并除去测谎题第 5、20、40 题,剩余总题数为 36 道题。接下来,将采用主成分分析法对两个量表进行探索性因素分析,以检验量表的建构效度。

其中,《高中生数学批判性思维倾向量表》的编制是基于参考相关专家文献的基础上,并结合相关权威理论将量表分为寻找真相、开放思想、分析性、系统性、自信心、求知欲、认知成熟度七个维度,各维度所包含的题项也是从各位权威专家所翻译和修订的原始量表中筛选而来的,且量表也经过校内数学教育学专家与校外一线数学教师的效度检验及肯定,因此,量表各维度的题项界定明确。但是,量表整体在进行探索性因素分析时,即使通过反复删减部分题项的方法,其萃取出的各共同因素中所包含的题项与所编量表各维度下的题项差异仍然较大,出现该问题的原因可能是样本量太小,导致因素分析结果出现偏差。鉴于此,可采用分维度进行探索性因素分析的

方法来检验量表的效度^①。

《高中生数学批判性思维倾向量表》各维度的 KMO 与 Bartlett's 检验结果如表 3-13 所示，七个维度的 KMO 介于 0.634-0.833 之间，达到分维度的 KMO 至少大于 0.500 的最低要求，近似卡方介于 83.283-256.473 之间，且均达到显著性水平（ $p=0.000 < 0.05$ ），表明各维度的分量表均适合进行因素分析，其具体的探索性因素分析结果见表 3-14。

表 3-13 高中生数学批判性思维倾向量表各维度的 KMO 与 Bartlett's 检验结果

检验项目	寻找真相	开放思想	分析性	系统性	自信心	求知欲	认知成熟度
KMO	0.679	0.732	0.672	0.788	0.833	0.789	0.634
Bartlett 近似卡方	83.283	169.361	147.717	149.339	256.473	213.996	160.115
球形 df	3	3	6	6	10	10	3
检验 显著性	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

由下表可知，每个维度均只萃取出一个共同因素。除了第 20、27 题（共同性分别为 0.224、0.291；因素负荷量分别为 0.473、0.539）的共同性和因素负荷量较低之外，其余题项的共同性均在 0.490 以上，介于 0.490-0.842 之间；因素负荷量均大于 0.700，介于 0.700-0.917 之间。并且，各维度累积解释总变异量也在 55.721%-76.733% 的范围内，表明高中生数学批判性思维倾向量表各维度的建构结构较为合理，但还需要进一步修改第 20、27 题的题目内容。

表 3-14 高中生数学批判性思维倾向量表探索性因素分析结果

题项	因素负荷量	共同性	特征值	累积解释总变异量（%）
寻找真相维度				
A_A_2	0.830	0.689	1.948	64.930
A_A_3	0.798	0.636		
A_A_4	0.789	0.623		
开放思想维度				
A_B_7	0.876	0.768	2.302	76.733
A_B_8	0.874	0.763		
A_B_9	0.878	0.771		
分析性维度				
A_C_10	0.743	0.551	2.315	57.863
A_C_11	0.760	0.577		

^① 吴明隆. 问卷统计分析实务——SPSS 操作与应用[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 2010(5): 282.

A_C_12	0.834	0.696		
A_C_13	0.700	0.490		
系统性维度				
A_D_14	0.766	0.587		
A_D_15	0.752	0.565	2.461	61.516
A_D_16	0.793	0.629		
A_D_17	0.825	0.680		
自信心维度				
A_E_18	0.829	0.687		
A_E_19	0.809	0.655		
A_E_20	0.473	0.224	2.973	59.469
A_E_21	0.877	0.769		
A_E_22	0.799	0.639		
求知欲维度				
A_F_23	0.751	0.565		
A_F_24	0.822	0.676		
A_F_25	0.742	0.551	2.786	55.721
A_F_26	0.839	0.704		
A_F_27	0.539	0.291		
认知成熟度维度				
A_G_28	0.760	0.577		
A_G_29	0.917	0.842	2.173	72.430
A_G_30	0.869	0.754		

《高中生数学元认知量表》各维度的 KMO 与 Bartlett's 检验结果如表 3-15 所示，数学元认知知识、数学元认知体验和数学元认知监控三个分维度的 KMO 分别为 0.874、0.745、0.917，近似卡方介于 290.245-1556.32 之间，且均达到显著性水平（ $p=0.000 < 0.05$ ），表明三个维度的分量表非常合适进行因素分析，其具体的探索性因子分析结果见表 3-16、表 3-17 和表 3-18。

表 3-15 高中生数学元认知量表各维度的 KMO 与 Bartlett's 检验结果

检验项目		数学元认知知识	数学元认知体验	数学元认知监控
KMO		0.874	0.745	0.917
Bartlett	近似卡方	748.759	290.245	1556.32
球形	df	55	15	171
检验	显著性	0.000	0.000	0.000

在数学元认知知识维度中，共萃取出 3 个共同因素，累积总方差解释量达 70.093%，每个题项的共同性均在 0.566 之上，因素负荷量介于 0.501-0.865 之间。根据 3 个共同

因素所包含的题项内容来看，可依次将其命名为关于策略的知识、关于个体的知识、关于任务的知识，这三个二级维度的架构与预设一致，表明数学元认知知识维度具有良好的建构效度。

表 3-16 高中生数学元认知知识维度的探索性因素分析结果

题项	因素一	因素二	因素三	共同性
B_A_3_11	0.828			0.799
B_A_3_12	0.797			0.768
B_A_3_9	0.765			0.641
B_A_3_10	0.674			0.677
B_A_1_3		0.850		0.793
B_A_1_2		0.820		0.746
B_A_1_1		0.628		0.566
B_A_1_4		0.501		0.581
B_A_2_6			0.865	0.808
B_A_2_8			0.690	0.670
B_A_2_7			0.660	0.662
特征值	3.016	2.495	2.199	
贡献率 (%)	27.419	22.684	19.990	
累积贡献率 (%)	27.419	50.103	70.093	

在数学元认知体验维度中，共萃取出 2 个共同因素，累积总方差解释量达 71.444%，每个题项的共同性均在 0.639 之上，因素负荷量介于 0.791-0.851 之间。根据 2 个共同因素所包含的题项内容来看，可依次将其命名为认知体验、情感体验，这两个二级维度的架构与预设一致，表明数学元认知体验维度具有良好的建构效度。

表 3-17 高中生数学元认知体验维度的探索性因素分析结果

题项	因素一	因素二	共同性
B_B_1_14	0.851		0.773
B_B_1_15	0.842		0.735
B_B_1_13	0.791		0.639
B_B_2_19		0.844	0.726
B_B_2_17		0.828	0.768
B_B_2_18		0.796	0.647
特征值	2.167	2.120	
贡献率 (%)	36.111	35.333	
累积贡献率 (%)	36.111	71.444	

在数学元认知监控维度中，共萃取出 5 个共同因素，累积总方差解释量达 72.036%，

每个题项的共同性均在 0.613 之上，因素负荷量均大于 0.450，介于 0.481-0.800 之间。根据 5 个共同因素所包含的题项内容来看，可依次将其命名为反馈与检验、监控与调节、定向与计划、组织与管理、反思与评价，这五个二级维度的架构与预设一致，表明数学元认知监控维度具有良好的建构效度。

表 3-18 高中生数学元认知监控维度的探索性因素分析结果

题项	因素一	因素二	因素三	因素四	因素五	共同性
B_C_4_34	0.765					0.701
B_C_4_33	0.749					0.765
B_C_4_36	0.749					0.800
B_C_4_35	0.710					0.746
B_C_2_27		0.754				0.646
B_C_2_26		0.727				0.690
B_C_2_25		0.709				0.664
B_C_2_28		0.703				0.697
B_C_1_21			0.800			0.814
B_C_1_22			0.716			0.740
B_C_1_23			0.621			0.772
B_C_1_24			0.581			0.697
B_C_5_39				0.725		0.767
B_C_5_37				0.589		0.639
B_C_5_38				0.555		0.692
B_C_3_30					0.757	0.746
B_C_3_29					0.715	0.807
B_C_3_32					0.541	0.689
B_C_3_31					0.481	0.613
特征值	3.306	2.846	2.664	2.487	2.384	
贡献率（%）	17.400	14.977	14.023	13.090	12.546	
累积贡献率（%）	17.400	32.377	46.400	59.490	72.036	

总体而言，采用分维度的方式对《高中生数学批判性思维倾向量表》和《高中生数学元认知量表》进行探索性因素分析的结果显示，两个量表都具有较好的建构效度。尤其是《高中生数学元认知量表》，各题项的共同性和因素负荷量均达标，各维度的架构也与预设一致，因此经过项目分析后无需进一步修改。对于《高中生数学批判性思维倾向量表》，第 20、27 题相较于其他题项的共同性与因素负荷量而言，虽已达到最低判标准则，但题项指标相对较低，第 20、27 题的题目内容仍需进一步修改。

3.2.4.3 信度分析

经项目分析和探索性因素分析后，再对《高中生数学批判性思维倾向量表》和《高中生数学元认知量表》进行可靠性分析，以检验两个总量表及其分量表的信度。总量

表的 Cronbach's α 系数在 0.9 以上表示量表信度“非常理想”，在 0.8-0.9 之间表示“信度高”；分量表的 Cronbach's α 系数在 0.9 以上表示量表信度“非常理想”，在 0.8-0.9 之间表示量表“信度甚佳”，在 0.7-0.8 之间表示量表“信度佳”。《高中生数学批判性思维倾向量表》和《高中生数学元认知量表》及其各维度的信度分析结果见表 3-19 和表 3-20。

《高中生数学批判性思维倾向量表》整体的 Cronbach's α 系数为 0.917，说明总量表信度非常理想。但删除第 28 题后，总量表的 Cronbach's α 系数稍微上升，因此，需对第 28 题作进一步修改。

开放思想的 Cronbach's α 系数为 0.848，说明该分量表信度甚佳。而寻找真相、分析性、系统性维度的 Cronbach's α 系数的范围在 0.729-0.797 之间，说明该分量表信度佳。另外，这四个维度中的任一题项删除后，各分量表的 Cronbach's α 系数均有所下降，因此，无需对其进行修改或删减。

自信心维度的 Cronbach's α 系数为 0.821，说明该分量表信度甚佳。但删除第 20 题后，分量表的 Cronbach's α 系数有所上升，但由于第 20 题删除后，总量表的 Cronbach's α 系数有所下降，因此，仅对第 20 题进行修改，不作删除处理。

求知欲维度的 Cronbach's α 系数为 0.790，说明该分量表信度佳。但删除第 27 题后，分量表的 Cronbach's α 系数有所上升，但由于第 27 题删除后，总量表的 Cronbach's α 系数并未上升，因此，仅对第 27 题进行修改，不作删除处理。

认知成熟度维度的 Cronbach's α 系数为 0.797，说明该分量表信度佳。但删除第 28 题后，分量表 Cronbach's α 系数有所上升，但由于第 28 题删除后，该维度不足 3 题，因此，仅对第 28 题进行修改，不作删除处理。

总的来说，《高中生数学批判性思维倾向量表》具有一定的可靠性，但需要对第 20、27、28 题作进一步修改。

表 3-19 高中生数学批判性思维倾向量表及各维度信度分析

检验量表	题项数	Cronbach's α 系数
寻找真相	3	0.729
开放思想	3	0.848
分析性	4	0.749
系统性	4	0.790
自信心	5	0.821
求知欲	5	0.790
认知成熟度	3	0.797
数学批判性思维倾向	27	0.917

《高中生数学元认知量表》整体的 Cronbach's α 系数为 0.954，删除任一题项后，

总量表的 Cronbach's α 系数都不会增大, 说明总量表信度非常理想。数学元认知监控维度的 Cronbach's α 系数为 0.938, 说明该分量表信度非常理想; 数学元认知知识维度的 Cronbach's α 系数为 0.896, 说明该分量表信度甚佳; 数学元认知体验维度的 Cronbach's α 系数为 0.792, 说明该分量表信度佳。总的来说, 《高中生数学元认知量表》具有一定的可靠性。

表 3-20 高中生数学元认知量表及各维度信度分析

检验量表	题项数	Cronbach's α 系数
数学元认知知识	11	0.896
数学元认知体验	6	0.792
数学元认知监控	19	0.938
数学元认知	36	0.954

由于预调查阶段受样本量的限制, 经过项目分析、效度分析和信度分析后, 仅对《高中生数学批判性思维倾向量表》和《高中生数学元认知量表》的结构作出以下优化调整。

- (1) 《高中生数学批判性思维倾向量表》中删除第 1、5、6 题, 着重修改第 20、27、28 题。
- (2) 《高中生数学元认知量表》中删除第 16 题, 着重修改第 19 题。

3.3 正式调查

3.3.1 研究对象

考虑到高三学生的学业压力较大, 所以正式调查样本仅来自柳州市的一所重点高中和一所普通高中的高一、高二年级的学生。共发放问卷 550 份, 经剔除漏答、多答、测谎题得分差值大于 3 及以上或者测谎题答案不符合题意的无效问卷, 最终得到有效问卷 503 份, 问卷有效回收率为 91.45%。其中高一年级学生共 239 人, 高二年级学生共 264 人, 男生共 184 人, 女生共 319 人。正式调查对象的基本信息如表 3-21 所示。

表 3-21 正式调查对象基本信息统计表

人口学变量	类别	人数	占比
性别	男	184	36.6%
	女	319	63.4%
年级	高一	239	47.5%
	高二	264	52.5%

数学学业成绩	131-150	36	7.2%
	111-130	57	11.3%
	91-110	106	21.1%
	71-90	185	36.8%
	70 及以下	119	23.7%
学生干部	是	160	31.8%
	否	343	68.2%
班主任	数学教师	183	36.4%
	其他教师	320	63.6%
数学喜爱程度	非常喜欢	56	11.1%
	喜欢	213	42.3%
	不确定	182	36.2%
	不喜欢	35	7.0%
	非常不喜欢	17	3.4%

3.3.2 研究工具

采用《高中生数学批判性思维倾向和数学元认知的调查问卷（正式卷）》对被试展开正式调查，包括指导语、基本信息和量表三个部分。

3.3.2.1 高中生数学批判性思维倾向量表

经过预调查阶段的项目分析和信效度分析，对初始问卷进行了修改。因此，正式调查采用的《高中生数学批判性思维倾向量表》包括寻找真相、开放思想、分析性、系统性、自信心、求知欲、认知成熟度七个维度，共 27 道题目，均采用李克特 5 点计分法，分数越高表示高中生的数学批判性思维倾向越强。量表的具体结构和题目分布情况如表 3-22 所示。

表 3-22 高中生数学批判性思维倾向量表正式调查的结构和题目分布

维度	题数	题号
寻找真相	3	1*、2*、3*
开放思想	3	4、5、6
分析性	4	7、8、9、10
系统性	4	11、12*、13、14*
自信心	5	15、16、17、18、19*
求知欲	5	20、21、22、23、24
认知成熟度	3	25*、26*、27*
总量表	27	

注：带*的题项为反向计分题

3.3.2.2 高中生数学元认知量表

经过预调查阶段的项目分析和信效度分析，对初始问卷进行了修改。因此，正式调查采用的《高中生数学元认知量表》包括数学元认知知识、数学元认知体验、数学元认知监控这三个一级维度，共 39 道题目，均采用李克特 5 点计分法，分数越高表示高中生的数学元认知水平越高。量表具体结构和题目分布情况如表 3-23 所示。

表 3-23 高中生数学元认知量表正式调查的结构和题目分布

一级维度	二级维度	题数	题号
数学元认知知识	关于个体的知识	4	1、2、3、4
	关于任务的知识	3	6、7、8
	关于策略的知识	4	9、10、11、12
数学元认知体验	认知体验	3	13、14、15
	情感体验	3	16、17*、18
	定向与计划	4	20、21、22、23
数学元认知监控	监控与调节	4	24、25、26、27
	反思与评价	4	28、29、30、31
	反馈与检验	4	32、33、34、35
	组织与管理	3	36、37、38
	测谎题	3	5、19、39
总量表		39	

注：带*的题项为反向计分题

3.3.3 正式调查问卷的施测

由研究者担任主试，以班级为单位，利用班会课或者自习课的时间，采用纸质问卷对学生进行团体测试。在测试前，主试向全班学生说明统一的指导语，并强调不能漏答、多答以及乱填，一定要参照自身真实情况进行答题。由数学课代表当场发放和回收问卷，测试时间约为 20 分钟。

3.3.4 正式调查量表的分析

3.3.4.1 项目分析

将《高中生数学批判性思维倾向量表》的 27 道题依次编码为 A_A_1、A_A_2.....A_G_26、A_G_27，除去《高中生数学元认知量表》的测谎题第 5、19、39 题，其余 36 道题依次编码为 B_A_1_1、B_A_1_2.....B_C_5_37、B_C_5_38。检验数据无缺失值或错误值后，使用 SPSS25.0 将量表的反向题进行反向计分，并分别计算两个量表的总分。然后，再次采用临界比值法和同质性检验法对正式调查样本的有效问卷数据进行项目分析。

项目分析结果显示，两个量表所有题项的 t 值均大于 3，题项与总分的相关系数均大于 0.4；删除任何题项后，两个量表整体的克隆巴赫 α 系数也无明显上升；所有题项的共同性大于 0.2，因素负荷量大于 0.45，均满足判标准则。综上所述，无需进一步剔除两个量表的题项。

3.3.4.2 效度分析——探索性因素分析+验证性因素分析

(1) 探索性因素分析

正式调查阶段的有效样本量为 503 份，与每个量表题项总数之比超过 1: 10。相对于预调查阶段，正式调查阶段更适合进行探索性因素分析，其分析结果的可靠性也相对更高。探索性因素分析需要进行多次删除不切合题项的过程，从而找到较为合理可接受的因素结构，并且，所萃取出的共同因素所包含题项的内容差异不大，同质性要高^①。

由表 3-24 所示，《高中生数学元认知量表》的 KMO 为 0.945，量表题项非常适合进行探索性因素分析，且其分析结果与预调查问卷结构基本一致，说明问卷的建构效度合理，因此，在正式调查量表的效度分析中不再赘述。《高中生数学批判思维倾向量表》的 KMO 为 0.914，说明量表题项非常适合进行探索性因素分析，其具体分析结果见表 3-25。

表 3-24 两个量表的 KMO 与 Bartlett's 检验结果

检验项目		数学批判性思维倾向	数学元认知
KMO		0.914	0.945
Bartlett 球形度 检验	近似卡方	4343.383	7887.72
	df	276	630
	显著性	0	0

对《高中生数学批判性思维倾向量表》采用主成分分析法，不限定因子数目的前提下，经过多次探索，发现依次删除 25、12、21 题后，所萃取出的共同因素及其所包含的题项较为合理，且共同性较高，介于 0.453-0.658 之间，因素负荷量均在 0.556 以上，累计总方差解释量为 57.080%。具体探索性因素分析结果如表 3-25 所示。

表 3-25 高中生数学批判性思维倾向量的探索性因素分析结果

题项	因素一	因素二	因素三	因素四	因素五	共同性
A_E_15	0.722					0.633

^① 吴明隆.问卷统计分析实务——SPSS 操作与应用[M].重庆:重庆大学出版社,2010(5):476.

A_E_18	0.703				0.654
A_E_17	0.699				0.569
A_A_3	0.670				0.616
A_E_16	0.669				0.522
A_E_19	0.641				0.453
A_D_11		0.738			0.573
A_C_10		0.731			0.567
A_C_9		0.675			0.584
A_D_13		0.614			0.477
A_B_4		0.612			0.547
A_G_27			0.781		0.658
A_G_26			0.766		0.639
A_A_2			0.574		0.496
A_A_1			0.572		0.510
A_D_14			0.556		0.541
A_C_7				0.737	0.597
A_B_5				0.703	0.559
A_C_8				0.699	0.575
A_B_6				0.593	0.559
A_F_20					0.745 0.598
A_F_22					0.668 0.622
A_F_23					0.658 0.594
A_F_24					0.618 0.587
特征值	3.383	2.829	2.786	2.411	2.290
贡献率 (%)	14.096	11.788	11.608	10.045	9.543
累积贡献率 (&)	14.096	25.884	37.492	47.537	57.080

根据探索性因素分析结果,将高中生批判性思维倾向量表的各维度及其所包含的题项作出以下调整:

第一,删除认知成熟度维度。由于删除第 25 题后,认知成熟度维度仅剩 2 道反向题,分别为第 26 题“解决数学难题的最好办法就是向别人问取答案”和第 27 题“学习成绩好的同学所得到的答案便是正确答案”,且因素分析将其归为寻找真相维度,根据寻找真相的涵义,这两题内容都能体现出学生寻求数学知识真相的真诚和积极态度,敢于质疑,且不受个人喜好和先前观念所影响,能客观辩证地看待数学事实。因此,可以接受第 26、27 题归入寻找真相维度。

第二,重构寻找真相维度所包含的题项。除了寻找真相维度原有的第 1、2 题之外,新增第 14、26、27 题,其中第 14 题“当我看到一个数学问题复杂难懂时,我便放弃解决”是一道反向题,符合寻找真相的涵义,能够体现出学生寻求数学真相的真诚和积极态度。因此,可以接受第 14、26、27 题归入寻找真相维度。

第三，重构开放思想维度所包含的题项。除了开放思想维度原有的第 5、6 题之外，新增第 7 题“一个数学问题的解决方法通常不止一种”和第 8 题“在数学学习中，如果我认为别人的答案是错误的，我就需要提出理由”。根据开放思想的涵义，这两题内容都能体现学生能够包容和尊重不同意见、观点和方法，且能够理性且有依据地对他人观点持客观态度。因此，可以接受第 7、8 题归入开放思想维度。

第四，合并分析性维度和系统性维度，将其命名为分析性与系统性维度。分析性与系统性都能突出学生思维的逻辑性以及思考问题的全面性，因此可以接受将两个维度进行合并的结果。分析性和系统性维度包含第 4、9、10、11、13 题，其中第 4 题“我会从多个角度去思考数学问题，而不仅为了得到答案”可以表现出学生思维的逻辑性，能够深刻认识数学知识之间的联系，以及坚持全面思考数学问题的思维倾向。因此，可以接受将第 4 题归入分析性和系统性维度，并合并为分析性与系统性维度。

第五，重构自信心维度所包含的题项。除了自信心维度原有的第 15-19 题之外，新增第 3 题“解决复杂的数学问题时，我会不知所措”，这是一道反向题。根据自信心维度的涵义，该题可以体现出学生即使在面对复杂问题时，仍能保持镇静自若和积极解决问题的自信态度，对自身数学问题解决能力有把握。因此，可以接受将第 3 题归入自信心维度。

综合上述讨论，探索性因素分析所萃取出的 5 个共同因素依次命名为自信心、分析性与系统性、寻找真相、开放思想、求知欲维度。由此，高中生数学批判性思维倾向量表最终题目安排如表 3-26 所示。

表 3-26 高中生数学批判性思维倾向量表正式调查最终题目分布

维度	题数	题号	对应新题号
寻找真相	5	1*、2*、14*、26*、27*	1*、2*、3*、4*、5*
开放思想	4	5、6、7、8	6、7、8、9
分析性与系统性	5	4、9、10、11、13	10、11、12、13、14
自信心	6	3*、15、16、17、18、19*	15*、16、17、18、19、20*
求知欲	4	20、22、23、24	21、22、23、24
数学批判性思维倾向	24		

注：带*的题项为反向计分题

（2）验证性因素分析

经过探索性因素分析建立合理可接受的建构效度后，还需通过验证性因素分析来检验建构效度的適切性和真实性，即进一步探究《高中生数学元认知量表》和《高中生数学批判思维倾向量表》的因素结构模型与实际样本数据是否契合，并检测反映潜

在变量的指标变量是否为有效的测量变量^①。

本研究利用 AMOS24.0 进行验证性因素分析，所采用的方法是极大似然估计法。根据相关文献和探索性因素分析结果所构建的量表维度，绘制预设模型，分别是高中生数学批判性思维倾向量表的结构模型（见图 3-1）、高中生数学元认知量表的结构模型（见图 3-3）。接着，导入 SPSS 数据文件，运行结构模型，分析模型拟合结果，若模型拟合结果未达到适配标准，则需对结构模型进行修正。

高中生数学批判性思维倾向量表的结构模型如图 3-1 所示，其模型拟合结果由表 3-27 可知， $\chi^2/df=2.788<3$ ，RMSEA=0.060<0.080，但部分拟合指标尚未达到适配标准，其中 IFI=0.896，TLI=0.881 和 CFI=0.896 均小于 0.90。鉴于此，需对高中生数学批判性思维倾向量表的结构模型进行修正（见图 3-2），修正模型的拟合指标如表 3-27 所示， $\chi^2/df=2.491<3$ ，RMSEA=0.054<0.080，IFI=0.916，TLI=0.901 和 CFI=0.915 均大于 0.90，其余拟合指标亦均达到适配标准。因此，综合表明修正后的模型拟合良好。

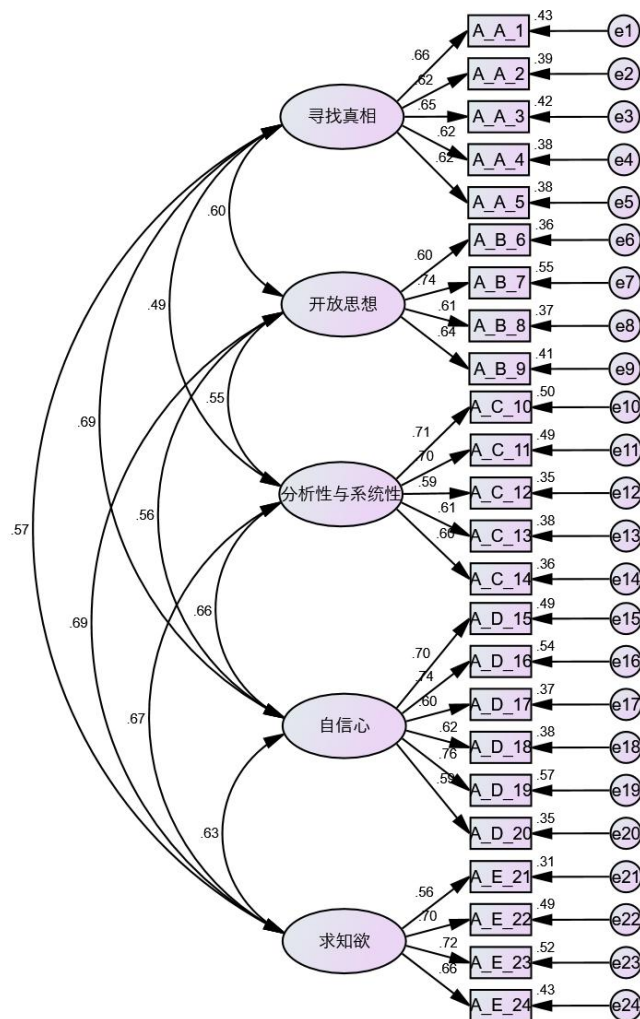


图 3-1 高中生数学批判性思维倾向量表的结构模型

^① 吴明隆.结构方程模型——AMOS 的操作与应用[M].重庆:重庆大学出版社,2010(10):212.

表 3-27 高中生数学批判性思维倾向量表模型拟合结果

	χ^2 / df	RMSEA	RMR	IFI	TLI	CFI	PGFI	PNFI	PCFI
适配标准	<3 优秀 <5 良好	<0.05 优秀 <0.08 良好	<0.05	>0.90	>0.90	>0.90	>0.50	>0.50	>0.50
预设模型	2.788	0.060	0.047	0.896	0.881	0.896	0.723	0.743	0.785
修正模型	2.491	0.054	0.049	0.916	0.901	0.915	0.716	0.741	0.783

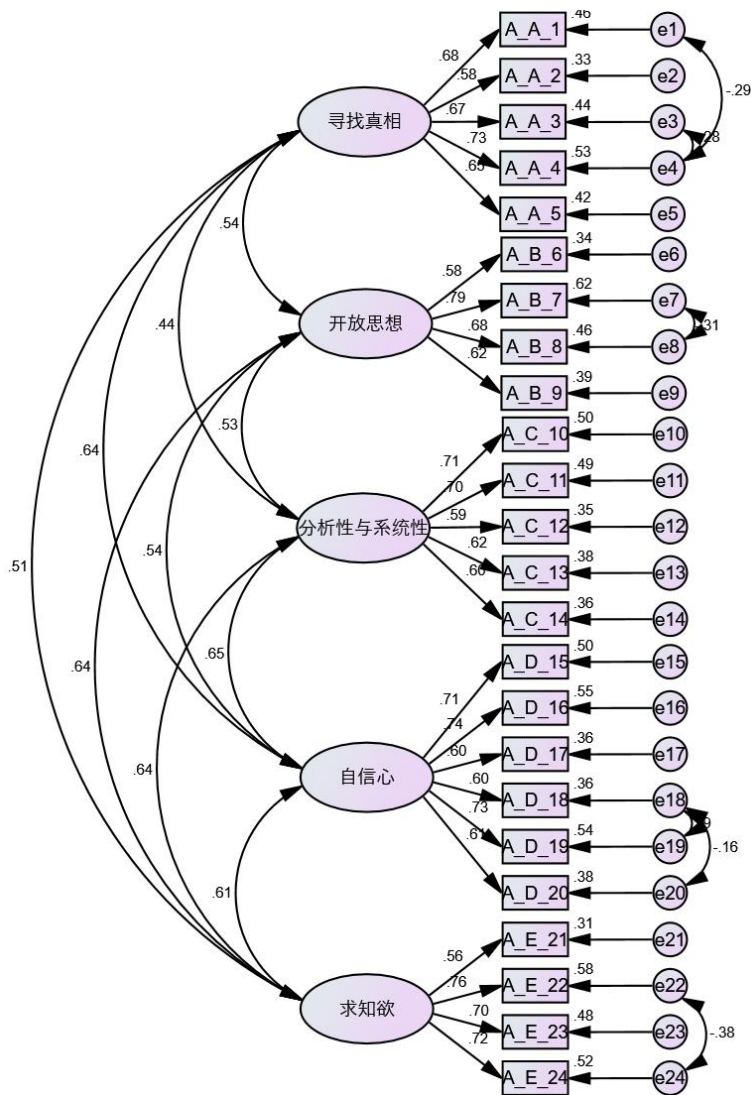


图 3-2 高中生数学批判性思维倾向量表的修正结构模型

为进一步检验模型的内在质量，还需测量模型的收敛效率。收敛效率能有效反映各题项与同一潜变量的相关程度，收敛效率越高，表示模型适配度越好，其评价指标主要为标准化因素负荷量、平均方差抽取量（AVE）和组合信度（CR），其中 AVE 值和 CR 值可以根据标准化因素负荷量估计值计算得出。AVE 值越大，表示观测变量

越能有效反映共同因素所构成的潜在变量，一般要求 AVE 值大于 0.5，但其值最低不得小于 0.36，因此 AVE 值在 0.36 至 0.5 的范围内亦可接受^①。CR 可作为检验潜在变量的信度指标，一般认为 CR 值大于 0.6 则表示模型的组合信度理想^②。

《高中生数学批判性思维倾向量表》的收敛效度检验结果如表 3-28 所示，各测量题项与对应潜变量的路径系数均显著；寻找真相、开放思想、分析性与系统性、自信心和求知欲这 5 个潜变量的 AVE 值分别为 0.439、0.452、0.415、0.448、0.475，均高于 0.36 的最低值，处于可接受的范围内；5 个潜变量对应的 CR 值分别为 0.795、0.765、0.779、0.828、0.781，均大于 0.6，说明模型的组合信度理想。因此，综合表明高中生数学批判性思维倾向量表的模型适配度可接受。

表 3-28 高中生数学批判性思维倾向量表收敛效度检验结果

维度		标准化因素 负荷量	标准误差 S.E.	临界比值 C.R.	P	AVE	CR
寻找真相	A_A_1	0.681					
	A_A_2	0.578	0.091	10.609	***		
	A_A_3	0.665	0.096	11.316	***	0.439	0.795
	A_A_4	0.728	0.090	11.107	***		
	A_A_5	0.650	0.073	11.976	***		
开放思想	A_B_6	0.584					
	A_B_7	0.790	0.108	11.426	***		
	A_B_8	0.675	0.094	10.352	***	0.452	0.765
	A_B_9	0.621	0.091	10.725	***		
分析性与 系统性	A_C_10	0.706					
	A_C_11	0.699	0.066	13.100	***		
	A_C_12	0.591	0.065	11.403	***	0.415	0.779
	A_C_13	0.616	0.065	11.706	***		
	A_C_14	0.601	0.069	11.461	***		
自信心	A_D_15	0.706					
	A_D_16	0.739	0.065	14.874	***		
	A_D_17	0.604	0.064	12.059	***		
	A_D_18	0.602	0.062	11.598	***	0.448	0.828
	A_D_19	0.733	0.066	14.386	***		
	A_D_20	0.614	0.075	12.363	***		
求知欲	A_E_21	0.561					
	A_E_22	0.761	0.124	11.540	***		
	A_E_23	0.696	0.118	11.203	***	0.475	0.781
	A_E_24	0.722	0.106	10.899	***		

^① Fornell C, Larcker D F. Evaluating Structural Equation Models with unobservable variables and measurement error[J]. *Journal of Marketing Research*, 1981,18(1):39-50.

^② 吴明隆.结构方程模型——AMOS 的操作与应用[M].重庆:重庆大学出版社,2010(10):227.

高中生数学元认知量表的结构模型如图 3-3 所示，其模型拟合结果由表 3-29 可知， $\chi^2/df=2.581<3$ ，RMSEA=0.056<0.080，但部分拟合指标尚未达到适配标准，其中 IFI=0.878，TLI=0.867 和 CFI=0.877 均小于 0.90。鉴于此，需对高中生数学与认知量表的结构模型进行修正（见图 3-4），修正模型的拟合指标如表 3-29 所示， $\chi^2/df=2.178<3$ ，RMSEA=0.048<0.050，IFI=0.910，TLI=0.901 和 CFI=0.909 均大于 0.90，其余拟合指标亦均达到适配标准。因此，综合表明修正后的模型拟合良好。

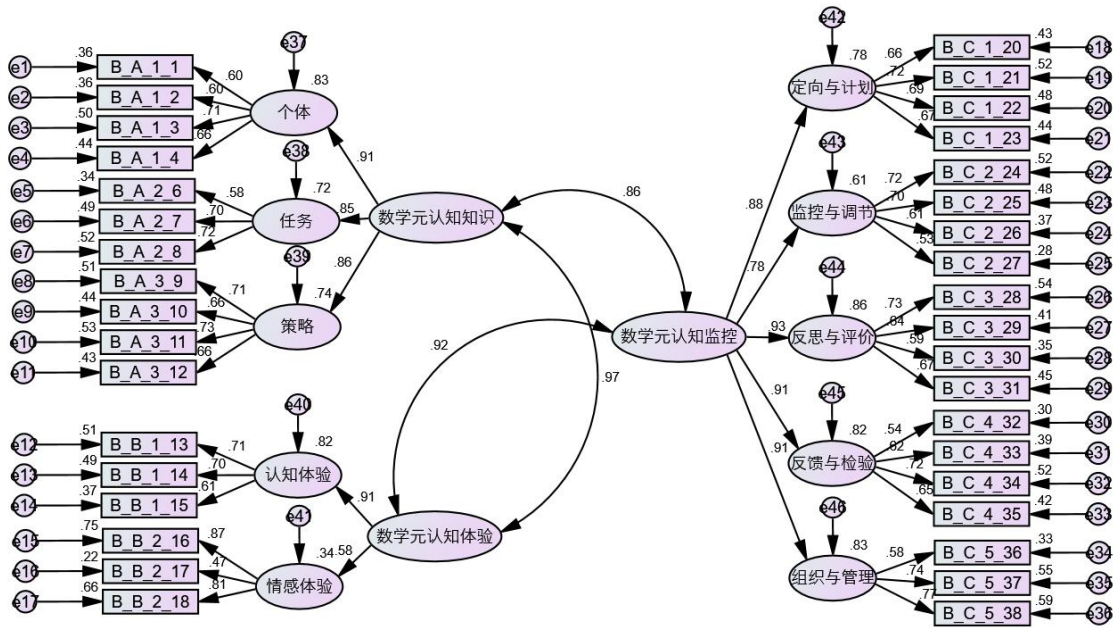


图 3-3 高中生数学元认知量表的结构模型

表 3-29 高中生数学元认知量表模型拟合结果

	χ^2/df	RMSEA	RMR	IFI	TLI	CFI	PGFI	PNFI	PCFI
适配标准	<3 优秀 <5 良好	<0.05 优秀 <0.08 良好	<0.05	>0.90	>0.90	>0.90	>0.50	>0.50	>0.50
预设模型	2.581	0.056	0.046	0.878	0.867	0.877	0.734	0.751	0.809
修正模型	2.178	0.048	0.044	0.910	0.901	0.909	0.750	0.770	0.829

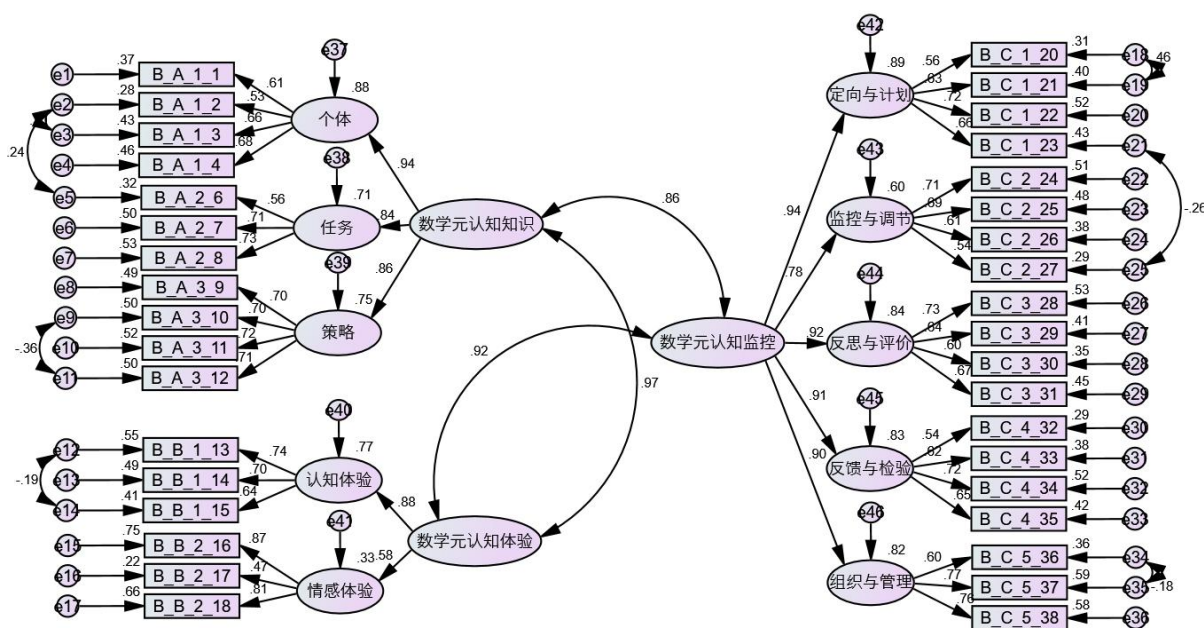


图 3-4 高中生数学元认知量表的修正结构模型

《高中生数学元认知量表》的收敛效度检验结果如表 3-30 所示，各测量题项与对应潜变量的路径系数均显著；关于个体的知识、关于任务的知识、关于策略的知识、认知体验、情感体验、定向与计划、监控与调节、反思与评价、反馈与检验、组织与管理这 10 个潜变量的 AVE 值介于 0.387-0.543 之间，均高于 0.36 的最低值，处于可接受的范围内；10 个潜变量对应的 CR 值介于 0.708-0.801 之间，均大于 0.6，说明模型的组合信度理想。因此，综合表明高中生数学元认知量表的模型适配度可接受。

表 3-30 高中生数学元认知量表收敛效度检验结果

维度		标准化因素负荷量	标准误差 S.E.	临界比值 C.R.	P	AVE	CR
关于个体的知识	B_A_1_1	0.609				0.387	0.714
	B_A_1_2	0.530	0.083	9.451	***		
	B_A_1_3	0.658	0.084	11.407	***		
	B_A_1_4	0.680	0.080	11.966	***		
关于任务的知识	B_A_2_6	0.564				0.449	0.708
	B_A_2_8	0.726	0.131	10.858	***		
	B_A_2_7	0.709	0.128	10.958	***		
关于策略的知识	B_A_3_9	0.699				0.501	0.801
	B_A_3_10	0.704	0.077	13.773	***		
	B_A_3_11	0.721	0.070	14.504	***		
	B_A_3_12	0.708	0.075	13.223	***		
认知体验	B_B_1_13	0.745				0.484	0.737

	B_B_1_14	0.700	0.068	13.56	***		
	B_B_1_15	0.638	0.071	11.848	***		
情感体验	B_B_2_16	0.868					
	B_B_2_17	0.467	0.056	9.702	***	0.543	0.771
	B_B_2_18	0.811	0.054	17.136	***		
定向与计划	B_C_1_20	0.559					
	B_C_1_21	0.634	0.087	14.555	***	0.417	0.739
	B_C_1_22	0.721	0.123	11.357	***		
	B_C_1_23	0.657	0.127	11.031	***		
监控与调节	B_C_2_24	0.711					
	B_C_2_25	0.694	0.077	13.251	***	0.413	0.735
	B_C_2_26	0.614	0.084	11.470	***		
	B_C_2_27	0.536	0.101	10.367	***		
反思与评价	B_C_3_28	0.730					
	B_C_3_29	0.641	0.075	13.511	***	0.437	0.756
	B_C_3_30	0.595	0.074	12.220	***		
	B_C_3_31	0.672	0.070	13.835	***		
反馈与检验	B_C_4_32	0.542					
	B_C_4_33	0.617	0.106	10.268	***	0.404	0.729
	B_C_4_34	0.723	0.122	11.028	***		
	B_C_4_35	0.647	0.112	10.336	***		
组织与管理	B_C_5_36	0.602					
	B_C_5_37	0.770	0.116	11.800	***	0.514	0.758
	B_C_5_38	0.765	0.117	12.270	***		

3.3.4.3 信度分析

由表 3-31 可知,《高中生数学批判性思维倾向量表》整体的 Cronbach's α 系数为 0.905,删除任一题项后,总量表的 Cronbach's α 系数都不会增大,说明总量表信度非常理想。自信心维度的 Cronbach's α 系数为 0.824,说明该分量表信度甚佳;而寻找真相、开放思想、分析性与系统性、求知欲维度的 Cronbach's α 系数的范围在 0.744-0.780 之间,说明该分量表信度佳。总的来说,《高中生数学批判性思维倾向量表》具有一定的可靠性,可用于测量高中生的数学批判性思维倾向水平。

表 3-31 高中生数学批判性思维倾向量表及各维度的信度分析

检验量表	题项数	Cronbach's α 系数
寻找真相	5	0.767
开放思想	4	0.744
分析性与系统性	5	0.780
自信心	6	0.824

求知欲	4	0.756
数学批判性思维倾向	24	0.905

由表 3-32 可知,《高中生数学元认知量表》整体的 Cronbach's α 系数为 0.944,删除任一题项后,总量表的 Cronbach's α 系数都不会增大,说明总量表信度非常理想。数学元认知监控维度的 Cronbach's α 系数为 0.911,说明该分量表信度非常理想;数学元认知知识维度的 Cronbach's α 系数为 0.865,说明该分量表信度甚佳;数学元认知体验维度的 Cronbach's α 系数为 0.770,说明该分量表信度佳。总的来说,《高中生数学元认知量表》具有一定的可靠性,可用于测量高中生的数学元认知水平。

表 3-32 高中生数学元认知量表及一级维度信度分析

检验量表	题项数	Cronbach's α 系数
数学元认知知识	11	0.865
数学元认知体验	6	0.770
数学元认知监控	19	0.911
数学元认知	36	0.944

3.4 数据处理

本研究主要运用 Excel、SPSS25.0 和 AMOS24.0 软件,对有效样本数据进行数据处理和统计分析。其中,运用 Excel 表格录入问卷数据;运用 SPSS25.0 软件进行项目分析、探索性因素分析、信度分析、描述性统计、独立样本 t 检验、方差性分析以及相关性分析;运用 AMOS24.0 软件进行验证性因子分析和结构方程模型分析。

3.5 共同方法偏差检验

本研究的《高中生数学批判性思维倾向量表》和《高中生数学元认知量表》的数据均由同一被试提供,尽管在采取了匿名填选、设置反向题、强调结果保密且无好坏之分等措施的情况下,所收集的数据仍有可能存在共同方法偏差,而导致这一现象产生的原因有很多,如被试来源的同质性、问卷的一致性。为此,本研究采用 Harman 单因素方法来检验共同方法偏差的严重程度。

共同方法偏差检验结果如表 3-33 所示,总问卷可析出 12 个特征值大于 1 的主成分,且首个主成分的方差解释百分比为 29.630%,低于 40%的临界值,因此本研究不存在严重的共同方法偏差问题。

表 3-33 共同方法偏差检验结果

成分	总方差解释					
	初始特征值			提取载荷平方和		
	总计	方差百分比	累积 %	总计	方差百分比	累积 %
1	17.778	29.630	29.630	17.778	29.630	29.630
2	3.113	5.188	34.818	3.113	5.188	34.818
3	2.449	4.081	38.899	2.449	4.081	38.899
4	2.021	3.369	42.268	2.021	3.369	42.268
5	1.641	2.735	45.003	1.641	2.735	45.003
6	1.470	2.450	47.453	1.470	2.450	47.453
7	1.371	2.286	49.739	1.371	2.286	49.739
8	1.285	2.142	51.880	1.285	2.142	51.880
9	1.217	2.029	53.909	1.217	2.029	53.909
10	1.145	1.909	55.818	1.145	1.909	55.818
11	1.091	1.818	57.637	1.091	1.818	57.637
12	1.005	1.676	59.312	1.005	1.676	59.312
13	0.934	1.557	60.869			
⋮	⋮	⋮	⋮			
60	0.204	0.340	100.000			

提取方法：主成分分析法

第4章 研究结果

4.1 高中生数学批判性思维倾向的现状

4.1.1 高中生数学批判性思维倾向的总体水平

（1）高中生数学批判性思维倾向的整体分析

使用 SPSS25.0 软件对 503 份有效问卷数据进行高中生数学批判性思维倾向总分的描述性统计。其结果如表 4-1 所示，高中生的数学批判性思维倾向总分的平均值为 80.163 分，标准差为 12.219 分，其中最低为 24 分，最高分为 113 分。为进一步了解高中生的数学批判性思维倾向水平具体如何，根据均值（约为 81 分）和标准差（约为 13 分）将其划分为三个水平（见表 4-2）。

表 4-1 高中生数学批判性思维倾向总分的描述性统计

检验变量	N	极小值	极大值	均值	标准差
数学批判性思维倾向	503	24	113	80.163	12.219

水平一为高水平，其得分区间为 95-113 分，人数为 54 人，占总人数的 10.7%；水平二为中等水平，其得分区间为 69-94 分，人数为 374 人，占总人数的 74.4%；水平三为低水平，其得分区间为 24-68 分，人数为 75 人，占总人数的 14.9%。由此看出，高中生的数学批判性思维倾向整体处于中等偏上水平，处于高水平的高中生较少。

表 4-2 高中生数学批判性思维倾向水平划分及统计情况

水平划分	得分区间	N	占比
水平一	95-113	54	10.7%
水平二	69-94	374	74.4%
水平三	24-68	75	14.9%

（2）高中生数学批判性思维倾向的各维度分析

由于各维度的得分不一，因此计算各维度均分后再进行描述性统计，结果由表 4-3 所示。可以看出，各维度平均分的排名为：开放思想>求知欲>寻找真相>分析性与系统性>自信心。除了自信心维度，其余维度及整体的均值都大于 3 分，再次表明高中生数学批判性思维倾向处于中等偏上水平。其中，开放思想维度的平均值最高，高达 4.120 分，说明高中生对他人的数学观点和解题方法持有包容和开放的态度，愿

意倾听和接纳不同的意见。而自信心维度的平均分最低，低至 2.700 分，说明高中生在数学学习中缺乏自信心，面对各类数学问题时难以冷静面对或自信解决。

表 4-3 高中生数学批判性思维倾向及各维度平均分的描述性统计

检验变量	N	极小值	极大值	均值	标准差
寻找真相	503	1.000	5.000	3.470	0.723
开放思想	503	1.000	5.000	4.120	0.551
分析性与系统性	503	1.000	5.000	3.141	0.640
自信心	503	1.000	4.830	2.700	0.705
求知欲	503	1.000	5.000	3.608	0.678
数学批判性思维倾向	503	1.000	4.710	3.340	0.509

4.1.2 高中生数学批判性思维倾向的差异性分析

4.1.2.1 高中生数学批判性思维倾向的性别差异

由表 4-4 可知，除了开放思想维度之外，高中生数学批判性思维倾向及其余维度均在性别上存在显著差异。并且，在数学批判性思维倾向整体和各维度上，男生的均值都高于女生。

表 4-4 高中生数学批判性思维倾向的性别差异

检验变量	性别	N	均值	标准差	t 值
寻找真相	男	184	3.666	0.700	4.72***
	女	319	3.357	0.713	
开放思想	男	184	4.177	0.519	1.745
	女	319	4.088	0.567	
分析性与系统性	男	184	3.352	0.668	5.803***
	女	319	3.019	0.591	
自信心	男	184	2.954	0.712	6.381***
	女	319	2.553	0.659	
求知欲	男	184	3.749	0.652	3.579***
	女	319	3.527	0.680	
数学批判性思维倾向	男	184	3.522	0.511	6.298***
	女	319	3.236	0.478	

注：*表示显著性概率 $p < 0.05$ ；**表示显著性概率 $p < 0.01$ ；***表示显著性概率 $p < 0.001$

4.1.2.2 高中生数学批判性思维倾向的年级差异

由表 4-5 可知，高中生数学批判性思维倾向在年级上存在显著差异，且高一年级学生的得分高于高二年级学生。在各维度中，寻找真相和自信心维度在年级上亦存在显著差异，但开放思想、分析性与系统性、求知欲维度在年级上不存在显著差异。无论各维度在年级上的差异显著与否，高一年级学生的均值都高于高二年级学生。

表 4-5 高中生数学批判性思维倾向的年级差异

检验变量	年级	N	均值	标准差	t 值
寻找真相	高一	239	3.584	0.713	3.402**
	高二	264	3.367	0.719	
开放思想	高一	239	4.154	0.548	1.298
	高二	264	4.090	0.553	
分析性与系统性	高一	239	3.174	0.682	1.110
	高二	264	3.111	0.600	
自信心	高一	239	2.769	0.763	2.099*
	高二	264	2.636	0.644	
求知欲	高一	239	3.622	0.695	0.457
	高二	264	3.595	0.663	
数学批判性思维倾向	高一	239	3.396	0.534	2.352*
	高二	264	3.289	0.481	

注：*表示显著性概率 $p<0.05$ ；**表示显著性概率 $p<0.01$ ；***表示显著性概率 $p<0.001$

4.1.2.3 高中生数学批判性思维倾向的数学学业成绩差异

本研究将高中生的数学学业成绩划分为 5 个水平，“131-150 分”记为水平 1，“111-130 分”记为水平 2，“91-110 分”记为水平 3，“71-90 分”记为水平 4，“70 分及以下”记为水平 5。

由表 4-6 可知，高中生数学批判性思维倾向整体及各维度在数学学业成绩上均存在显著差异。从均值方面可知，整体上，处于不同数学学业成绩水平的高中生，其数学批判性思维倾向及各维度的均值大小排序都为：水平 1>水平 2>水平 3>水平 4>水平 5。从事后检验结果可知，不同成绩水平的高中生的数学批判性思维倾向均存在显著差异，具体到各维度上，除了水平 1 和水平 2 之间、水平 2 和水平 3 之间、水平 4 和水平 5 之间的均值在个别维度中的不存在显著性差异，其余成绩水平之间的均值均存在显著差异。因此，综合表明数学学业成绩越好的学生，其数学批判性思维倾向水平越高。

表 4-6 高中生数学批判性思维倾向的数学学业成绩差异

检验变量	数学学业成绩	N	均值	标准差	F 值	事后检验
寻找真相	131-150	36	3.894	0.848	17.028***	
	111-130	57	3.768	0.721		1>4>5
	91-110	106	3.649	0.673		2>4>5
	71-90	185	3.431	0.625		3>4>5
	70 及以下	119	3.099	0.698		
开放思想	131-150	36	4.493	0.523	15.866***	1>3>5
	111-130	57	4.346	0.479		1>4>5
	91-110	106	4.198	0.473		2>4>5
	71-90	185	4.107	0.453		3>5
	70 及以下	119	3.851	0.662		
分析性与 系统性	131-150	36	3.656	0.818	18.168***	1>3>4
	111-130	57	3.467	0.591		1>5
	91-110	106	3.262	0.553		2>3>4
	71-90	185	3.018	0.590		2>5
	70 及以下	119	2.911	0.586		3>5
自信心	131-150	36	3.398	0.920	31.696***	
	111-130	57	3.015	0.582		1>2>4>5
	91-110	106	2.890	0.619		1>3>4>5
	71-90	185	2.640	0.591		2>4>5
	70 及以下	119	2.261	0.623		
求知欲	131-150	36	3.979	0.698	14.894***	
	111-130	57	3.956	0.613		1>3>4>5
	91-110	106	3.722	0.580		2>3>4>5
	71-90	185	3.558	0.595		
	70 及以下	119	3.305	0.757		
数学批判性 思维倾向	131-150	36	3.834	0.638	37.078***	
	111-130	57	3.645	0.415		
	91-110	106	3.482	0.410		1>2>3>4>5
	71-90	185	3.281	0.392		
	70 及以下	119	3.010	0.508		

注：*表示显著性概率 $p<0.05$ ；**表示显著性概率 $p<0.01$ ；***表示显著性概率 $p<0.001$

4.1.2.4 高中生数学批判性思维倾向的学生干部差异

由表 4-7 可知，高中生数学批判性思维倾向在学生干部上存在显著差异，且担任学生干部的学生的数学批判性思维倾向水平更高。在各维度上，只有寻找真相和求知欲维度在学生干部上存在明显差异，其余维度不存在显著差异，但从均值上可以看出，担任学生干部的学生在各维度上的均值均高于不是学生干部的学生。

表 4-7 高中生数学批判性思维倾向的学生干部差异

检验变量	学生干部	N	均值	标准差	t 值
寻找真相	是	160	3.568	0.740	2.072*
	否	343	3.425	0.712	
开放思想	是	160	4.189	0.518	1.917
	否	343	4.088	0.564	
分析性与系统性	是	160	3.191	0.624	1.208
	否	343	3.117	0.647	
自信心	是	160	2.777	0.692	1.689
	否	343	2.663	0.710	
求知欲	是	160	3.753	0.643	3.315**
	否	343	3.540	0.684	
数学批判性思维倾向	是	160	3.426	0.466	2.600*
	否	343	3.300	0.524	

注：*表示显著性概率 $p < 0.05$ ；**表示显著性概率 $p < 0.01$ ；***表示显著性概率 $p < 0.001$

4.1.2.5 高中生数学批判性思维倾向的班主任差异

由表 4-8 可知，高中生数学批判性思维倾向在班主任是否为数学教师上存在显著差异，且班主任是数学教师的学生的数学批判性思维倾向水平更高。在各维度上，除了开放思想和分析性与系统性维度在班主任上不存在显著差异之外，其余维度均存在显著差异，且从均值上可以看出，班主任为数学教师的高中生，其在寻找真相、开放思想、分析性与系统性、自信心和求知欲维度的均值都高于班主任为其他教师的高中生。

表 4-8 高中生数学批判性思维倾向的班主任差异

检验变量	班主任	N	均值	标准差	t 值
寻找真相	数学教师	183	3.622	0.659	3.603***
	其他教师	320	3.383	0.745	
开放思想	数学教师	183	4.152	0.525	0.965
	其他教师	320	4.102	0.565	
分析性与系统性	数学教师	183	3.197	0.616	1.484
	其他教师	320	3.109	0.653	
自信心	数学教师	183	2.813	0.721	2.755**
	其他教师	320	2.634	0.689	
求知欲	数学教师	183	3.691	0.614	2.176*
	其他教师	320	3.560	0.708	
数学批判性思维倾向	数学教师	183	3.431	0.485	3.053**
	其他教师	320	3.288	0.516	

注：*表示显著性概率 $p < 0.05$ ；**表示显著性概率 $p < 0.01$ ；***表示显著性概率 $p < 0.001$

4.1.2.6 高中生数学批判性思维倾向的数学喜爱程度差异

本研究将高中生对数学的喜爱程度划分为 5 个程度，“非常喜欢”记为程度 1，“喜欢”记为程度 2，“不确定”记为程度 3，“不喜欢”记为程度 4，“非常不喜欢”记为程度 5。

由表 4-9 可知，高中生数学批判性思维倾向及各维度在数学喜爱程度上均存在显著差异，且喜欢数学的学生占多数。从均值方面可知，除了在分析性与系统性、自信心维度中，非常不喜欢数学与不喜欢数学的学生的均值基本一致，数学批判性思维倾向和其余维度的均值在各个喜爱程度上的排序均为：非常喜欢>喜欢>不确定>不喜欢>非常不喜欢。从事后检验的结果可知，数学批判性思维倾向的均值在程度 1 和程度 2 之间不存在显著差异，在其余程度之间均存在明显差异；在各维度上，程度 1 和程度 2 之间、程度 3 和程度 4 之间、程度 4 和程度 5 之间在个别维度中不存在显著差异，其余程度间均存在明显差异。因此，综合表明对数学喜爱程度越高的学生，其数学批判性思维倾向水平越高。

表 4-9 高中生数学批判性思维倾向的数学喜爱程度差异

检验变量	数学喜爱程度	N	均值	标准差	F 值	事后检验
寻找真相	非常喜欢	56	4.000	0.688	27.861***	1>2>3>4 1>2>3>5
	喜欢	213	3.631	0.643		
	不确定	182	3.299	0.609		
	不喜欢	35	2.920	0.744		
	非常不喜欢	17	2.671	0.969		
开放思想	非常喜欢	56	4.375	0.424	17.231***	1>3>4 1>3>5 2>3>4 2>3>5
	喜欢	213	4.238	0.485		
	不确定	182	4.027	0.510		
	不喜欢	35	3.764	0.514		
	非常不喜欢	17	3.529	1.068		
分析性与 系统性	非常喜欢	56	3.629	0.625	16.856***	1>2>3 1>2>4 1>2>5
	喜欢	213	3.221	0.618		
	不确定	182	2.993	0.515		
	不喜欢	35	2.794	0.683		
	非常不喜欢	17	2.824	0.964		
自信心	非常喜欢	56	3.411	0.715	48.368***	1>2>3>4 1>2>3>5
	喜欢	213	2.865	0.566		
	不确定	182	2.498	0.572		
	不喜欢	35	1.943	0.581		
	非常不喜欢	17	2.000	0.903		
求知欲	非常喜欢	56	4.054	0.690	33.514***	1>2>3>4>5
	喜欢	213	3.765	0.537		
	不确定	182	3.497	0.571		
	不喜欢	35	3.007	0.848		

	非常不喜欢	17	2.588	0.829		
	非常喜欢	56	3.847	0.416		
数学批判性思维倾向	喜欢	213	3.478	0.406	55.890***	1>2>3>4
	不确定	182	3.190	0.376		1>2>3>5
	不喜欢	35	2.805	0.521		
	非常不喜欢	17	2.664	0.813		

注：***表示显著性概率 $p < 0.001$

4.2 高中生数学元认知的现状

4.2.1 高中生数学元认知的总体水平

（1）高中生数学元认知的整体分析

使用 SPSS25.0 软件对 503 份有效问卷数据进行高中生数学元认知总分的描述性统计。其结果如表 4-10 所示，高中生的数学元认知总分的平均值为 117.628 分，标准差为 18.575 分，其中最低为 40 分，最高分为 176 分。为进一步了解高中生的数学元认知水平具体如何，根据均值（约为 118 分）和标准差（约为 19 分）将其划分为三个水平（见表 4-11）。

表 4-10 高中生数学元认知总分的描述性统计

检验变量	N	极小值	极大值	均值	标准差
数学元认知	503	40	176	117.628	18.575

水平一为高水平，其得分区间为 138-176 分，人数为 57 人，占总人数的 11.3%；水平二为中等水平，其得分区间为 100-137 分，人数为 368 人，占总人数的 73.2%；水平三为低水平，其得分区间为 40-99 分，人数为 78 人，占总人数的 15.5%。由此看出，高中生的数学元认知整体处于中等偏上水平，处于高水平的高中生较少。

表 4-11 高中生数学元认知水平划分及统计情况

水平划分	得分区间	N	占比
水平一	138-176	57	11.3%
水平二	100-137	368	73.2%
水平三	40-99	78	15.5%

（2）高中生数学元认知的各维度分析

由于各维度的得分不一，因此计算各维度均分后再进行描述性统计，结果由表

4-12 所示。可以看出，各一级维度均值的排名为：数学元认知体验>数学元认知监控>数学元认知知识，分别为 3.598 分、3.213 分、3.189 分。其中，除了关于策略的知识这个二级维度的均值为 2.852，其余一级维度、二级维度以及整体的均值都大于 3 分，再次表明高中生的数学元认知处于中等偏上水平。此外，在二级维度中，情感体验维度的平均值最高，高达 3.812 分，说明高中生面对各种数学问题时，能较为有效的调控自身情绪，从而促使问题更好的解决。而关于策略的知识维度的平均分最低，低至 2.852 分，说明高中生对数学学习策略或解题策略的认知不够成熟。

表 4-12 高中生数学元认知及各维度平均分的描述性统计

检验变量	N	极大值	极小值	均值	标准差
关于个体的知识	503	1.000	5.000	3.295	0.651
关于任务的知识	503	1.000	5.000	3.421	0.636
关于策略的知识	503	1.000	5.000	2.852	0.703
认知体验	503	1.000	5.000	3.385	0.626
情感体验	503	1.000	5.000	3.812	0.718
定向与计划	503	1.000	5.000	3.250	0.683
监控与调节	503	1.000	5.000	3.330	0.665
反思与评价	503	1.000	5.000	3.232	0.685
反馈与检验	503	1.000	5.000	3.171	0.705
组织与管理	503	1.000	5.000	3.086	0.759
数学元认知知识	503	1.000	5.000	3.189	0.561
数学元认知体验	503	1.000	5.000	3.598	0.575
数学元认知监控	503	1.000	5.000	3.213	0.570
数学元认知	503	1.220	4.900	3.334	0.509

4.2.2 高中生数学元认知的差异性分析

4.2.2.1 高中生数学元认知的性别差异

由表 4-13 可知，除了情感体验维度之外，高中生数学元认知及其余维度均在性别上存在显著差异，且男生的均值高于女生，说明男生的数学元认知水平显著高于女生。在情感体验维度上，女生与男生的均值基本一致，二者无显著差异。

表 4-13 高中生数学元认知的性别差异

检验变量	性别	N	均值	标准差	t 值
关于个体的知识	男	184	3.458	0.610	4.329***
	女	319	3.201	0.657	
关于任务的知识	男	184	3.562	0.628	3.819***
	女	319	3.340	0.628	

关于策略的知识	男	184	3.099	0.691	6.216***
	女	319	2.709	0.670	
认知体验	男	184	3.542	0.627	4.335***
	女	319	3.295	0.609	
情感体验	男	184	3.808	0.726	-0.091
	女	319	3.814	0.715	
定向与计划	男	184	3.341	0.726	2.293*
	女	319	3.197	0.652	
监控与调节	男	184	3.499	0.629	4.413***
	女	319	3.232	0.666	
反思与评价	男	184	3.367	0.735	3.397**
	女	319	3.154	0.643	
反馈与检验	男	184	3.355	0.727	4.538***
	女	319	3.064	0.670	
组织与管理	男	184	3.228	0.759	3.233**
	女	319	3.003	0.748	
数学元认知知识	男	184	3.373	0.557	5.745***
	女	319	3.083	0.537	
数学元认知体验	男	184	3.675	0.575	2.274*
	女	319	3.554	0.571	
数学元认知监控	男	184	3.358	0.600	4.395***
	女	319	3.130	0.536	
数学元认知	男	184	3.469	0.519	4.601***
	女	319	3.256	0.488	

注：*表示显著性概率 $p < 0.05$ ；**表示显著性概率 $p < 0.01$ ；***表示显著性概率 $p < 0.001$

4.2.2.2 高中生数学元认知的年级差异

由表 4-14 可知，在数学元认知及其各维度上，高二年级学生的均值都高于高一年级学生。接着，在年级差异的显著性方面，高二年级学生的数学元认知水平显著强于高一年级学生。具体到各维度上，在一级维度中，高二年级学生的数学元认知知识、数学元认知体验和数学元认知监控亦显著强于高一年级学生；在二级维度中，除了关于策略的知识、监控与调节、反思与评价维度在年级上不存在明显差异外，其余二级维度均存在显著差异。因此，综合表明高二年级学生的数学元认知水平显著较高，具备更丰富的数学知识经验，能够较好地调控自我认知。

表 4-14 高中生数学元认知的年级差异

检验变量	年级	N	均值	标准差	t 值
关于个体的知识	高一	239	3.195	0.715	3.296**
	高二	264	3.386	0.574	
关于任务的知识	高一	239	3.360	0.695	2.032*

	高二	264	3.476	0.574	
关于策略的知识	高一	239	2.839	0.749	0.394
	高二	264	2.864	0.659	
认知体验	高一	239	3.310	0.682	2.56*
	高二	264	3.453	0.564	
情感体验	高一	239	3.723	0.758	2.654**
	高二	264	3.893	0.672	
定向与计划	高一	239	3.175	0.713	2.349*
	高二	264	3.317	0.648	
监控与调节	高一	239	3.327	0.685	0.068
	高二	264	3.331	0.647	
反思与评价	高一	239	3.178	0.738	1.665
	高二	264	3.280	0.631	
反馈与检验	高一	239	3.084	0.723	2.644**
	高二	264	3.249	0.679	
组织与管理	高一	239	3.013	0.746	2.057*
	高二	264	3.152	0.767	
数学元认知知识	高一	239	3.131	0.616	2.199*
	高二	264	3.242	0.502	
数学元认知体验	高一	239	3.516	0.619	3.059**
	高二	264	3.673	0.522	
数学元认知监控	高一	239	3.155	0.594	2.181*
	高二	264	3.266	0.544	
数学元认知	高一	239	3.268	0.552	2.769**
	高二	264	3.394	0.460	

注：*表示显著性概率 $p < 0.05$ ；**表示显著性概率 $p < 0.01$ ；***表示显著性概率 $p < 0.001$

4.2.2.3 高中生数学元认知的数学学业成绩差异

由表 4-15 可知，高中生数学元认知整体及各一级维度在数学学业成绩上均存在显著差异，且均值的排序均为：水平 1 > 水平 2 > 水平 3 > 水平 4 > 水平 5。从事后检验的结果可知，数学学业成绩处于水平 1 和水平 2 的高中生的数学元认知水平无显著差异，但这两个成绩水平的高中生显著强于水平 3、水平 4 和水平 5 的高中生，而水平 3 显著强于水平 4，水平 4 显著强于水平 5。因此，综合表明数学学业成绩越佳的学生，其数学元认知水平越高。

表 4-15 高中生数学元认知及一级维度的数学学业成绩差异

检验变量	数学学业成绩	N	均值	标准差	F 值	事后检验
数学元认知知识	131-150	36	3.593	0.798	29.149***	1 > 3 > 4 > 5 2 > 4 > 5
	111-130	57	3.502	0.499		
	91-110	106	3.367	0.460		

	71-90	185	3.139	0.447		
	70 及以下	119	2.837	0.528		
数学元认知体验	131-150	36	3.898	0.717	18.046***	1>4>5
	111-130	57	3.901	0.529		2>4>5
	91-110	106	3.742	0.443		3>4>5
	71-90	185	3.550	0.476		
	70 及以下	119	3.310	0.644		
数学元认知监控	131-150	36	3.607	0.801	26.135***	1>3>4>5
	111-130	57	3.574	0.510		2>3>4>5
	91-110	106	3.365	0.465		
	71-90	185	3.143	0.439		
	70 及以下	119	2.896	0.581		
数学元认知	131-150	36	3.700	0.708	31.393***	1>3>4>5
	111-130	57	3.659	0.438		2>3>4>5
	91-110	106	3.491	0.392		
	71-90	185	3.277	0.379		
	70 及以下	119	3.014	0.529		

注：***表示显著性概率 $p<0.001$

由表 4-16 可知，高中生数学元认知的每个二级维度在数学学业成绩上均存在显著差异。在均值方面，除了在情感体验、监控与调节、反馈与检验维度上，数学学业成绩处于水平 2 的高中生的均值略高于处于水平 1 高中生之外，不同成绩水平的高中生在其余二级维度上的均值排序均为：水平 1>水平 2>水平 3>水平 4>水平 5。又从事后检验结果可知，数学学业成绩处于水平 1、水平 2 和水平 3 的学生在各维度上显著强于成绩处于水平 4 和水平 5 的学生，而水平 4 的学生又显著强于水平 5 的学生。因此，综合表明数学学业成绩越佳的学生，其数学元认知水平越高。

表 4-16 高中生数学元认知二级维度的数学学业成绩差异

检验变量	数学学业成绩	N	均值	标准差	F 值	事后检验
关于个体的知识	131-150	36	3.722	0.855	22.366***	1>3>4>5
	111-130	57	3.618	0.543		2>4>5
	91-110	106	3.453	0.589		
	71-90	185	3.266	0.546		
	70 及以下	119	2.916	0.632		
关于任务的知识	131-150	36	3.731	0.946	14.019***	1>4>5
	111-130	57	3.673	0.572		2>4>5
	91-110	106	3.566	0.531		3>4>5
	71-90	185	3.396	0.524		
	70 及以下	119	3.115	0.670		
关于策略的知识	131-150	36	3.326	0.890	23.525***	1>4>5

	111-130	57	3.215	0.676		2>4>5
	91-110	106	3.083	0.567		3>4>5
	71-90	185	2.754	0.608		
	70 及以下	119	2.481	0.673		
认知体验	131-150	36	3.731	0.861		
	111-130	57	3.667	0.591		1>4>5
	91-110	106	3.528	0.512	16.199***	2>4>5
	71-90	185	3.348	0.509		3>4>5
	70 及以下	119	3.076	0.673		
情感体验	131-150	36	4.065	0.784		
	111-130	57	4.135	0.636		1>4>5
	91-110	106	3.956	0.580	10.219***	2>4>5
	71-90	185	3.753	0.656		3>4>5
	70 及以下	119	3.543	0.827		
定向与计划	131-150	36	3.722	0.812		
	111-130	57	3.579	0.622		
	91-110	106	3.373	0.627	16.811***	1>3>4>5
	71-90	185	3.182	0.603		2>4>5
	70 及以下	119	2.943	0.671		
监控与调节	131-150	36	3.653	0.768		
	111-130	57	3.693	0.643		1>4>5
	91-110	106	3.509	0.587	17.331***	2>4>5
	71-90	185	3.249	0.553		3>4>5
	70 及以下	119	3.023	0.704		
反思与评价	131-150	36	3.590	0.883		
	111-130	57	3.570	0.597		1>4>5
	91-110	106	3.403	0.581	17.031***	2>4>5
	71-90	185	3.176	0.592		3>4>5
	70 及以下	119	2.895	0.713		
反馈与检验	131-150	36	3.424	1.019		
	111-130	57	3.535	0.642		1>4>5
	91-110	106	3.342	0.599	13.148***	2>4>5
	71-90	185	3.095	0.628		3>4>5
	70 及以下	119	2.884	0.688		
组织与管理	131-150	36	3.648	1.033		
	111-130	57	3.491	0.727		
	91-110	106	3.198	0.723	18.721***	1>3>4>5
	71-90	185	3.013	0.603		2>3>4>5
	70 及以下	119	2.734	0.729		

注：***表示显著性概率 $p < 0.001$

4.2.2.4 高中生数学元认知的学生干部差异

由表 4-17 可知，整体上，高中生数学元认知在学生干部上不存在显著差异，但担任学生干部的高中生的数学元认知均值与不是学生干部的学生基本一致。具体到各维度上，只有一级维度中的数学元认知体验维度和二级维度中的情感体验、定向与计划维度在学生干部上存在明显差异，其余维度不存在显著差异，且从均值也可以看出，担任学生干部的学生在其余维度上的均值都与不是学生干部的学生基本一致。

表 4-17 高中生数学元认知的学生干部差异

检验变量	学生干部	N	均值	标准差	t 值
关于个体的知识	是	160	3.345	0.641	1.178
	否	343	3.272	0.656	
关于任务的知识	是	160	3.448	0.636	0.652
	否	343	3.408	0.637	
关于策略的知识	是	160	2.881	0.679	0.640
	否	343	2.838	0.714	
认知体验	是	160	3.427	0.630	1.029
	否	343	3.365	0.624	
情感体验	是	160	3.929	0.686	2.516*
	否	343	3.757	0.728	
定向与计划	是	160	3.352	0.592	2.464*
	否	343	3.202	0.717	
监控与调节	是	160	3.356	0.661	0.616
	否	343	3.317	0.667	
反思与评价	是	160	3.311	0.666	1.777
	否	343	3.195	0.692	
反馈与检验	是	160	3.141	0.662	-0.649
	否	343	3.184	0.724	
组织与管理	是	160	3.177	0.675	1.853
	否	343	3.043	0.793	
数学元认知知识	是	160	3.225	0.547	0.969
	否	343	3.173	0.568	
数学元认知体验	是	160	3.678	0.583	2.132*
	否	343	3.561	0.568	
数学元认知监控	是	160	3.267	0.501	1.451
	否	343	3.188	0.599	
数学元认知	是	160	3.390	0.488	1.700
	否	343	3.307	0.518	

注：*表示显著性概率 $p < 0.05$ ；**表示显著性概率 $p < 0.01$ ；***表示显著性概率 $p < 0.001$

4.2.2.5 高中生数学元认知的班主任差异

由表 4-18 可知，高中生数学元认知在班主任是否为数学教师上存在显著差异，且班主任是数学教师的学生的数学元认知水平明显更高。在各维度上，除了数学元认知体验维度及其两个子维度和二级维度中的定向与计划、反思与评价、组织与管理维度在班主任上不存在显著差异之外，其余一级和二级维度均存在显著差异，且从均值上可以看出，班主任为数学教师的高中生在各维度上的均值都高于班主任为其他教师的高中生。因此，综合说明班主任为数学老师更能积极影响学生的数学元认知水平。

表 4-18 高中生数学元认知的班主任差异

检验变量	班主任	N	均值	标准差	t 值
关于个体的知识	数学教师	183	3.374	0.594	2.066*
	其他教师	320	3.250	0.679	
关于任务的知识	数学教师	183	3.510	0.599	2.389*
	其他教师	320	3.370	0.652	
关于策略的知识	数学教师	183	2.940	0.677	2.132*
	其他教师	320	2.802	0.713	
认知体验	数学教师	183	3.455	0.618	1.910
	其他教师	320	3.345	0.628	
情感体验	数学教师	183	3.851	0.740	0.917
	其他教师	320	3.790	0.706	
定向与计划	数学教师	183	3.283	0.680	0.827
	其他教师	320	3.231	0.685	
监控与调节	数学教师	183	3.414	0.634	2.162*
	其他教师	320	3.281	0.678	
反思与评价	数学教师	183	3.298	0.628	1.700
	其他教师	320	3.194	0.714	
反馈与检验	数学教师	183	3.280	0.693	2.654**
	其他教师	320	3.108	0.704	
组织与管理	数学教师	183	3.162	0.689	1.715
	其他教师	320	3.042	0.794	
数学元认知知识	数学教师	183	3.275	0.528	2.596*
	其他教师	320	3.141	0.575	
数学元认知体验	数学教师	183	3.653	0.598	1.614
	其他教师	320	3.567	0.560	
数学元认知监控	数学教师	183	3.287	0.532	2.209*
	其他教师	320	3.171	0.588	
数学元认知	数学教师	183	3.405	0.492	2.388*
	其他教师	320	3.293	0.515	

注：*表示显著性概率 $p < 0.05$ ；**表示显著性概率 $p < 0.01$ ；***表示显著性概率 $p < 0.001$

4.2.2.6 高中生数学元认知的数学喜爱程度差异

由表 4-19 可知，高中生数学元认知及各一级维度在数学喜爱程度上均存在显著差异，且均值的排序均为：非常喜欢>喜欢>不确定>不喜欢>非常不喜欢。从事后检验的结果亦可知，整体上，各喜爱程度间的差异显著；各一级维度上，除了非常喜欢和喜欢数学的学生之间差异不显著外，其余喜爱程度间的差异显著。总的来说，对数学喜爱程度越高的学生，其数学元认知水平显著越高。

表 4-19 高中生数学元认知及一级维度的数学喜爱程度差异

检验变量	数学喜爱程度	N	均值	标准差	F 值	事后检验
数学元认知知识	非常喜欢	56	3.683	0.593	38.048***	1>2>3>5 1>2>4>5
	喜欢	213	3.317	0.438		
	不确定	182	3.028	0.487		
	不喜欢	35	2.860	0.533		
	非常不喜欢	17	2.371	0.737		
数学元认知体验	非常喜欢	56	3.967	0.572	28.135***	1>2>3>4>5
	喜欢	213	3.749	0.430		
	不确定	182	3.446	0.553		
	不喜欢	35	3.252	0.538		
	非常不喜欢	17	2.843	0.897		
数学元认知监控	非常喜欢	56	3.580	0.629	19.608***	1>2>3>5 1>2>4>5
	喜欢	213	3.311	0.459		
	不确定	182	3.104	0.524		
	不喜欢	35	2.929	0.638		
	非常不喜欢	17	2.542	0.832		
数学元认知	非常喜欢	56	3.743	0.550	36.427***	1>2>3>4>5
	喜欢	213	3.459	0.366		
	不确定	182	3.193	0.463		
	不喜欢	35	3.014	0.500		
	非常不喜欢	17	2.585	0.725		

注：***表示显著性概率 $p<0.001$

由表 4-20 可知，高中生数学元认知的每个二级维度在数学喜爱程度上均存在显著差异，且均值的排序均为：非常喜欢>喜欢>不确定>不喜欢>非常不喜欢。从事后检验的结果亦可知，虽然程度 3 和程度 4 之间、程度 4 和程度 5 之间在个别维度上不存在显著差异，但综合来看，对数学喜爱程度越高的学生，其均值显著越高。

表 4-20 高中生数学元认知二级维度的数学喜爱程度差异

检验变量	数学喜爱程度	N	均值	标准差	F 值	事后检验
关于个体的知识	非常喜欢	56	3.790	0.595	28.588***	1>2>3>4>5
	喜欢	213	3.434	0.515		
	不确定	182	3.135	0.610		
	不喜欢	35	2.893	0.659		
	非常不喜欢	17	2.471	0.972		
关于任务的知识	非常喜欢	56	3.839	0.682	15.859***	1>2>3>5 1>2>4
	喜欢	213	3.520	0.537		
	不确定	182	3.271	0.600		
	不喜欢	35	3.200	0.673		
	非常不喜欢	17	2.863	0.906		
关于策略的知识	非常喜欢	56	3.420	0.755	33.233***	1>2>3>5 1>2>4>5
	喜欢	213	2.996	0.605		
	不确定	182	2.679	0.589		
	不喜欢	35	2.486	0.675		
	非常不喜欢	17	1.779	0.723		
认知体验	非常喜欢	56	3.685	0.692	15.315***	1>2>3>5 1>2>4>5
	喜欢	213	3.504	0.560		
	不确定	182	3.264	0.580		
	不喜欢	35	3.171	0.514		
	非常不喜欢	17	2.647	0.886		
情感体验	非常喜欢	56	4.250	0.614	24.156***	1>2>3>4 1>2>3>5
	喜欢	213	3.994	0.563		
	不确定	182	3.628	0.700		
	不喜欢	35	3.333	0.750		
	非常不喜欢	17	3.039	1.154		
定向与计划	非常喜欢	56	3.612	0.704	14.712***	1>2>3>5 1>2>4>5
	喜欢	213	3.371	0.612		
	不确定	182	3.111	0.634		
	不喜欢	35	2.993	0.685		
	非常不喜欢	17	2.544	0.932		
监控与调节	非常喜欢	56	3.670	0.791	9.436***	1>2>3>5 1>2>4
	喜欢	213	3.407	0.537		
	不确定	182	3.221	0.660		
	不喜欢	35	3.114	0.711		
	非常不喜欢	17	2.838	0.960		
反思与评价	非常喜欢	56	3.598	0.700	14.696***	1>2>3>4 1>2>3>5
	喜欢	213	3.353	0.573		
	不确定	182	3.106	0.667		
	不喜欢	35	2.857	0.819		
	非常不喜欢	17	2.618	0.825		
反馈与检验	非常喜欢	56	3.509	0.798	11.654***	1>2>3>5

	喜欢	213	3.239	0.624		1>2>4>5
	不确定	182	3.099	0.656		
	不喜欢	35	2.986	0.740		
	非常不喜欢	17	2.338	0.927		
	非常喜欢	56	3.512	0.763		
组织与管理	喜欢	213	3.183	0.661	13.416***	1>2>3>4
	不确定	182	2.982	0.717		1>2>3>5
	不喜欢	35	2.695	0.865		
	非常不喜欢	17	2.373	1.060		

注：***表示显著性概率 $p<0.001$

4.3 相关性分析结果

4.3.1 三变量之间的相关分析

利用皮尔逊（Pearson）积差相关分析，对数学批判性思维倾向、数学元认知以及数学学业成绩三个变量之间的相关性进行分析。相关分析结果如表 4-21 所示，可知数学批判性思维倾向、数学元认知以及数学学业成绩任意两者之间相关显著。具体而言，数学批判性思维倾向和数学元认知之间呈显著正相关关系（ $r=0.655$ ， $p<0.01$ ），数学批判性思维倾向和数学学业成绩之间呈显著正相关关系（ $r=0.476$ ， $p<0.01$ ），数学元认知和数学学业成绩之间亦呈显著正相关关系（ $r=0.438$ ， $p<0.01$ ），验证了假设 H1。

表 4-21 三变量之间的相关分析结果

	数学批判性思维倾向	数学元认知	数学学业成绩
数学批判性思维倾向	1		
数学元认知	0.655**	1	
数学学业成绩	0.476**	0.438**	1

注：**表示在 0.01 水平（双尾）上相关性显著

4.3.2 三变量各维度之间的相关分析

利用皮尔逊（Pearson）积差相关分析，对数学批判性思维倾向和数学元认知各维度与数学学业成绩之间的相关性进行分析。相关分析结果如表 4-22 所示，可知数学批判性思维倾向和数学元认知各维度与数学学业成绩相关显著，且数学批判性思维倾向五个维度两两之间相关显著，数学元认知三个维度两两之间相关显著。具体而言，寻找真相维度与数学元认知知识（ $r=0.477$ ， $p<0.01$ ）、数学元认知体验（ $r=0.430$ ， $p<0.01$ ）以及数学元认知监控（ $r=0.430$ ， $p<0.01$ ）均存在显著正相关关系；开放思

想维度与数学元认知知识 ($r=0.459, p<0.01$)、数学元认知体验 ($r=0.486, p<0.01$) 以及数学元认知监控 ($r=0.439, p<0.01$) 均存在显著正相关关系; 分析性与系统性维度与数学元认知知识 ($r=0.555, p<0.01$)、数学元认知体验 ($r=0.434, p<0.01$) 以及数学元认知监控 ($r=0.641, p<0.01$) 均存在显著正相关关系; 自信心维度与数学元认知知识 ($r=0.644, p<0.01$)、数学元认知体验 ($r=0.493, p<0.01$) 以及数学元认知监控 ($r=0.532, p<0.01$) 均存在显著正相关关系; 求知欲维度与数学元认知知识 ($r=0.552, p<0.01$)、数学元认知体验 ($r=0.554, p<0.01$) 以及数学元认知监控 ($r=0.598, p<0.01$) 均存在显著正相关关系; 数学批判性思维倾向各维度均与数学学业成绩呈显著正相关关系, 相关系数分别为 0.336、0.328、0.353、0.443、0.321, 且均在 0.01 水平上显著; 数学元认知各维度均与数学学业成绩呈显著正相关关系, 相关系数分别为 0.424、0.344、0.410, 且均在 0.01 水平上显著。

表 4-22 三变量各维度之间的相关分析结果

	寻找真相	开放思想	分析性与系统性	自信心	求知欲	数学元认知知识	数学元认知体验	数学元认知监控	数学学业成绩
寻找真相	1								
开放思想	.442**	1							
分析性与系统性	.382**	.390**	1						
自信心	.569**	.440**	.521**	1					
求知欲	.429**	.499**	.512**	.499**	1				
数学元认知知识	.477**	.459**	.555**	.644**	.552**	1			
数学元认知体验	.430**	.486**	.434**	.493**	.554**	.678**	1		
数学元认知监控	.430**	.439**	.641**	.532**	.598**	.732**	.696**	1	
数学学业成绩	.336**	.328**	.353**	.443**	.321**	.424**	.344**	.410**	1

注: **表示在 0.01 水平 (双尾) 上相关性显著

4.4 中介效应检验

目前, 应用最为广泛的间接效应检验方法是使用 Bootstrap 法直接检验系数乘积 ab , 这是一种重复抽样的方法, 若重复抽样的对象为样本数据, 则为非参数 Bootstrap 法。为克服传统中介效应检验的缺陷, 温忠麟、叶宝娟 (2011) 提出的新的中介效应检验流程^①, 中介模型示意图见图 4-1。第一步, 检验总效应系数 c , 若显著则中介效应成立, 反之则为遮掩效应。第二步, 检验系数 a 和 b , 若两者都显著则间接效应显著, 并进行下一步; 若至少有一个不显著, 则需使用 Bootstrap 法进一步检验 $ab = 0$,

^① 温忠麟, 叶宝娟. 中介效应分析: 方法和模型发展[J]. 心理科学进展, 2014, 22(05): 731-745.

若显著，则间接效应显著，反之则代表间接效应不显著并停止分析。第三步，检验系数 c' ，若不显著则表示直接效应不显著，只存在中介效应，直接按照中介效应解释结果即可；若显著则表示直接效应显著，并进行下一步。第四步，比较 ab 和 c' 的符号，若同号，则为部分中介效应，报告中介效应占总效应的百分比；若异号，则为遮掩效应，报告间接效应与直接效应的百分比的绝对值。其中，Hayes（2009）认为判断间接效应显著的条件是，在 95% 的置信区间估计内不包含 0^①。

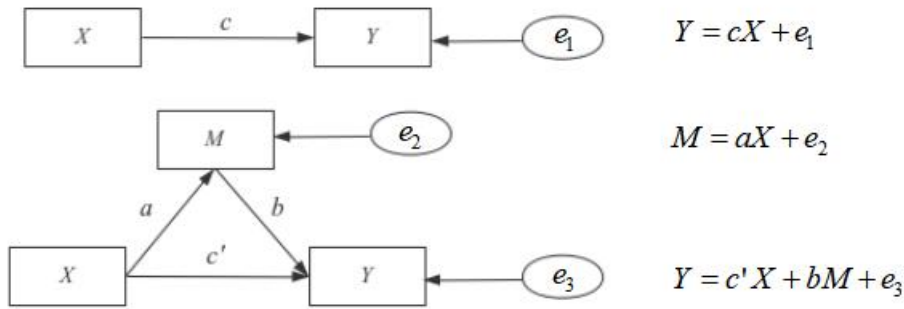


图 4-1 中介模型示意图

基于对已有文献的研究，本文提出三个结构方程模型，分别为总效应模型 M1、简单中介模型 M2 以及并行多重中介模型 M3。根据温忠麟、叶宝娟的新中介效应分析方法，在 AMOS24.0 软件中采用非参数 Bootstrap 法，检验数学批判性思维倾向在数学元认知与数学学业成绩之间是否存在中介作用，并进一步检验数学批判性思维倾向各维度在两者之间的中介效应。

假设模型 1（M1）：数学元认知对数学学业成绩的总效应模型；

假设模型 2（M2）：将数学批判性思维倾向作为数学元认知和数学学业成绩之间的中介变量，整体构成简单中介模型；

假设模型 3（M3）：将数学批判性思维倾向各维度作为数学元认知和数学学业成绩之间的中介变量，整体构成并行多重中介模型。

4.4.1 数学元认知对数学学业成绩的总效应检验

首先，检验数学元认知对数学学业成绩的总效应是否显著，建立以数学元认知作为自变量，数学学业成绩作为因变量的总效应模型 M1（见图 4-2）。

^① Hayes A. F. Beyond Baron and Kenny: Statistical mediation analysis in the new millennium[J]. *Communication Monographs*, 2009, 76(4):408-420.

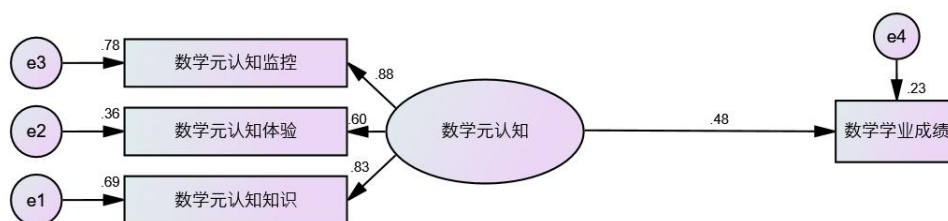


图 4-2 数学元认知对数学学业成绩的总效应模型 M1

数学元认知对数学学业成绩的总效应模型拟合结果如表 4-23 所示， $\chi^2/df=1.052<3$ ， $RMSEA=0.010<0.05$ ，其余拟合指标均达到适配标准，且路径系数显著（ $c=0.484$ ， $p<0.001$ ）（见表 4-24）。因此，该总效应模型 M1 各指标拟合优秀，无需对其进行修正。

表 4-23 数学元认知对数学学业成绩的总效应模型拟合结果

	χ^2/df	RMSEA	GFI	NFI	RFI	IFI	TLI	CFI	AGFI
适配标准	<3 优秀	<0.05 优秀	>0.90	>0.90	>0.90	>0.90	>0.90	>0.90	>0.90
	<5 良好	<0.08 良好							
拟合结果	1.052	0.010	0.998	0.997	0.992	0.999	0.998	0.995	0.989

表 4-24 数学元认知对数学学业成绩的路径检验

路径	标准化路径系数	S.E.	C.R	P
数学元认知→数学学业成绩	0.484	0.010	10.608	***

接着，通过非参数 Bootstrap 法进行总效应检验，反复抽取 1000 次样本，所得结果如表 4-25 所示，数学元认知对数学学业成绩的总效应值为 0.484，置信区间为 [0.088,0.130]，不包含 0，表明数学元认知对数学学业成绩的总效应显著，验证了假设 H2a。因此，中介效应成立，可进行下一步检验。

表 4-25 数学元认知对数学学业成绩的总效应检验

路径	效应值	Bias-corrected 95%CI		
		Lower	Upper	P
数学元认知→数学学业成绩	0.484	0.088	0.130	0.001

4.4.2 数学批判性思维倾向在数学元认知和数学学业成绩之间的中介效应检验

其次，检验数学批判性思维倾向在数学元认知和数学学业成绩之间的中介效应是否显著，建立以数学元认知作为自变量，数学学业成绩作为因变量，数学批判性思维倾向为中介变量的简单中介模型 M2（见图 4-3）。

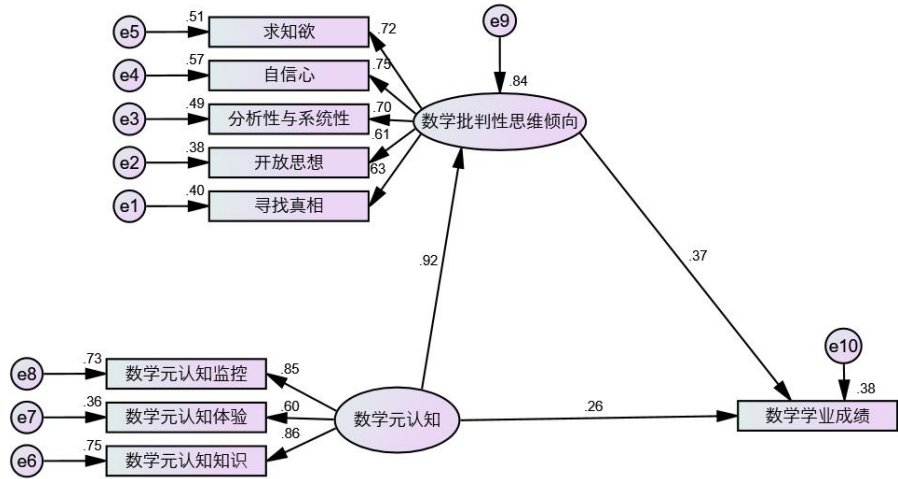


图 4-3 以数学批判性思维倾向为中介变量的简单中介模型 M2 预设图

以数学批判性思维倾向为数学元认知与数学学业成绩中介变量的简单中介模型拟合结果如表 4-26 所示，部分拟合指标尚未达到适配标准，其中， $\chi^2/df=6.345>5$ ，RMSEA=0.103>0.08，RFI=0.894 和 AGFI=0.876 均小于 0.90。鉴于此，需对预设的简单中介模型 M2 进行修正（见图 4-4），修正模型的拟合指标如表 4-26 所示， $\chi^2/df=3.522<5$ ，RMSEA=0.071<0.08，RFI=0.941 和 AGFI=0.931 均大于 0.90，其余拟合指标亦均达到适配标准。并且，数学元认知对数学批判性思维倾向的路径系数显著（ $a=0.881$ ， $p<0.001$ ）；数学批判性思维倾向对数学学业成绩的路径系数显著（ $b=0.359$ ， $p<0.01$ ），验证了假设 H2b；数学元认知对数学学业成绩的路径系数亦显著（ $c'=0.287$ ， $p<0.05$ ），各路径系数均显著（见表 4-27）。因此，综合表明修正后的模型拟合良好。

表 4-26 以数学批判性思维倾向为中介变量的简单中介模型拟合结果

	χ^2/df	RMSEA	GFI	NFI	RFI	IFI	TLI	CFI	AGFI
适配标准	<3 优秀	<0.05 优秀	>0.90	>0.90	>0.90	>0.90	>0.90	>0.90	>0.90
	<5 良好	<0.08 良好							
预设模型	6.345	0.103	0.931	0.926	0.894	0.937	0.909	0.937	0.876
修正模型	3.522	0.071	0.968	0.966	0.941	0.975	0.957	0.975	0.931

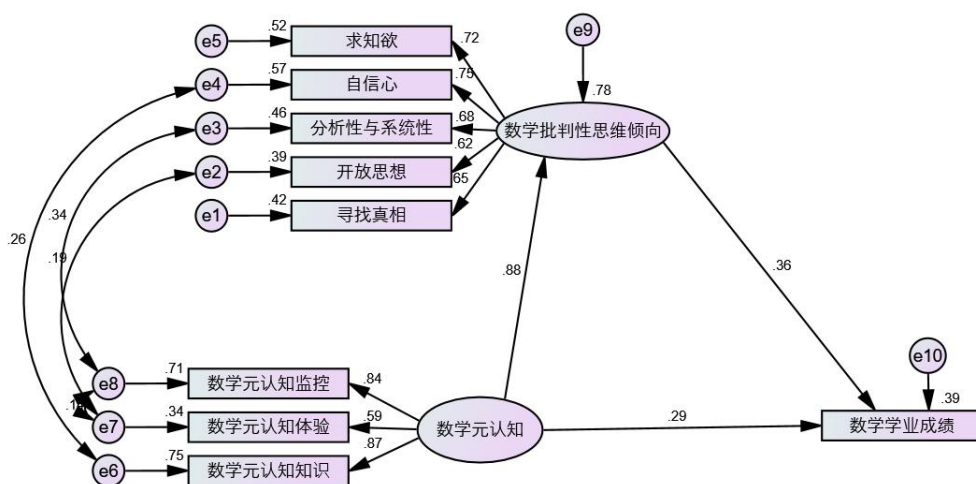


图 4-4 以数学批判性思维倾向为中介变量的简单中介模型 M2 修正图

表 4-27 以数学批判性思维倾向为中介变量模型的路径检验

路径	标准化路径系数	S.E.	C.R.	P
数学元认知→数学批判性思维倾向	0.881	0.005	14.178	***
数学批判性思维倾向→数学学业成绩	0.359	0.154	3.061	**
数学元认知→数学学业成绩	0.287	0.013	2.501	*

接着，通过非参数 Bootstrap 法进行中介效应检验，反复抽取 1000 次样本，所得结果如表 4-28 所示。间接效应值为 0.316，置信区间为[0.013,0.060]，不包含 0，表明数学元认知→数学批判性思维倾向→数学学业成绩的中介效应显著，验证了假设 H3。直接效应值为 0.287，置信区间为[0.006,0.059]，不包含 0，表明数学元认知→数学学业成绩的直接效应显著。总效应值是间接效应值与直接效应值之和，为 0.603，置信区间为[0.061,0.079]，不包含 0，表明总效应亦显著。

由上可知，将数学批判性思维倾向作为中介变量后，数学元认知对数学学业成绩的直接效应仍达到 0.05 的显著性水平，表明数学批判性思维倾向在数学元认知和数学学业成绩当中起到部分中介作用，简化的中介模型图如图 4-5 所示。其中，间接效应的相对效应占比为间接效应值与总效应值的比值，即 $0.316 \div 0.603 = 0.5240 = 52.40\%$ 。直接效应的相对效应占比为直接效应值与总效应值的比值，即 $0.287 \div 0.603 = 0.4760 = 47.60\%$ 。

表 4-28 以数学批判性思维倾向为中介变量模型的中介效应检验

路径	效应值	Bias-corrected 95%CI			相对效应占比
		Lower	Upper	P	
间接效应	0.316	0.013	0.060	0.002	52.40%
直接效应	0.287	0.006	0.059	0.011	47.60%
总效应	0.603	0.061	0.079	0.001	100%

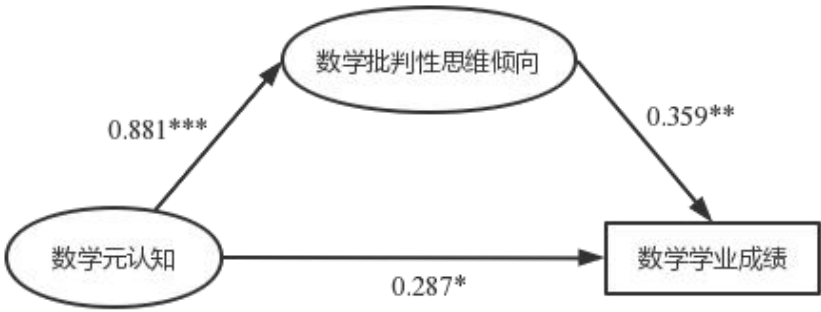


图 4-5 以数学批判性思维倾向为中介变量的简化模型图

注：实线表示路径显著，虚线表示路径不显著

4.4.3 数学批判性思维倾向各维度在数学元认知和数学学业成绩之间的中介效应检验

最后，进一步检验数学批判性思维倾向各维度在数学元认知和数学学业成绩之间的中介效应是否显著，建立以数学元认知作为自变量，数学学业成绩作为因变量，数学批判性思维倾向各维度为中介变量的并行多重中介模型 M3（见图 4-6），其中，各路径以 a1、a2……a5，b1、b2……b5 命名。

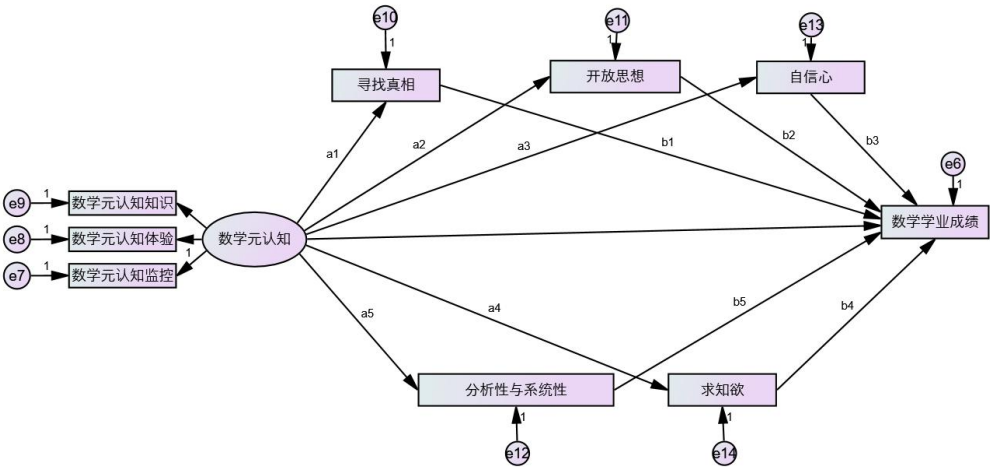


图 4-6 以数学批判性思维倾向各维度为中介变量的并行多重中介模型 M3 预设图

以数学批判性思维倾向各维度为数学元认知与数学学业成绩中介变量的并行多

重中介模型拟合结果如表 4-29 所示，部分拟合指标尚未达到适配标准，其中， $\chi^2/df=9.304>5$ ，RMSEA=0.129>0.08，RFI=0.844、TLI=0.859 和 AGFI=0.806 均小于 0.90，且从路径系数显著性结果可知，数学元认知对数学学业成绩的路径系数并不显著（ $p=0.196>0.05$ ），因此考虑将其删除^①。鉴于此，需对预设的并行多重中介模型 M3 进行修正（见图 4-7），修正模型的拟合指标如表 4-29 所示， $\chi^2/df=4.165<5$ ，RMSEA=0.078<0.08，RFI=0.930、TLI=0.946 和 AGFI=0.918 均大于 0.90，其余拟合指标亦均达到适配标准，并且各路径系数均显著（见表 4-30）。因此，综合表明修正后的模型拟合良好。

表 4-29 以数学批判性思维倾向各维度为中介变量的并行多重中介模型拟合结果

	χ^2/df	RMSEA	GFI	NFI	RFI	IFI	TLI	CFI	AGFI
适配标准	<3 优秀 <5 良好	<0.05 优秀 <0.08 良好	<0.05	>0.90	>0.90	>0.90	>0.90	>0.90	>0.90
预设模型	9.304	0.129	0.911	0.901	0.844	0.910	0.859	0.910	0.806
修正模型	4.165	0.078	0.973	0.971	0.930	0.978	0.946	0.978	0.918

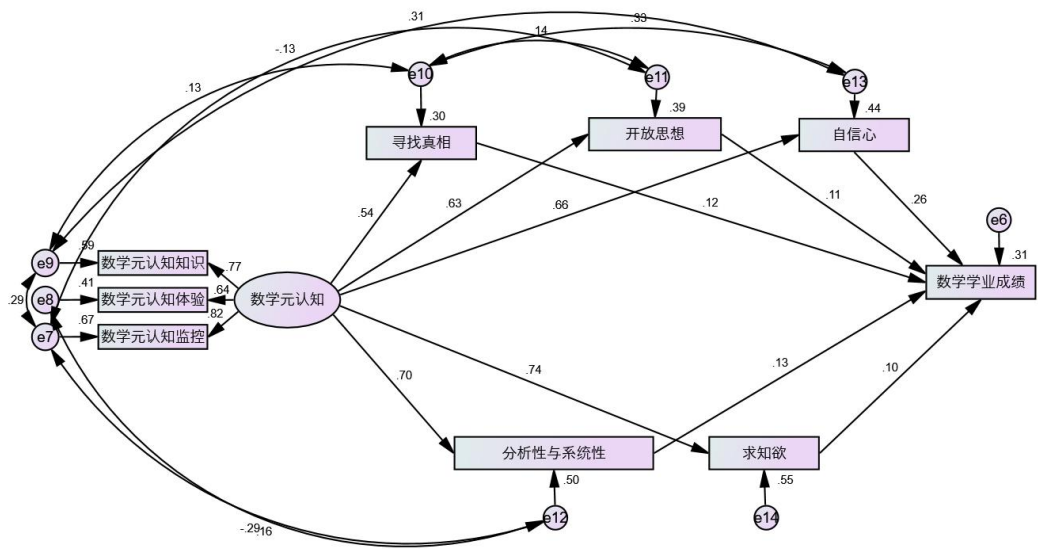


图 4-7 以数学批判性思维倾向各维度为中介变量的并行多重中介模型 M3 修正图

表 4-30 以数学批判性思维倾向各维度为中介变量模型的路径检验

路径	标准化路径系数	S.E.	C.R	P
数学元认知→寻找真相	0.544	0.004	11.47	***
数学元认知→开放思想	0.626	0.003	13.083	***

^① 吴明隆.结构方程模型——AMOS 的操作与应用[M].重庆:重庆大学出版社,2010(10):158.

数学元认知→分析性与系统	0.704	0.003	17.088	***
数学元认知→自信心	0.661	0.004	14.446	***
数学元认知→求知欲	0.740	0.003	16.328	***
寻找真相→数学学业成绩	0.121	0.040	2.575	**
开放思想→数学学业成绩	0.107	0.051	2.349	*
分析性与系统性→数学学业成绩	0.132	0.045	2.837	**
自信心→数学学业成绩	0.265	0.044	5.218	***
求知欲→数学学业成绩	0.096	0.044	1.995	*

接着，通过非参数 Bootstrap 法进行中介效应检验，反复抽取 1000 次样本，所得结果如表 4-31 所示。

ind1 的间接效应值为 $a_1 \times b_1 = 0.544 \times 0.121 = 0.066$ ，置信区间为[0.002,0.009]，不包含 0，表明数学元认知→寻找真相→数学学业成绩的中介效应显著。

ind2 的间接效应值为 $a_2 \times b_2 = 0.626 \times 0.107 = 0.067$ ，置信区间为[0.002,0.009]，不包含 0，表明数学元认知→开放思想→数学学业成绩的中介效应显著。

ind3 的间接效应值为 $a_3 \times b_3 = 0.661 \times 0.265 = 0.175$ ，置信区间为[0.007,0.018]，不包含 0，表明数学元认知→自信心→数学学业成绩的中介效应显著。

ind4 的间接效应值为 $a_4 \times b_4 = 0.740 \times 0.096 = 0.071$ ，置信区间为[0.001,0.010]，不包含 0，表明数学元认知→求知欲→数学学业成绩的中介效应显著。

ind5 的间接效应值为 $a_5 \times b_5 = 0.704 \times 0.132 = 0.093$ ，置信区间为[0.003,0.012]，不包含 0，表明数学元认知→分析性与系统性→数学学业成绩的中介效应显著。

总间接效应为各路径间接效应值之和，即 0.472，置信区间为[0.029,0.038]，不包含 0，表明总间接效应亦显著。

由上可知，将数学批判性思维倾向各维度作为中介变量后，数学元认知对数学学业成绩的直接影响并不显著，因此只存在中介效应，表明数学批判性思维倾向各维度在数学元认知和数学学业成绩中起到中介作用，验证了假设 H4，简化的中介模型图如图 4-8 所示。其中，各间接效应的相对效应占比为各间接效应值与总间接效应值的比值，即 ind1 的相对效应占比为 $0.066 \div 0.472 = 0.1395 = 13.95\%$ ；ind2 的相对效应占比为 $0.067 \div 0.472 = 0.1419 = 14.19\%$ ；ind3 的相对效应占比为 $0.175 \div 0.472 = 0.3712 = 37.12\%$ ；ind4 的相对效应占比为 $0.071 \div 0.472 = 0.1505 = 15.05\%$ ；ind5 的相对效应占比为 $0.093 \div 0.472 = 0.1969 = 19.69\%$ 。因此，自信心所起到的中介作用最为关键，其次为分析性与系统性、求知欲、开放思想、寻找真相。

表 4-31 以数学批判性思维倾向各维度为中介变量模型的中介效应检验

路径	效应值	Bias-coorrected 95%CI			相对效应占比
		Lower	Upper	P	

各间接效应					
ind1	0.066	0.002	0.009	0.016	13.95%
ind2	0.067	0.002	0.009	0.020	14.19%
ind3	0.175	0.007	0.018	0.001	37.12%
ind4	0.071	0.001	0.010	0.047	15.05%
ind5	0.093	0.003	0.012	0.007	19.69%
总间接效应					
总间接效应	0.472	0.029	0.038	0.001	100%

注：ind1=数学元认知→寻找真相→数学学业成绩；ind2=数学元认知→开放思想→数学学业成绩；ind3=数学元认知→自信心→数学学业成绩；ind4=数学元认知→求知欲→数学学业成绩；ind5=数学元认知→分析性与系统性→数学学业成绩

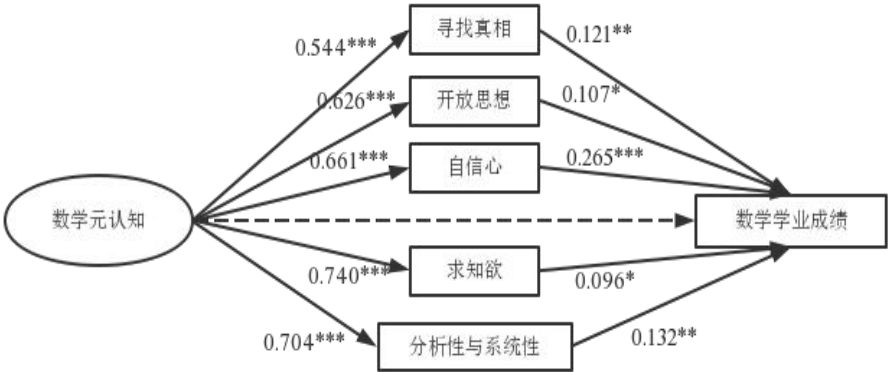


图 4-8 以数学批判性思维倾向各维度为中介变量的简化模型图

注：实线表示路径显著，虚线表示路径不显著

综上所述，相关性分析和中介效应分析的研究结果验证了相关研究假设（见表 4-32）。

表 4-32 研究假设检验结果

研究假设	检验结果
H1：数学批判性思维倾向、数学元认知和数学学业成绩三个变量，两两之间相关性显著	成立
H2：数学批判性思维倾向、数学元认知对数学学业成绩均具有正向预测作用	成立
H2a：数学元认知对数学学业成绩具有正向预测作用	成立
H2b：数学批判性思维倾向对数学学业成绩具有正向预测作用	成立
H3：数学批判性思维倾向在数学元认知和数学学业成绩之间起中介作用	成立
H4：数学批判性思维倾向各维度在数学元认知和数学学业成绩之间起中介作用	成立

第5章 分析与讨论

5.1 高中生数学批判性思维倾向现状的分析

5.1.1 高中生数学批判性思维倾向总体水平的分析

研究结果显示,高中生的数学批判性思维倾向的均值为3.340分,整体处于中等偏上水平,处于高水平的高中生较少,这与马军英和赵强等(2015)^①、宋长青(2018)^②所得研究结论一致,说明高中生的数学批判性思维倾向水平还有待提高。其中,开放思想维度的平均值最高,而自信心维度的平均分最低,说明高中生对他人的数学观点和解题方法持有包容和开放的态度,愿意倾听和接纳不同的意见,但在数学学习中缺乏自信心,面对各类数学问题时难以冷静面对或自信解决。这就启示数学教师应该引导学生勇敢正视难题与错题,不要畏惧失败,应当通过查缺补漏来完善自身数学知识结构,脚踏实地地获得进步,从而增强学习数学的自信心。

5.1.2 高中生数学批判性思维倾向的差异性分析

(1) 高中生数学批判性思维倾向的性别差异分析

研究结果显示,高中生数学批判性思维倾向在性别上存在显著差异,男生的数学批判性思维倾向水平明显强于女生,这与马军英和赵强等(2015)^③、史璟(2017)^④的研究结果一致,但与戚业国和孙秀丽(2020)^⑤的研究结果不同。究其原因,或许是因为量表是结合数学学科特点而编制的,从而导致测量结果有所出入。其次是在思维方式上,女生思维较为成熟、感性、细心,男生思维则更为理想、活跃、缜密,思考问题更具逻辑性。因此,男生在分析性与系统性能力上的表现优于女生,对于数学问题的真相也更为执着,提出质疑时更果断自信。但是,男女生的思想开放性不存在明显差异,说明男女生对于他人的数学观点和解题思路等,都能保持着包容与尊重的学习态度。这一结果也启示我们在数学教学中应该多鼓励女生发表自己的观点,适时表扬增强其自信心,多留意女生的思考过程,发展思维的逻辑性与系统性,提高其分析性与系统性能力,从而提升女生的数学批判性思维倾向水平。

(2) 高中生数学批判性思维倾向的年级差异分析

研究结果显示,高中生数学批判性思维倾向在年级上存在显著差异,高一年级学

^① 马军英,赵强,张燕,朱爱玲.高校师范生批判性思维倾向的调查研究[J].数学教育学报,2015,24(06):21-25.

^② 宋长青.高中生批判性思维倾向实证研究[D].山东师范大学,2018.

^③ 马军英,赵强,张燕,朱爱玲.高校师范生批判性思维倾向的调查研究[J].数学教育学报,2015,24(06):21-25.

^④ 史璟.批判性思维的测量与培养[J].江淮论坛,2017(05):129-134.

^⑤ 戚业国,孙秀丽.我国普通高中学生批判性思维状况与教育应对[J].教师教育研究,2020,32(02):63-70.

生的数学批判性思维倾向的发展水平优于高二年级学生，这与史璟（2017）^①、戚业国和孙秀丽（2020）^②的研究结论一致。并且，高一年级学生在寻找真相和自信心上显著强于高二年级学生，在开放思想、分析性与系统性、求知欲上无显著差异，但从各维度的均值可知，高一年级学生相对较高。这是因为学生在步入高中后，渴望学习更深入的数学知识，为打好基础，需摸清知识的来龙去脉，并且此时高一的数学知识相对简单易懂，学生敢于提出问题，面对各类数学问题大多能保持积极的正向态度。但随着年级的增长，数学知识难度增加，再加上备战高考的压力，学生逐渐丧失关心信息真伪的精力，缺乏独立思考的主动性，长此以往，数学批判性思维倾向水平逐渐下降。这就提示高年级教师应当改进教学模式，适当创新课堂教学文化，重视培养学生的质疑精神和判断能力，提高高年级学生的数学批判性思维能力。

（3）高中生数学批判性思维倾向的数学学业成绩差异分析

研究结果显示，高中生数学批判性思维倾向在数学学业成绩上存在显著差异，数学学业成绩越好的学生，其数学批判性思维倾向水平越高，这与一般认知相符。成绩越好的学生，其主动进行批判性思考的意识就越强，且数学思维的系统性和逻辑性也较强，能较快地发现问题所在，从而多角度地就某一数学问题进行审慎分析与质疑，久而久之，数学批判性思维倾向也越来越强烈。而成绩较为落后的学生，往往由于自身数学知识储备比较薄弱，缺少自主评价的能力，只能盲目从众或是被动接受教师输送的观点，数学思维也将逐渐固化。但这一研究结论与宋长青（2018）^③、戚业国和孙秀丽（2020）^④的研究结论（优等生强于后进生，但二者又强于中等生）有所出入，究其原因，很有可能是因为量表内容、地域和学生条件的不同，所以导致结果的不同。

（4）高中生数学批判性思维倾向的学生干部差异分析

研究结果显示，高中生数学批判性思维倾向在学生干部上存在显著差异，担任学生干部的学生的数学批判性思维倾向水平明显更高，这与史璟（2017）^⑤、宋长青（2018）^⑥的研究结果一致。虽然在开放思想、分析型与系统性、自信心上的差异不显著，但担任学生干部的学生在各维度上的均值均高于不是学生干部的学生。这是因为学生通过参加社团活动、参与班级管理等实践活动能有效锻炼其问题意识和反思意识，从实践活动中发现问题，条理性地分析问题，接着学习运用批判性思维技能理性地解决问题，反复经历后逐渐将批判性思维生活化、习惯化，认知思维能力也愈发成熟。于是，

^① 史璟.批判性思维的测量与培养[J].江淮论坛,2017(05):129-134.

^② 戚业国,孙秀丽.我国普通高中学生批判性思维状况与教育应对[J].教师教育研究,2020,32(02):63-70.

^③ 宋长青.高中生批判性思维倾向实证研究[D].山东师范大学,2018.

^④ 戚业国,孙秀丽.我国普通高中学生批判性思维状况与教育应对[J].教师教育研究,2020,32(02):63-70.

^⑤ 史璟.批判性思维的测量与培养[J].江淮论坛,2017(05):129-134.

^⑥ 宋长青.高中生批判性思维倾向实证研究[D].山东师范大学,2018.

学生也会自然地将这种批判性地思维方式迁移至数学学习活动中，从而养成灵活且严谨的数学思维习惯，如此有助于数学批判性思维倾向的形成和数学批判性思维能力的提高。

（5）高中生数学批判性思维倾向的班主任差异分析

研究结果显示，高中生数学批判性思维倾向在班主任是否为数学教师上存在显著差异，班主任为数学教师的学生，其数学批判性思维倾向水平明显更高。由于班主任是班级教育教学工作的主要领导者，与其他教师相比，其与学生的互动更加积极、深入，与学生的情感更为深厚，对学生的影响也更为直接、广泛。因此，数学教师为班主任更有益于培养学生数学批判性思维，可将数学学科核心素养的熏陶渗入日常生活和学习之中，自然而然，学生的数学批判性思维倾向水平也更高。

（6）高中生数学批判性思维倾向的数学喜爱程度差异分析

研究结果显示，高中生数学批判性思维倾向在数学喜爱程度上存在显著差异，对数学喜爱程度越高的学生，其数学批判性思维倾向水平明显越高，且喜欢数学的学生占多数。众所周知，兴趣是学生学习最好的教师，学生若对数学发生了兴趣，便会自发地产生积极学习数学的行为动力。因此，与不喜欢数学的学生相比，喜欢数学的学生本身拥有更为强劲的数学学习动力和数学求知欲，能够驱动学生主动走入数学世界，常因渴望弄懂各类数学问题而深入思考问题，进而锻炼了数学思维的分析性和系统性，也在不断地拓宽和完善自身的知识结构，逐渐形成反省、全面、客观的数学批判性思维。

5.2 高中生数学元认知现状的分析

5.2.1 高中生数学元认知总体水平的分析

研究结果显示，高中生数学元认知的均值为 3.334 分，整体处于中等偏上水平，处于高水平的高中生较少，说明高中生的数学元认知水平还有待提高。其中，高中生数学元认知体验的均值最高，其次为数学元认知监控和数学元认知知识。可见高中生的数学元认知体验较佳，在克服数学困难、判断题目难易程度、调控学习情绪、体验解题感受等认知体验和情感体验方面的表现都较为积极乐观，但高中生相对缺乏数学元认知知识，说明其对自身数学知识储备、知识掌握程度以及数学学习策略的选择等方面的认知较为欠缺。这就启示数学教师应当更关注学生的数学元认知知识的掌握情况，多补充有关元认知知识方面的知识和技能，并将数学教学内容和元认知知识结合起来，从而填补学生在数学元认知知识上的空缺。

5.2.2 高中生数学元认知的差异性分析

（1）高中生数学元认知的性别差异分析

研究结果显示,高中生数学元认知在性别上存在显著差异,男生的数学元认知水平明显高于女生,这与程向阳(2008)^①所得研究结果一致。出现该差异的原因可能与男女生的思维方式和性格特征等方面有关,国外学者通过调查发现男生的数学学习能力优于女生^②,虽然女生性格较为温和,处理事情更加细心,在语言表达和记忆能力上更具优势,但数学是一门强调思维逻辑性的学科,女生对数量关系与空间关系的把握力不如男生,且男生思维较为活跃、理性,在数学学习动机和情绪体验上的表现也更为积极,因此男生对数学知识的掌握更加扎实,数学元认知水平也相对更高。这也提醒广大数学教师多关心女生在数学学习上的不足之处,注意男女生教育的差异性,可以在数学元认知知识、体验和监控三个方面,有针对性地提高女生的数学元认知能力。

（2）高中生数学元认知的年级差异分析

研究结果显示,高中生数学元认知在年级上存在显著差异,高二年级学生的数学元认知水平明显高于高一年级学生。在数学元认知知识方面,高二年级学生在关于个体、任务的知识上的均分显著更高,在关于策略的知识上相差无几,说明高二年级学生对于自身和他人的数学知识储备、学习能力及其对数学问题的认知更加清晰,高一和高二年级学生在数学学习策略和解题策略的选用能力上无显著差别。在数学元认知体验方面,高二年级学生的均分明显更高,这是因为高二年级学生在经过一年多的高中学习生活后,已经适应了高中数学的难度与广度,对各类数学问题的难易程度、熟悉程度等的认知更加成熟,并且能够较好的调整数学学习过程中的各种情绪。在数学元认知监控方面,高二年级学生在定向与计划、反馈与检验、组织与管理上的均分显著高于高一年级学生,在监控与调节、反思与评价上与高一年级学生的差异不显著,说明高二年级学生所制订的数学学习计划和目标更加清晰、更具针对性,且拥有复习巩固、查缺补漏的良好数学学习习惯,将数学知识系统化的能力也更强。

（3）高中生数学元认知的数学学业成绩差异分析

研究结果显示,高中生数学元认知在数学学业成绩上存在显著差异,且数学学业成绩越佳的学生,其数学元认知水平越高,这与王光明等(2017)^③、谢云天等(2021)

^① 程向阳.数学元认知差异的相关研究及启示[J].中国特殊教育,2008(10):93-96+92.

^② 史耀芳.国外有关男女学生学习差异研究述略[J].外国中小学教育,1994(01):43-44+40.

^③ 王光明,余文娟,廖晶,王兆云.高效率数学学习高中生的元认知特征及其教学意义[J].教育科学研究,2017(04):46-53+61.

^①所的研究结论一致。这是由于高中阶段的数学学习对数学元认知的要求较高，数学元认知调控着学生数学思维以及认知过程。数学学业成绩较佳的学生的数学知识结构更为系统完善，能够将所学的新知识与已有知识建立起联系，并善于监控自身学习行为，适时调节学习策略及状态，且他们在数学学习过程中常常有着较为积极的情绪体验，如解题成功的成就感和喜悦感、挑战难题的求知欲等，因此，高中生数学学业成绩越佳，其数学元认知水平也更高。同时，这也启示数学教师可以从数学元认知知识、数学元认知体验与数学元认知监控三个方面及各自包含的子维度中入手，有针对性地帮助普通生和学困生提高数学元认知水平。

（4）高中生数学元认知的学生干部差异分析

研究结果显示，高中生数学元认知在学生干部上不存在显著差异，仅在情感体验、定向与计划维度上有明显差异，并且担任学生干部的高中生的数学元认知及其余维度的均值与不是学生干部的学生基本一致。说明高中生是否担任学生干部对自身数学元认知水平的影响都不大，但在情感体验、定向与计划维度上有明显差异的原因，可能是担任学生干部的高中生在管理班级或履行职责时会有意识地控制自己的情绪，即使当时为负面情绪，但其责任心和义务感会驱使他们调整好心情以积极的正面情绪面对大家，完成学生工作后也会获得相应的成就感和喜悦感。并且，他们会对学生工作有所规划，能够根据实际情况调整计划以完成任务，这一过程无疑锻炼了学生的定向与计划能力。

（5）高中生数学元认知的班主任差异分析

研究结果显示，高中生数学元认知在班主任上存在显著差异，在各一级维度中，仅数学元认知体验维度无显著性差异，但从均值上看，班主任是数学教师的学生的数学元认知水平明显更高。这是由于班主任与学生的相处时间最长，对班级投入的情感最深，学生拥有更多与班主任沟通交流的机会。因此，数学教师作为班主任能够营造良好、积极的数学学习风气，更能及时了解学生数学元认知的现状，并能针对不足之处给予学生有效地指导与肯定，学生也因为数学教师为班主任而更加认真地学习数学，数学学习动力也更为强烈。但无论班主任是否为数学教师，学生在数学学习上受挫时，班主任都会给予暖心的安慰，并鼓励和帮助学生克服数学学习的恐惧感与受挫感，使其重拾积极的情感体验。

（6）高中生数学元认知的数学喜爱程度差异分析

研究结果显示，高中生数学元认知的整体及各维度均在数学喜爱程度上存在显著

^① 谢云天,史滋福,钟婷,张卫.不同数学学业成绩初中生在元认知上的比较:基于 NVivo 的质性分析[J].教育研究与实验,2021(02):86-91.

差异,对数学喜爱程度越高的学生,其数学元认知水平显著越高。究其原因,或许是因为对数学喜爱程度较高的高中生的数学学习态度更为积极、认真,学习兴趣也更加强烈,即便遇到数学学习困难,也能及时调控自己的情绪体验,从容地调动数学思维,并从克服困难的过程中查缺补漏、反思检验,不断完善自身数学知识结构,从而提高自身数学元认知水平。

5.3 高中生数学批判性思维倾向、数学元认知与数学学业成绩关系的分析

5.3.1 数学批判性思维倾向与数学元认知关系的分析

从相关分析结果可知,数学批判性思维倾向与数学元认知显著正相关,这一结论支持以往有关批判性思维和元认知关系的观点(Sadeghi 等, 2014^①; Arslan 等, 2015^②; 罗英, 2019^③等),也有力支持了数学教育领域中有关两者关系的见解(缪雪松, 2010^④; 李文婧, 傅海伦, 2012^⑤等)。说明数学元认知水平高的学生,其数学批判性思维倾向水平较强。学生的数学元认知能力是数学批判性思维顺利开展的重要条件^⑥,元认知调控着学生的认知过程,使其在批判性思考的过程中更具理性、公正性与开放性,排除数学任务以外的干扰,不断根据现实需求调节自身的数学思维方式,从而选择出最优的数学解题方法或数学学习策略,进而获得数学学习成功体验,增强学生自信心,同时养成自觉分析、时刻质疑和反思自己思想、观点的良好习惯,因此学生数学批判性思维倾向水平也在不断提高。

5.3.2 数学批判性思维倾向与数学学业成绩关系的分析

从相关分析结果可知,数学批判性思维倾向与数学学业成绩有着显著的正相关关系,数学批判性思维倾向会正向预测数学学业成绩。这与宋长青(2018)^⑦、戚业国和孙秀丽(2020)^⑧、朱展霖(2021)^⑨等学者所得的研究结论相吻合。数学批判性思维倾向水平较强的高中生往往具有更强的主观分辨和评价质疑的能力,能够主动消化数学教师所教授的数学观点或方法,对于数学知识的学习有着较强的自信心、求知欲、分析性和系统性能力。自信心能让学生拥有面对一切数学困难的勇气,以及相信自己

^① Sadeghi B, Hassani M T, Rahmatkhah M. The Relationship between EFL Learners' Metacognitive Strategies, and Their Critical Thinking[J]. *Journal of Language Teaching & Research*, 2014, 5(5): 1167-1175.

^② Arslan S. Investigating Predictive Role of Critical Thinking on Metacognition with Structural Equation Modeling[J]. *Malaysian Online Journal of Educational Sciences*, 2015, 3(2):1-10.

^③ 罗英.批判性思维与元认知的关系探析[J].教育理论与实践,2019,39(23):3-5.

^④ 缪雪松.开发元认知,优化数学思维品质[J].中学数学杂志,2010(07):1-3.

^⑤ 李文婧,傅海伦.数学批判性思维的影响因素及其培养[J].中国成人教育,2012(18):124-125.

^⑥ 李文婧,傅海伦.数学批判性思维的影响因素及其培养[J].中国成人教育,2012(18):124-125.

^⑦ 宋长青.高中生批判性思维倾向实证研究[D].山东师范大学,2018.

^⑧ 戚业国,孙秀丽.我国普通高中学生批判性思维状况与教育应对[J].教师教育研究,2020,32(02):63-70.

^⑨ 朱展霖.高中生数学批判性思维倾向、数学学习策略与数学学业成绩的关系研究[D].华中师范大学,2021.

能学好数学的行为倾向。求知欲使学生主动获取更多的数学知识,不断完善自身知识结构。分析性和系统性能力使学生厘清数学概念、定理间的逻辑关系,对题意的理解也更为清晰,不漏抓成功解题的任何关键条件。长此以往,学生的数学学业成绩也会得到相应的提高。而数学批判性思维倾向水平较低的高中生就如一块“海绵”,对于任何信息只会接纳,不会取舍,缺乏分析推理的能力,常依赖他人的数学思维来解决问题,在数学学习上很难有较大的进步,致使数学学业成绩停滞不前甚至有所下降。

5.3.3 数学元认知与数学学业成绩关系的分析

从相关分析结果可知,数学元认知与数学学业成绩呈显著正相关关系,数学元认知会正向预测数学学业成绩。这与 M. Carr & D. L. Jessup (1995)^①、喻平 (2004)^②、王光明等 (2017)^③、谢云天等 (2021)^④等学者所得的研究结论一致。数学元认知是对数学认知过程的认知,对学生数学认知和思维过程起到计划和调控的作用,从数学元认知知识、体验和监控三个方面指导着学生走向数学学习成功。因此,学生数学元认知水平越高,其学习效率也会提高,更能把控自身的数学学习节奏,冷静面对一切数学困难,并从困难中反省自身不足,从而采取相应措施不断完善自身数学认知结构,今后在考场上便能自如面对各种类型的难题,数学学业成绩自然有所提高。反之,数学元认知水平较低的学生则拥有较低自控能力,难以调控自身数学学习行为和情绪等,常伴有拖延、焦虑等不良症状,最终负面影响数学学业成绩。

5.3.4 中介效应分析

(1) 本研究以“数学批判性思维倾向”作为数学元认知与数学学业成绩的中介变量进行中介效应检验,结果表明数学批判性思维倾向在数学元认知与数学学业成绩之间起中介作用,即数学元认知可以通过数学批判性思维倾向对数学学业成绩产生影响,这与何懿雯和王祖浩 (2006)^⑤的理论研究相吻合。一方面,数学元认知对数学批判性思维倾向具有正向预测作用,学生的数学元认知能力是数学批判性思维积极启动的重要条件^⑥,换言之,意识到问题是分析并解决问题的前提。高水平的数学元认知能力能够帮助学生扫清数学认知思维的障碍,提高学生启动数学批判性思维的理性和公正性,逐渐从主动关注自身思维发展到批判性地反省自身思维,最终形成数学批判性

^① Carr M, Jessup D L. Cognitive and metacognitive predictors of mathematics strategy use[J]. *Learning & Individual Differences*, 1995,7(3): 235-247.

^② 喻平.中学生自我监控能力和 CPFS 结构对数学学业成绩的影响[J].*数学教育学报*,2004(01):23-26+35.

^③ 王光明,余文娟,廖晶,王兆云.高效率数学学习高中生的元认知特征及其教学意义[J].*教育科学研究*,2017(04):46-53+61.

^④ 谢云天,史滋福,钟婷,张卫.不同数学学业成绩初中生在元认知上的比较:基于 NVivo 的质性分析[J].*教育研究与实验*,2021(02):86-91.

^⑤ 何懿雯,王祖浩.国外教学中的元认知研究新进展[J].*上海教育科研*,2006(05):56-59+31.

^⑥ 李文婧,傅海伦.数学批判性思维的影响因素及其培养[J].*中国成人教育*,2012(18):124-125.

思维模式^①。另一方面，数学批判性思维倾向正向影响着数学学业成绩，数学批判性思维倾向水平高的学生在数学学习过程中更具分析和判断的能力，数学思维也更加灵活开放，乐于接受更多数学新知识，对数学知识的理解也更为深刻，因此学生在数学学业中自然会有更好的成就和表现。

（2）本研究以“数学批判性思维倾向各维度”作为数学元认知与数学学业成绩的中介变量进行中介效应检验，结果表明数学批判性思维倾向各维度在数学元认知与数学学业成绩之间起中介作用，即数学元认知可以通过数学批判性思维倾向各维度对数学学业成绩产生影响，其中自信心所起到的中介作用最为关键，其次为分析性与系统性、求知欲、开放思想、寻找真相。这就启示数学教师在培养学生数学元认知的同时，还应当注意现行的教学方式，适当鼓励、夸奖学生，为学生建立起较强的自信心，使学生对自己的数学学习能力充满自信，有勇气面对并愿意尝试着去克服数学困难，帮助学生逐步获得数学学习上的成功。其次，数学教师也应当有意识改变教学策略以提高学生的分析性与系统性能力；多设计有趣的教学情境和教学问题引起学生的求知欲；常设置小组讨论，以锻炼学生尊重和耐心倾听他人观点和方法的习惯，培养学生的开放思想；并营造愉快的开放式课堂氛围，积极采用变式教学，由浅入深的将数学知识教授给学生，使学生在教师的追问下和充满学习激情的课堂中学习数学，从而锻炼其不断寻找数学真相的学习恒心与毅力，最终学生的数学学业成绩也会有所提高。

^① 罗英.批判性思维与元认知的关系探析[J].教育理论与实践,2019,39(23):3-5.

第6章 教学案例研究

前文已通过定量研究的方法了解了高中生数学批判性思维倾向与数学元认知的现状,证实了二者之间显著正相关,且二者均能正向影响数学学业成绩。但归根结底,高中生的数学批判性思维倾向与数学元认知的培养仍需落实到教学实践中。从已有相关文献来看,国内众多学者也在踊跃探寻数学批判性思维和数学元认知的数学教学培养策略,但其有效性未经过大量的实践论证。因此,本章主要通过分析二者融入数学课堂的教学案例,结合学生的课堂表现与师生的课后反馈,探讨在数学课堂中培养高中生数学批判性思维倾向与数学元认知的教学价值。

由于本研究相关的教学实践在实习期间进行,根据课时的安排,因此选择“余弦定理”作为本次教学实践的主题。再者,根据研究现状可知,虽然高中生的数学批判性思维倾向与数学元认知整体均处于中等偏上水平,但高中生在数学学习中自信心较为缺乏,分析性与系统性能力比较薄弱,数学元认知知识也相对欠缺。所以,在本次数学教学实践中会将增强自信心、锻炼分析性与系统能力性以及提高数学元认知知识水平作为培养重点,以发展学生的数学批判性思维倾向和数学元认知能力。

6.1 《余弦定理》教学案例

教材分析:“余弦定理”这一内容被安排在人教A版必修第二册的第六章第4节平面向量的应用中,与本章平面向量的内容紧密相关,意在突出向量工具的应用价值,学生在其推导过程中所经历的数学思维活动和研究思路,也为后续探究正弦定理提供了类比方向。“余弦定理”是勾股定理在一般三角形情形下的推广,它不仅是关于三角形边角关系的重要定理,还是解三角形的重要工具。若结合其他数学知识并加以变形,则可用于解决与生产生活相联系的实际问题。

学情分析:本节课之前,学生已经学习了三角函数、平面向量等相关基础知识,对于三角形的边角关系也有了更进一步的认识,拥有自主探究推导余弦定理的知识储备。但相较于先用向量法推导出余弦定理,学生应该更熟悉之前学习的几何法,因此,应该优先引导学生使用几何法解决问题,再启发学生提出向量法和解析法。

教学目标:通过创设情境,引导学生提出问题,探究三角形的边角关系,体会数形结合的数学思想方法,发展学生的数学建模、数学抽象核心素养;启发学生运用几何法、向量法、解析法推导出余弦定理,体会转化与化归的数学思想方法,发展学生的逻辑推理、数学运算核心素养。

教学重点:掌握余弦定理的探究和推导过程,能够运用余弦定理解三角形。

教学难点:发现和推导余弦定理的过程。

教学过程:

一、创设情境，提出问题

师：请同学们回忆一下，在初中时，我们学过了哪些有关三角形边角关系的定理呀？

生：全等三角形的判定定理、勾股定理……

师：那么在高中时，我们又学过哪些有关三角形边角关系的知识呢？

生：三角函数。

师：非常好，看来大家记忆力还是很不错的！那么，这节课我们一起来继续深入研究三角形的边角关系。

例 1 由于铁路建设要求，需在某地修建过山隧道（如图 6-1），隧道口在点 A 与点 B 处，现在手里只有软尺和量角器，请你设计一个方案，求出 A ， B 两点的距离。

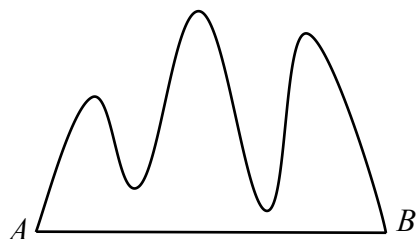


图 6-1 修建过山隧道例题图

师：今天大家的身份都是工程师，一起来设计方案解决例题 1 中的问题吧！题目要求隧道 AB 的距离，只有软尺和量角器可供我们使用，那么，我们应该如何解决这个问题呢？同学们有想法吗？

生 1：在山顶处取一点 C ，然后使用软尺测量 AC 和 BC 的距离，使用量角器测量点 A 和点 B 处的仰角，因为三角形内角和为 180° ，所以可以求出 $\angle C$ 的度数，接着在 $\triangle ABC$ 上作高，构造出直角三角形 $\triangle ABD$ ，并用三角函数求出边 AD 和 BD ，就能运用勾股定理求出 AB 的长度了。（生 1 方案设想图如图 6-2）

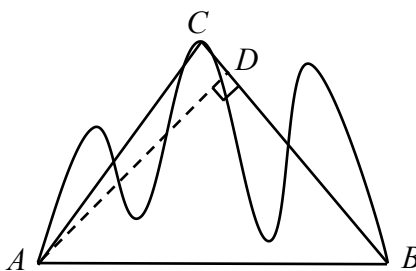


图 6-2 学生 1 的方案设想图

师：大家觉得生 1 的方案如何呢？你是怎么认为的呢？

生 2：我觉得他的方案在理论上可行，但在实际中不好操作，因为不一定能看到点 C 的位置。

师：你认为点 C 不可视，那其他同学认为这个方案还有哪些问题吗？

生 3：山是陡峭的，所以 AB 的连线不一定是水平的。

师：也就是说，这三点构成的图形不一定是三角形，所测量的两个仰角不一定是同一个 $\triangle ABC$ 里的角，求到的 $\angle C$ 也不是这个 $\triangle ABC$ 里的角了。那么，同学们还有什么其他的办法吗？

生 4：俯视图下的 AB 就是同一水平线上的了，再在山外与 AB 不重合的地方取一点 C ， $\triangle ABC$ 就是一个平面了，再测量 $\angle C$ 的度数，则这个三角形就确定了，之后再画出 AB 的中位线 MN 并测量，就可以求出 AB 了。（生 4 方案设想图如图 6-3）

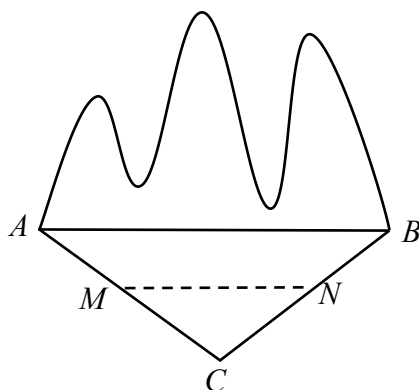


图 6-3 学生 4 的方案设想图

师：生 4 的想法解决了三点不在同一平面的问题，那么问题来了，这时的 $\triangle ABC$ 为什么就能确定了呢？

生：因为两边和一夹角。

师：大家的回答非常正确！有了两边和一夹角，这条边 AB 就能确定下来了。但是我们可以用哪些方法求出来呢？这就需要同学们动脑思考。刚刚生 4 说的运用中位线求出 AB 的想法也非常好，但是在实际中这两个中点是否可视？这是很难说的。所以我们在解决实际问题时，还需结合现实条件进行思考。

师：所以我们从实际问题中抽象出了数学问题，也就是，如果已知两边及一夹角，就能求出第三边 AB 的长。题目为：如图 6-4，在 $\triangle ABC$ 中已知 AC 、 BC 和 $\angle C$ ，求 AB 。

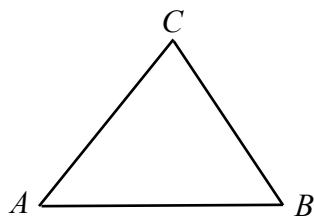


图 6-4 根据隧道问题抽象而来的三角形 ABC

【设计意图】从实际问题出发，不仅能让学生感受到“数学有用”，还能提高学生分析问题和解决问题的能力。通过追问推动学生主动思考和学会思考，鼓励学生积极

讨论、大胆批判、时刻质疑，引导学生不断反思每个方案和想法的不足之处和可行性，并且能够有理有据的将想法表达出来。这一过程无疑激发了学生的求知欲，锻炼了学生寻找真相的精神，发展了学生的开放思想倾向和分析性与系统性能力。同时，这一过程也启动了学生的数学元认知监控能力，促使学生不断从教师的话语中检验和评价自己思路的正确性，从而对解决思路及时作出调整。

二、启发引导，探寻解法

师：接下来，请同学们思考一下，看到这样的数学问题，第一步需要做些什么呢？然后呢？

生 5：先画图，然后可以按照生 1 的解题思路求出 AB 。

师：没错！应该先画图，灵活运用数形结合的数学思想，能让我们更加直观的解决数学问题。那么应该过哪一点作高呢？

生 5：因为已知 $\angle C$ ，所以过点 A 或 B 作高，若在点 A 作高于点 D ，此时 $AD = AC \cdot \sin C$ ， $CD = AC \cdot \cos C$ ，在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中，由勾股定理就可以求出 AB 。（生 5 的解题思路图如图 6-5 所示）

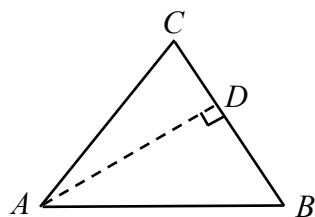


图 6-5 学生 5 的解题思路图

师：生 5 说的解题思路非常清晰，大家给予掌声！用已知的边和角的关系来表示未知线段，那么大家对这个思路赞同吗？还有其他方法吗？如果有，请问你为什么这么想？

生：（鼓掌）赞同！

生 6：因为我们前几节课学习了平面向量的知识，我所以认为还可以使用平面向量的基本定理来证明。用向量表示成 $\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ ，且知道两边的夹角 $\angle C$ ，通过三角形的向量关系 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ ，两边平方后， $|\overrightarrow{AB}|^2 = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})^2$ ，这样就可以求出 $|\overrightarrow{AB}|$ 。

师：这一思路也非常好，请同学们掌声鼓励一下！生 6 使用向量的模来表示三角形的边长，并结合所学过的平面向量的基本定理，将已知量和未知量建立起关系。除了几何法和向量法，请问还有其他方法可以求出 AB 的长度吗？

生 7：还可以建立直角坐标系。由于已知 $\angle C$ ，所以可以将坐标原点定在点 C 处，此时点 A 的坐标已知，再运用三角函数表示出点 B 的坐标，运用两点间距离公式即可求出 AB 。（生 7 的解题思路图如图 6-6 所示）

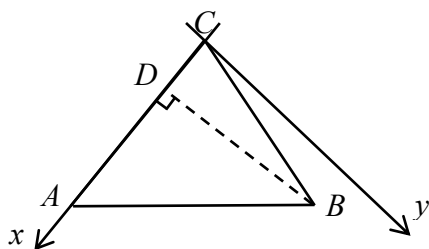


图 6-6 学生 7 的解题思路图

师：同学们觉得生 7 的解题思路怎么样呀？

生：（鼓掌）很聪明！没想到还能这么做！

师：看来同学们的思维都非常灵活开阔啊！那么同学们分成三组，并从各组中选出三名同学，在黑板上分别运用几何法、向量法和解析法这三种不同的解题思路，求出 AB 的表达式。

【设计意图】开头的回顾旧知在为引导学生用几何法推导余弦定理作铺垫，提示学生灵活运用已有数学知识去分析、解决问题，进而逐步联想到向量法和解析法，培养全面思考数学问题的学习习惯，并且询问学生的解题步骤，有助于学生形成系统化的解题思路，发展学生的分析性与系统性能力。学生回答问题后，教师不仅会主动表扬，还会调动学生给予掌声鼓励，这一举动的目的在于增强学生的数学学习自信心，使其感受到学习数学的成就感和喜悦感，加强学生的数学元认知体验。

三、活跃课堂，比较解法

师：我看到大部分同学都已经解出来了，大家看看黑板上的解题过程与结论，有何想法？哪一种方法更加好呢？

生 8：我感觉向量法比较简单直观，很快就能求结果。但是这位同学写错了，应该是 $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{CB}|^2 + 2|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos C$ 。

师：这位同学很仔细， $|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{CB}|$ 应该写成模，否则就是点乘了。那么这一结论正确了吗？

生 9：应该是 $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{CB}|^2 - 2|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos C$ ，因为 $\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{CB}$ 的夹角是 $\angle C$ 的补角，也就是 $\cos(\pi - C)$ ，所以是 $-\cos C$ 。

师：生 9 的回答很到位！在计算过程中要注意角的大小以及计算的条件。

【设计意图】这一过程是学生们检验猜想的重要环节，经历“从无到有”的数学思维过程，让学生拥有独立解决问题的成功体验，增强学生的自信心和数学元认知体验。接着，让学生指出最优解法并说明原因，提高了学生关于策略使用方面的知识，加强对学生数学元认知知识的指导，同时也反映出了学生进行数学批判性思维的思考过程。最后，通过呈现公式不同的错误形式，并给予充足的思考时间，让学生对自己的观点和结论的正确性进行批判性地评价和检验，教师的总结则是学生查缺补漏与知识结构

系统化的关键，利于提高学生的分析性与系统性能力。

四、概括定理，拓展公式

师：我们可以看到，其余两种方法所求出来的公式与向量法的结果一致，所以我们无论运用哪种方法，都不会影响最终结果。这就是已知两边和一夹角求对边的问题，对于这个公式，我们把它称为余弦定理。也就是说，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A$ ， $\angle B$ ， $\angle C$ 所对的边分别为 a ， b ， c ，则 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$ 。同样的，我们想求边 a 和边 b ，这时余弦定理还可以表示成什么样的形式呢？请同学们写在纸上并大声念出来。

生： $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ 和 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$ 。

师：你们真的太聪明了！所以三角形中任何一边的平方，等于其他两边平方的和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍。大家再好好观察一下，我们通过这三个公式的形式可以解决已知两边和一夹角求对边的问题，此外，还可以解决什么问题呢？

生：已知三边求任意一角。

师：非常正确！如果要求 $\angle A$ ，我们还能写成什么样的形式呢？

生： $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ 。

师：这就是余弦定理的推论。所以我们可以把这些公式看成方程，将其中一个变量看成未知量，则可以利用解方程的方法来求出这一未知量。因此，我们只要知道其中的三个量，就可以求出其他的量，且这个过程就叫做解三角形。

【设计意图】通过解决数学实际问题，就可以得到一个适用于解决两边一夹角这类问题的数学定理和数学公式，并用数学符号语言将其规范化，这有利于加强学生关于任务性质、目的、要求等方面的知识。而运用类比的数学方法和方程思想，引导学生自主写出余弦定理的其余形式和相关推论，这一过程则渗透了数学思想方法，增强了学生学习数学的系统化能力，同时也体现了学生对学习成果进行反馈与检验的思维历程。

五、巩固练习，应用知识

例2 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $b=4$ ， $c=2$ ， $A=60^\circ$ ，则 a 为多少？

师：请同学们马上思考例2，并说出题目难度、题目条件、解题过程和解题结果。

生：这道题很简单，已知 b ， c ， A ，要求 a ，所以只要将例2条件代入余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ 中，就可以求出 $a = \sqrt{10}$ 。

师：正确！看来这道题对于同学们来说非常简单了，接下来加大难度，请思考例3。

例3 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $b=4$ ， $c=3$ ， $C=\frac{\pi}{3}$ ，求 a 。

师生大致活动：教师要求学生仔细阅读问题，学生表示题目有些难度，思维需要

转弯。关键在于已知角为 $\angle C$ ，因此引导学生突破思维定势，选择将已知条件代入余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$ ，但此时学生出现两种答案，分别为“ $a = 3$ 或 $a = 1$ ”以及“ $a = 3$ ”，教师则提示学生要兼顾三角形的基本性质，即三角形两边之和大于第三边，两边之差小于第三边。因此最终答案为 $a = 3$ 。最后，教师要求学生进行反思总结，不要出现“忘记讨论”的情况，并强调检验解题结果的重要性。

【设计意图】教师引导学生有意识地表达出题目难度、题目条件、解题思路和解题结果，这些都是学生自行挖掘出来的元认知知识，因此最具迁移性。学生试误的过程也反映出了学生在经历数学元认知监控活动的监控与调节、反思与评价环节。

六、课堂小结，巩固知识

师：我们这节课学习了余弦定理及其推导过程，请同学们一起回顾我们用了哪些方法？

生：运用了几何法、向量法和解析法。

师：非常全面！并且同学们在得到多个答案时，我们需要结合三角形的基本性质对所得结果进行检验。其实，我们在推导的过程中，还蕴含了数形结合、方程以及化归与转化的数学思想方法，这些数学思想方法可以帮助我们更加直观的思考数学问题，透过问题现象看到数学本质，挖掘出更多数学知识，它们对于今后学习正弦定理和立体几何都起到十分关键的作用。

【设计意图】采用学生总结和教师升华的方式来进行课堂小结，从数学知识结构和数学思想方法两个角度将余弦定理这一内容系统化，有利于帮助学生养成全面系统的逻辑思维，培养学生分析性与系统化能力、以及组织与管理数学知识和数学问题的能力。

6.2 《余弦定理》教学反馈

本节课邀请三名教师（教师 A、教师 B 和教师 C）听课，课后收集教师与学生的教学反馈，从教学反馈中检验在数学课堂中培养高中生数学批判性思维倾向与数学元认知的可行性。其中，三名教师的基本信息为：教师 A：教研组组长兼数学课任教师，本科学历，职称为正高级，教龄在 20 年以上；教师 B：教导主任兼数学课任教师，研究生学历，职称为高级，教龄在 10-20 年之间；教师 C：班主任兼数学课任教师，本科学历，职称为中学一级，教龄在 10-20 年之间。

教师 A：在巩固练习时让学生说出自己对题目条件、对难易程度的判断和具体的解题思路，这一过程利于学生查缺补漏，清楚知晓自己的知识欠缺之处。课后小结部分强调数学思想方法的重要性，实现了从学习知识到学会思维的升华。可以看出，这节课强调学生对自身学习情况的认知，注重锻炼学生的数学思维。

教师 B：这节课主要利用问题驱动教学，从实际问题入手，问题之间环环相扣，

在教学过程中通过提问不断启动学生的数学思维，使其在课堂中不断产生新的疑惑，并有依据地提出质疑。同时一直追问学生的解决思路，对这一思路的看法，为什么会想到这一思路，以及引导学生对推导方法进行比较，尤其强调反思和检验的重要性，毕竟意识到问题是分析和解决问题的前提。并且，从课堂的表现来看，能感受到学生的数学思维较为活跃，能做到冷静分析和自我反思，这节课做到了以学生为主体，教师为主导。

教师 C：教师要求学生基于理论角度和现实角度思考解决方案，使学生看到数学实际问题的两面性，还注重数学知识的迁移性，引导学生分别运用三种方法解决实际问题，从所得结论中概括出余弦定理及其推论，并且，在教学过程中经常采用口头表扬与鼓掌的方式夸奖学生。因此，这节课在锻炼学生思维的全面性、系统性以及灵活性的同时，也增强了学生的学习自信心和学习热情。

学生反馈：有同学表示今天的数学课堂气氛非常活跃，大家都在积极讨论解决实际问题的思路和方法，同时也感受到老师留给學生讨论与思考的时间比较多，课堂提问变难，追问也更为频繁；有同学则表示自己受到了很多启发，整堂课推导思路清晰，对余弦定理的内容有了系统的认识，体会到了自主推理的魅力及成就感，并且课后也会回顾和整理所学内容；有同学也表示自己好像变勇敢了，即使举手回答问题的内容有些不全面，但老师的鼓励让他感到温暖与开心，以后仍会尝试着积极回答问题，跟随老师脚步沉浸在数学课堂之中；有同学发现老师很强调反思和评价自己和他人的想法和结论，还要求说出数学问题的条件和解题思路，这对自己进行查缺补漏有所帮助，今后也会继续保持这一学习习惯。

6.3 本章小结

本章主要通过展开“余弦定理”的教学实践，从学生的课堂表现和师生的课后反馈中，探讨出在数学课堂中培养高中生数学批判性思维倾向与数学元认知的教学价值。

首先，从学生的课堂表现和课后反馈来看，在教学过程中发现课堂氛围较为积极活跃，大部分学生都能自信地回答问题，认真思考问题并自主提出不同的解决思路，时刻检验和评价自己与他人思路的正确性，并能够及时地作出调整，通过成功解决实际问题获得学习上的成就感。并且，在解决课上练习时，能清晰表达出关于数学任务和策略的知识，比如题目的难易程度、题目条件以及解题方法、思路和结果，最终学习效果也较好。

其次，从教师的课后反馈来看，虽然未提到数学批判性思维倾向和数学元认知两个词汇，但反馈的语句中都反映出该堂课注重鼓励和表扬，增强了学生的自信心和学习热情；还要求学生敢于质疑，时刻反省，通过提问与追问锻炼学生的数学思维；注重数学知识的系统性与迁移性，渗透了数学思想方法，强调学生对自身数学学习情况

的认知。

可以看出，本次教学实践对学生的自信心、分析性和系统性能力都产生了积极的影响，同时也加强了对学生数学元认知知识的指导。并且，学生的寻找真相、开放思想和求知欲倾向，以及数学元认知体验和数学元认知监控方面的表现在本次教学实践过程中都有一定程度的体现。因此，在数学课堂中培养高中生数学批判性思维倾向与数学元认知具有一定的教学价值。

第7章 研究结论与反思

7.1 研究结论

本研究采用《高中生数学批判性思维倾向和数学元认知的调查问卷》对柳州市两所高中的高中生展开问卷调查,利用 SPSS25.0 和 AMOS24.0 软件对 503 份有效样本数据进行统计和分析,总结出高中生数学批判性思维倾向、数学元认知的现状,并基于理论研究,探究了数学批判性思维倾向、数学元认知与数学学业成绩三者之间的关系,最后将数学批判性思维各维度作为中介变量,进一步剖析数学元认知对数学学业成绩的影响作用机制,综合研究分析得到的研究结论如下:

(1) 在现状分析方面:高中生的数学批判性思维倾向整体处于中等偏上水平,其中开放思想均分最高,其次为求知欲、寻找真相、分析性与系统性、自信心。高中生的数学元认知整体亦处于中等偏上水平,其中数学元认知体验均分最高,其次为数学元认知监控和数学元认知知识。

(2) 在差异性分析方面:①对于高中生数学批判性思维倾向,其在性别、年级、数学学业成绩、学生干部、班主任、数学喜爱程度上均存在显著性差异。具体而言,在性别上,男生明显优于女生,除了开放思想维度不存在显著差异,其余维度在性别上存在显著差异;在年级上,高一年级学生优于高二年级学生,但只有寻找真相和自信心维度在年级上存在显著差异;在数学学业成绩上,数学学业成绩越好的学生,其数学批判性思维倾向水平越高,且各维度在数学学业成绩上均存在显著差异;在学生干部上,担任学生干部的学生的数学批判性思维倾向水平显著更强,但只有寻找真相和求知欲维度在学生干部上存在显著差异;在班主任上,班主任为数学教师的学生的数学批判性思维倾向水平显著更高,但只有寻找真相、自信心和求知欲维度在班主任上存在显著差异;在数学喜爱程度上,对数学喜爱程度越高的学生,其数学批判性思维倾向水平明显越高,且各维度在数学喜爱程度上均存在显著差异。②对于数学元认知,其在性别、年级、数学学业成绩、班主任、数学喜爱程度上均存在显著性差异,在学生干部上不存在显著性差异。具体而言,在性别上,男生显著强于女生,且数学元认知知识、数学元认知体验、数学元认知监控在性别上均存在显著差异;在年级上,高二年级学生的数学元认知水平明显优于高一年级学生,各一级维度在年级上均存在显著差异,在各二级维度上,只有关于策略的知识、监控与调节、反思与评价维度在年级上不存在显著差异;在数学学业成绩上,数学学业成绩越好的学生,其数学元认知水平越高,且各维度在数学学业成绩上均存在显著差异;在学生干部上,不存在显著性差异,且担任学生干部的学生的数学元认知水平与不是学生干部的学生基本一致;在班主任上,班主任为数学教师的学生,其数学元认知水平显著更高,但只有数学元

认知知识、数学元认知监控维度在班主任上存在显著差异；在数学喜爱程度上，对数学越感兴趣的学生，其数学元认知水平明显越高，且各维度在数学喜爱程度上均存在显著差异。

（3）在相关性分析方面：数学批判性思维倾向、数学元认知与数学学业成绩，任意两者之间呈显著正相关。并且，数学批判性思维倾向各维度与数学元认知各维度之间呈显著正相关；数学批判性思维倾向各维度与数学学业成绩之间呈显著正相关；数学元认知各维度与数学学业成绩之间呈显著正相关。

（4）在作用机制和中介效应分析方面：数学元认知对数学学业成绩具有正向预测作用；数学批判性思维倾向对数学学业成绩具有正向预测作用。并且，数学批判性思维倾向及其各维度在数学元认知与数学学业成绩之间均能起到中介作用，其中自信心所起到的中介作用最为关键，其次为分析性与系统性、求知欲、开放思想、寻找真相。

7.2 教学启示

本研究结果表明数学元认知能够正向预测数学学业成绩，且数学元认知和数学批判性思维倾向显著正相关，数学元认知可以通过数学批判性思维倾向间接地影响数学学业成绩。并且，结合教学实践的课堂表现和课后反馈来看，在数学课堂中培养高中生数学批判性思维倾向与数学元认知具有一定的教学价值。因此，本文将围绕着发展数学批判性思维倾向、培养数学元认知这两个角度总结出相应的教学启示，为教师开展锻炼学生数学批判性思维倾向和数学元认知的数学教学提供参考，进而不断提高学生的数学思维能力和数学学业成就，使其逐渐成为能够适应未来社会需要的高“数学素质”人才，推动素质教育的有效落实。

7.2.1 发展高中生数学批判性思维倾向的启示

（1）将数学教育目光转向教会学生思维，增强学生批判意识

数学教师应培养能够适应学生终身学习的思维能力，而不囿于当下的数学知识。数学思维基于数学问题而展开，但学生往往会从正确的视角看待问题，而缺少从否定角度分析问题的批判意识，缺乏发现谬误和提出质疑的能力与勇气，长此以往，导致学生数学思维的发展举步维艰。因此，数学教师应当转变教育目光，从关注学生知识体系转向教会学生思维，尤其是数学批判性思维。数学教师可以通过列举一些似是而非的数学问题，激起学生的好奇心和求知欲，并让学生举出反例或活用反证法对其进行反驳，以此发展学生寻找真相的毅力和证伪能力。此外，研究结论表明担任学生干部的学生的数学批判性思维倾向水平较高，所以教师可以鼓励学生担任学生干部，并引导学生有意识的运用批判性思维技能解决在学生工作中所遇到的问题，从而提升学

生的解决问题能力和批判性反思意识。

数学教师还应当丰富现有教学方式，例如发现式学习、课题式学习和研究式学习等，其中，发现式学习能够调动学生学习数学的主动性，并要求他们运用已有知识独立地检验结论的真伪，以培养学生的分析性和系统性能力；课题式和研究式学习能够使学生围绕着数学课题、重大时事或数学史料展开头脑风暴，从一点延伸出与之相关的知识，不仅利于数学知识结构系统化，还有利于培养学生自主探究能力和开放包容的思想态度，数学教师在这一过程中则需要及时给予指导、反馈和鼓励，以增强学生的自信心和求知欲，提高学生的数学批判性思维倾向水平。

（2）营造轻松、民主、开放的学习情境，激活学生数学热情

本研究发现高中生的自信心得分最低，且女生的数学批判性思维倾向水平低于男生，说明数学教师应当尤其重视树立学生的自信心以及女生的学习情况。活跃且严谨的数学批判性思维能够积极影响学生的数学学业成绩，数学学业成绩的提高也有利于学生自信心的增强，而思维的发展同样离不开情境。因此，数学教师应该具备民主教学思想，积极营造轻松、愉悦、开放的学习情境，教学以学生为中心，并给女生群体更多的关注与耐心，帮助她们克服学习上的困难和心理上的障碍，逐步构建平等和谐、乐于沟通交流的师生关系。

同时，研究结论表明学生对数学的喜爱程度越高，其数学批判性思维倾向水平越高。因此，数学教师可以通过开展变式学习、分辨真伪、提供反例、检验猜想等数学学习活动，增强学生的学习兴趣，激发学生的数学学习热情，使学生全身心投入至数学世界中。并且，鼓励学生大胆提出自己通过归纳、类比和猜想得到的数学定理和概念，此时数学教师不要轻易否定学生的思路，尤其是对待高年级学生，更应该给予其更多的耐心与鼓励，为学生提供充分的时间和空间，让他们对自己的观点和结论的正确性进行批判性地评价与检验，这一过程不是单调重复已有的数学经历，而是引导其独立进行数学批判性思维的整个过程，掌握发现数学知识的逻辑思路和蕴含其中的数学思想方法，同时也是增强学生自信心、分析性和系统性能力和数学学习兴趣的培养过程。

7.2.2 培养高中生数学元认知的启示

（1）渗透数学思想方法，加强数学元认知知识的指导

本研究结果发现高中生的数学元认知知识得分最低，而数学元认知知识水平的高低显著影响着学生的数学学业成绩。因此，数学教师需要为学生传授数学元认知知识，主要包括数学知识的体系结构及其蕴涵的数学思想方法、学生关于自身及他人能力方面的知识、数学学习任务的知识、数学学习策略的知识。数学教师还应该将数学元认

知知识融入课堂教学之中,指导学生带着学习任务去学习数学,并渗透数学思想方法的运用,从不同问题情境中明确各种数学思想方法的优势所在,它是数学元认知知识的核心所在,反映了数学知识间的逻辑性和关联性。

另外,数学教师应向学生介绍先快后慢的记忆规律,使用艾宾浩斯遗忘曲线来辅助学生记忆和学习。在数学解题过程中,数学教师可以利用波利亚的“怎样解题表”,善用提示语激发学生的解题思路,推动学生的解题进程,例如,“我有没有透彻理解这一数学知识或公式?”“我是否见过此类数学问题?”“我是否还有其它方法去解决它?”。同时,提示语的使用也能帮助学生养成良好的数学元认知思维习惯,使其在独立进行数学学习活动时,能够逐渐明确解题意识和清晰地表达出解题思路,并且这一过程中也包含着大量的数学元认知知识,学生从中自行挖掘出来的数学元认知知识才最具迁移性。

(2) 创设积极体验情境,重视数学元认知体验的调控作用

良好的数学元认知体验能够使学生获得良好的数学学习效果,反之,较差的数学元认知体验还会导致数学元认知的删减、修改和遗忘^①。数学元认知体验包括认知体验和情感体验,数学教师可以从这两方面入手,创设积极的体验情境,提高学生的数学元认知体验。

在数学认知体验方面,数学教师在数学教学中强调数学知识间的联系,引导学生构建具有逻辑性的数学知识体系,不断完善数学认知结构。比如,在新授课时,数学教师应当巧用先行组织者,帮助学生建立起新旧知识之间的联系;在复习课时,采用“一题多解”和“一法多题”的形式,帮助学生厘清数学知识脉络,熟知数学思想方法的运用等。

在数学情感体验方面,数学教师应当帮助学生建立起积极的数学学习心态,可以通过鼓励学生直面数学困难,引导学生正确归因;或是对学生的进步给予一定的肯定,增强学生的学习动力;或是指导学生完成数学难题挑战,让学生体验到数学成功的喜悦感,从而缓解学习数学的焦虑感和挫败感等。这些行为都能增强学生的自信心,改善学生的数学学习态度,提高学生的数学学习效果。

(3) 唤醒学生自我意识,提高数学元认知监控能力

自我意识是人的意识的最高形式,以主体自身的意识为意识对象,可以对人的认知活动进行监控和调节^②。因此,数学教师应当唤醒学生的自我意识,强调对学生问题意识、反思意识的培养,提高学生数学元认知监控能力。

其中,问题意识的培养需要数学教师经常询问学生有关数学学习方面的问题,比

^① 涂荣豹.数学解题学习中的元认知[J].数学教育学报,2002(04):6-11.

^② 张荣声.元认知对提高数学思维能力的作用——元认知与数学思维的关系初探[J].数学通报,1995(08):50+1-5.

如“你的数学学习计划是什么？”“这些数学知识和数学思想方法是否掌握？”“你的解题思路是否正确？或者还有其他方法吗？”“你今天收获了哪些新知识？”等，让学生耳濡目染，使其今后在数学学习活动中也能主动提问自己，逐渐形成问题意识，能够根据实际学习情况所反映的问题，不断调整数学学习计划，直至找到合适自己的学习策略。因此，问题意识的培养有利于提高学生定向与计划、反思与评价、监控与调节的能力。

反思意识的培养则可以从总结性反思和提高性反思两方面进行。总结性反思是对数学学习经验和教训的反思，包括解题成功时对数学知识和思想方法的总结，以及解题受挫时对自身数学知识结构空缺的反思；提高性反思则关注高于学生现有数学学习水平的发散思维和概括能力，包括“一题多解”和“一题多变”的思考，以及对同类题型的解题思路的概括性总结。通过总结性反思和提高性反思可以帮助学生形成反思意识，数学教师也要有意识的引导学生养成反思的好习惯。同时还可以提倡学生采取数学错题管理、整理思维导图等方式将数学知识系统化，提高学生组织与管理、反馈与检验的能力。

7.3 研究不足与展望

本研究的不足与展望分为以下三个方面：

一是研究对象方面，本研究仅对柳州市两所高中学校的学生展开调查，样本的选取具有一定的局限性，缺乏区域、学校、城乡之间的比较。并且，广西作为少数民族种类较为丰富的地区，本研究却未涉及民族之间的比较。因此，在今后的研究中，会将研究对象扩大至广西其他地区，并进行多角度的对比，使研究结果更具代表性和实际意义。

二是研究方法方面，本研究主要采用问卷调查法进行实证研究，未辅以访谈调查法进行深入调查，未能进一步了解教师与学生关于数学批判性思维倾向和数学元认知的认识和教育态度。因此，在今后的研究中，会将问卷调查法和访谈调查法结合起来进行深层次研究，弥补问卷调查法的不足。

三是研究内容方面，本研究主要探讨数学批判性思维倾向、数学元认知与数学学业成绩三者之间的关系，仅研究了以数学批判性思维倾向及各维度作为中介变量时，数学元认知对数学学业成绩的影响作用机制，但从以往理论研究的结论来看，数学批判性思维也可以正向影响数学元认知。因此，今后的研究内容会以数学元认知及各维度为中介变量，探究数学批判性思维倾向对数学学业成绩的影响作用机制，也会积极探究其他变量（如自我效能感、学习投入、学习动机、数学学习兴趣等变量）与数学批判性思维倾向、数学元认知、数学学业成绩之间的关系，并深入开展有关数学批判性思维倾向和数学元认知融入数学课堂的教学实践，从而得到更为全面的研究结论。

参考文献

- [1]中共教育部党组关于教育系统深入学习贯彻习近平总书记在两院院士大会、中国科协第十次全国代表大会上重要讲话精神的通知[EB/OL].http://www.moe.gov.cn/srcsite/A16/s7062/202106/t20210611_537472.html,2021-06-10.
- [2]钟启泉.批判性思维:概念界定与教学方略[J].全球教育展望,2020,49(01):3-16.
- [3]中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版)[M].北京:人民教育出版社,2018.
- [4]朱展霖.高中生数学批判性思维倾向、数学学习策略与数学学业成绩的关系研究[D].华中师范大学,2021.
- [5]喻平.中学生自我监控能力和 CPFS 结构对数学学业成绩的影响[J].数学教育学报,2004(01):23-26+35.
- [6]谢云天,史滋福,钟婷,张卫.不同数学学业成绩初中生在元认知上的比较:基于 NVivo 的质性分析[J].教育研究与实验,2021(02):86-91.
- [7]罗英.批判性思维与元认知的关系探析[J].教育理论与实践,2019,39(23):3-5.
- [8]突出理性思维 重视数学本质——教育部考试中心命题专家解析二〇二〇年高考数学试题[EB/OL].http://www.moe.gov.cn/jyb_xwfb/s5147/202007/t20200708_470733.html,2020-07-8.
- [9]吴妍.为“什么”而考: 高考考查批判性思维的问题反思[J].中国教育科学(中英文),2022,5(02):88-94+134.
- [10]刘儒德.论批判性思维的意义和内涵[J].高等师范教育研究,2000(01):56-61.
- [11]McPeck J. E. *Critical Thinking and Education*[M]. New York: St. Martin's Press,1981.
- [12]Tim John Moore. Critical Thinking and Disciplinary Thinking: A Continuing Debate[J]. *Higher Education Research & Development*, 2011, 30(3):261-274.
- [13]戴维·希契柯克,张亦凡,周文慧.批判性思维教育理念[J].高等教育研究,2012,33(11):54-63.
- [14]武宏志.批判性思维的灵魂——理性标准[J].逻辑学研究,2016,9(03):25-41.
- [15]武晓蓓.批判性思维研究[M].北京:人民出版社,2018:3.
- [16]王彦君.批判性思维[M].北京:高等教育出版社,2020:5.
- [17]王建,李如密.批判性思维与创新思维的辨析与培育[J].课程.教材.教法,2018,38(06):53-58.
- [18]Dewey J. *How We Think*[M]. Boston, New York and Chicago: D. C. Heath,1910:6-13.

- [19] Glaser E. *An Experiment in the Development of Critical Thinking*[M]. New York: Advanced School of Education at Teacher's College, Columbia University, 1941.
- [20] Smith B. The Improvement of Critical Thinking[J]. *Progressive Education*, 1953, 30: 129-134.
- [21] Ennis R. A Concept of Critical Thinking[J]. *Harvard Education Form*, 1962(1).
- [22] Ennis R. A Logical Basis for Measuring Critical Thinking Skills[J]. *Educational Leadership*, 1985, 43(2): 44-48.
- [23] Paul R. *Dialogical Thinking: Critical Thought Essential to the Acquisition of Rational Knowledge and Passions*[M]. New York: W. H. Freeman, 1987: 127-148.
- [24] Lipman M. Critical Thinking: What Can It Be? [J]. *Education Leadership*, 1988(46): 38-43.
- [25] 高瑛, 许莹. 西方批判性思维研究: 回顾与反思[J]. *外语学刊*, 2014(05): 1-6.
- [26] Facione P. A. The Delphi Report-critical Thinking: A Statement of Expert Consensus for Purposes of Educational Assessment and Instruction[R]. Millbrae CA: The California Academic Press, 1990.
- [27] Halpern D. F. Assessing the Effectiveness of Critical Thinking Instruction[J]. *The Journal of General Education*, 2001(4).
- [28] Tim John Moore. Critical Thinking and Disciplinary Thinking: A Continuing Debate[J]. *Higher Education Research & Development*, 2011, 30(3): 261-274.
- [29] 罗清旭. 论大学生批判性思维的培养[J]. *清华大学教育研究*, 2000(04): 81-85.
- [30] 林崇德. 思维心理学研究的几点回顾[J]. *北京师范大学学报(社会科学版)*, 2006(05): 35-42.
- [31] 谷振诣, 刘壮虎. 批判性思维教程[M]. 北京: 北京大学出版社, 2006: 1-2.
- [32] 董毓. 批判性思维三大误解辨析[J]. *高等教育研究*, 2012, 33(11): 64-70.
- [33] 武宏志. 批判性思维: 多视角定义及其共识[J]. *延安大学学报(社会科学版)*, 2012, 34(01): 5-14.
- [34] [美] 约翰·杜威. 我们怎样思维: 经验与教育[M]. 姜文闵译. 北京: 人民教育出版社, 1991: 28.
- [35] [美] 约翰·杜威. 我们如何思维[M]. 伍中友译. 北京: 新华出版社, 2010: 25.
- [36] 罗清旭. 批判性思维理论及其测评技术研究[D]. 南京师范大学, 2002.
- [37] Siegel H. *Educating Reason: Rationality, Critical Thinking, and Education*[M]. Routledge, 1988.
- [38] FACIONE P A, FACIONE N C, GIANCARLO C A. The disposition toward critical thinking: its character, measurement, and relationship to critical thinking skill[J].

Informal Logic, 2000, 20(1) :61-84.

- [39]孙联荣.数学教育中培养批判性思维的探讨[J].数学教育学报,1995(04):16-20.
- [40]李文婧. 数学批判性思维及其教学研究[D].山东师范大学,2004.
- [41]肖永红,习萍.大学生数学批判性思维及培养途径[J].教育探索,2008(09):11-12.
- [42]赵轩,任子朝,陈昂. 高考数学科批判性思维考查研究[J]. 数学通报,2019,58(12):38-42.
- [43]教育部考试中心.以评价体系引领内容改革,以科学情境考查关键能力——2020年高考数学全国卷试题评析[J].中国考试,2020(08):29-34.
- [44]Facione P. A, Facione N. C. *The California Critical Thinking Disposition Inventory*[M]. Millbrae: California Academic Press, 1992.
- [45]罗清旭,杨鑫辉.《加利福尼亚批判性思维倾向问卷》中文版的初步修订[J].心理发展与教育,2001(03):47-51.
- [46]彭美慈,汪国成,陈基乐,陈满辉,白洪海,李守国,李继平,蔡芸芳,王君俏,殷磊.批判性思维能力测量表的信效度测试研究[J].中华护理杂志,2004(09):7-10.
- [47]吕国光. 教师批判性思维倾向量表(TCTS)的修订[J].黄冈师范学院学报,2007(03):63-67.
- [48]戚业国,孙秀丽.我国普通高中学生批判性思维状况与教育应对[J].教师教育研究,2020,32(02):63-70.
- [49]高利红. 小学生批判性思维倾向与数学问题解决表现的关系研究[D].西南大学,2020.
- [50]裴昌根,范建成.数学批判性思维倾向问卷的编制及其信效度分析[J].中国考试,2022(03):44-50.
- [51]马净净. 初中生数学批判性思维倾向的调查研究[D].山东师范大学,2016.
- [52]卢忠耀,陈建文.大学生批判性思维倾向与学习投入:成就目标定向、学业自我效能的中介作用[J].高等教育研究,2017,38(07):69-77.
- [53]马军英,赵强,张燕,朱爱玲.高校师范生批判性思维倾向的调查研究[J].数学教育学报,2015,24(06):21-25.
- [54]Khandaghi M A, Pakmehr H. Critical thinking disposition: A neglected loop of humanities curriculum in higher education[J]. *Cypriot Journal of Educational Sciences*, 2011, 7(1):1-13.
- [55]Turan H, Kolayis H, Ulusoy Y O. Comparison of the Faculty of Education Students' Critical Thinking Disposition[J]. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 2012, 46:2020-2024.
- [56]江锦. 数学课程中师范生批判性思维的培养研究[D].上海师范大学,2021.

- [57]宋长青. 高中生批判性思维倾向实证研究[D].山东师范大学,2018.
- [58]彼得·费希万,诺琳·费希万,爱格尼丝·蒂瓦里,费利克斯·尤恩.作为普遍人类现象的批判性思维——中国和美国的视角[J].北京大学学报(哲学社会科学版),2009,46(01):55-62.
- [59]Glaser E M. An Experiment in the Development of Critical Thinking[D]. Columbia University, 1941.
- [60]Ennis, R. H. Critical thinking and subject specificity: Clarification and needed research[J]. *Educational Researcher*, 1989, 18(3):4-10.
- [61]缪四平.美国批判性思维运动对大学素质教育的启发[J].清华大学教育研究,2007(03):99-105.
- [62]Coles M J, Robinson W D. *Teaching Thinking: A Survey of Programmers in Education*[M]. Connecticut: The Bristol Press, 1989: 39-41.
- [63]Mcpeck J. *Critical Thinking and Education*[M]. Ontario: Robertson, 1981: 7.
- [64]Smith F. *To Think in Language, Learning and Education*[M]. London: Routledge, 1992: 92.
- [65]陈振华.批判性思维培养的模式之争及其启示[J].高等教育研究,2014,35(09):56-63.
- [66]Howie D. *Teaching Students Thinking Skills and Strategies*[M]. London: Jessica Kingsley Publishers, 2011: 100-103.
- [67]Coles M J, Robinson W D. *Teaching Thinking: A Survey of Programmers in Education*[M]. Connecticut: The Bristol Press, 1989: 16.
- [68]保罗·弗莱雷.被压迫者教育学[M].顾建新,等,译.上海:华东师范大学出版社, 2001: 28,41.
- [69]管宏斌.论批判性思维在数学教学中的建构[J].教学与管理,2006(01):62-65.
- [70]李文婧,傅海伦.数学批判性思维的影响因素及其培养[J].中国成人教育,2012(18):124-125.
- [71]姜英杰.元认知研究的历史源流与发展趋势[J].东北师大学报(哲学社会科学版),2007(02):156-161.
- [72]董奇.论元认知[J].北京师范大学学报,1989(01):68-74.
- [73]Nelson T O. Consciousness and metacognition[J]. *American Psychologist*, 1996, 51(2):102-116.
- [74]Flavell J H. Metacognitive aspects of problem solving[J]. *Nature of Intelligence*, 1976:232.
- [75]汪玲,郭德俊.元认知的本质与要素[J].心理学报,2000(04):458-463.
- [76]Brown A L. Knowing When, Where, and How to Remember: A Problem of

- Metacognition[J]. *Advances In Instructional Psychology*, 1978(1): 77-165.
- [77] Sternberg R J. *Encyclopedia of Human Intelligence. Vol. 2*[M]. Macmillan Publishing House, 1994: 725.
- [78] 刘范,张梅玲.美国认知发展研究近况简介[J].心理学报,1984(03):339-346.
- [79] 郭成.智力研究的新思路——元认知研究[J].南京师大学报(社会科学版),1998(03):79-84.
- [80] Flavell J H. Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive-developmental inquiry[J]. *American Psychologist*, 1979: 906-911.
- [81] 张荣声.元认知对提高数学思维能力的作用——元认知与数学思维的关系初探[J].数学通报,1995(08):50+1-5.
- [82] 程素萍.问题解决中的元认知研究综述[J].教育理论与实践,1996(03):16-19+60.
- [83] 杜晓新.元认知在认知活动中的作用——兼论如何培养学生的元认知能力[J].上海师范大学学报(哲学社会科学版),1992(03):136-139+135.
- [84] 李玉琪,黄晓学.试析数学认知活动中的元认知[J].数学教育学报,1995(04):26-29.
- [85] 陈英和.认知发展心理学.杭州:浙江人民出版社[M].1996:312-344.
- [86] 黄晓学.数学元认知在数学问题解决中的作用[J].数学教育学报,1993(02):88-89.
- [87] 李建才,张生春.试论数学解题活动中的元认知[J].首都师范大学学报(自然科学版),1998(02):3-8.
- [88] 涂荣豹.数学解题学习中的元认知[J].数学教育学报,2002(04):6-11.
- [89] 欧慧谋,唐剑岚.国内数学元认知的研究与思考[J].课程·教材·教法,2012,32(05):58-61.
- [90] 章建跃,林崇德.中学生数学学科自我监控能力的发展[J].中国教育学报,2000(04):46-49.
- [91] 唐剑岚,周莹,汤服成.数学问题解决中的元认知问卷量表的设计[J].数学教育学报,2005(04):48-52.
- [92] 王光明,余文娟,王兆云.高中生数学元认知水平调查问卷的设计与编制[J].心理与行为研究,2016,14(02): 152-161.
- [93] 崔宝蕊,李健,王光明.初中生数学元认知水平调查问卷的设计与编制[J].数学教育学报,2018,27(03):45-51.
- [94] 王光明,邱冬,李健.小学生数学元认知水平调查问卷的设计与编制[J].考试研究,2021,17(01):70-78.
- [95] 谢云天.初中生元认知的发展特点及其与数学学业成绩的关系[D].湖南师范大学,2021.
- [96] Stillman G A, Galbraith P L. Applying mathematics with real world connections:

- Metacognitive characteristics of secondary students[J]. *Educational Studies in Mathematics*, 36(2): 157-194.
- [97]Schraw G, Dennison R S. Assessing metacognitive awareness[J]. *Contemporary Educational Psychology*, 19(4):460-475.
- [98]Downing K J. Self-efficacy and metacognitive development[J]. *International Journal of Learning*, 16(4):185-199.
- [99]Zulkipli N. Metacognition and its relationship with students' academic performance[J]. *The International Journal of Learning*, 15(11):91-106.
- [100]章建跃.中学生数学学科自我监控能力[M].上海:华东师范大学出版社.
- [101]杨国章.高中数学教学中元认知能力培养研究[D].湖南师范大学,2006.
- [102]胡映恒.初中生数学元认知现状分析及培养策略研究[D].湖南师范大学,2015.
- [103]Mevarech, Zemira R. Effects of Metacognitive Training Embedded in Cooperative Settings on Mathematical Problem Solving[J]. *Journal of Educational Research*, 1999, 92(4): 195-205.
- [104]朱德全.数学问题解决的表征及元认知开发[J].教育研究,1997(03):50-54.
- [105]汤服成,郭海燕,唐剑岚.初一学生数学问题解决中的动静态元认知研究[J].数学教育学报,2005(01):59-62.
- [106]庞静.高中生元认知与数学思维品质相关性研究[D].南京师范大学,2014.
- [107]Carr M, Jessup D L. Cognitive and metacognitive predictors of mathematics strategy use[J]. *Learning & Individual Differences*, 1995,7(3): 235-247.
- [108]Schneider W, Artelt C. Metacognition and mathematics education[J]. *ZDM*, 2010, 42(2):149-161.
- [109]Annemie Desoete,Brigitte Craene. Metacognition and mathematics education: an overview[J]. *ZDM*,2019,51(4).
- [110]Deanna Kuhn. A Developmental Model of Critical Thinking[J]. *Educational Researcher*,1999,28(2): 16-46.
- [111]Magno C. The role of metacognitive skills in developing critical thinking[J]. *Metacognition and Learning*, 2010, 5(2): 137-156.
- [112]何懿雯,王祖浩.国外教学中的元认知研究新进展[J].上海教育科研,2006(05):56-59+31.
- [113]肖薇薇.批判性思维缺失的教育反思与培养策略[J].中国教育学刊,2015(01):25-29.
- [114]Sadeghi B, Hassani M T, Rahmatkhah M. The Relationship between EFL Learners' Metacognitive Strategies, and Their Critical Thinking[J]. *Journal of Language*

Teaching & Research, 2014, 5(5): 1167-1175.

- [115] Arslan S . Investigating Predictive Role of Critical Thinking on Metacognition with Structural Equation Modeling[J]. *Malaysian Online Journal of Educational Sciences*, 2015, 3(2):1-10.
- [116] Buku M N I, Corebima A D, Rohman F. The correlation between metacognitive skills and the critical thinking skills of the senior high school students in biology learning through the implementation of problem based learning (PBL) in Malang, Indonesia[J]. *International Journal of Academic Research and Development*, 2016, 1(5): 58-63.
- [117] Naimnule L, Corebima A D. The Correlation between Metacognitive Skills and Critical Thinking Skills toward Students' Process Skills in Biology Learning[J]. *Journal of Pedagogical Research*, 2018,2(2): 122-134.
- [118] 吕磊,张正厚.批判性思维在元认知与自主学习之间的中介效应分析[J].中国高等医学教育,2014,No.215(11):57+74.
- [119] 吴明隆.问卷统计分析实务——SPSS 操作与应用[M].重庆:重庆大学出版社,2010(5):158.
- [120] 吴明隆.问卷统计分析实务——SPSS 操作与应用[M].重庆:重庆大学出版社,2010(5):282.
- [121] 吴明隆.问卷统计分析实务——SPSS 操作与应用[M].重庆:重庆大学出版社,2010(5):476.
- [122] 吴明隆.结构方程模型——AMOS 的操作与应用[M].重庆:重庆大学出版社,2010(10):212.
- [123] Fornell C, Larcker D F. Evaluating Structural Equation Models with unobservable variables and measurement error[J]. *Journal of Marketing Research*, 1981,18(1):39–50.
- [124] 吴明隆.结构方程模型——AMOS 的操作与应用[M].重庆:重庆大学出版社,2010(10):227.
- [125] 温忠麟,叶宝娟.中介效应分析:方法和模型发展[J].心理科学进展,2014,22(05):731-745.
- [126] Hayes A. F. Beyond Baron and Kenny: Statistical mediation analysis in the new millennium[J]. *Communication Monographs*,2009,76(4):408-420.
- [127] 吴明隆.结构方程模型——AMOS 的操作与应用[M].重庆:重庆大学出版社,2010(10):158.
- [128] 史璟.批判性思维的测量与培养[J].江淮论坛,2017(05):129-134.

- [129]程向阳.数学元认知差异的相关研究及启示[J].中国特殊教育,2008(10):93-96+92.
- [130]史耀芳.国外有关男女学生学习差异研究述略[J].外国中小学教育,1994(01):43-44+40.
- [131]王光明,余文娟,廖晶,王兆云.高效率数学学习高中生的元认知特征及其教学意义[J].教育科学研究,2017(04):46-53+61.
- [132]缪雪松.开发元认知,优化数学思维品质[J].中学数学杂志,2010(07):1-3.

附录 1

高中生数学批判性思维倾向和数学元认知的调查问卷（初始卷）

亲爱的同学：

您好！非常感谢您帮忙填写这份问卷。该问卷主要调查你对一些问题的看法，仅为教育研究提供重要信息，严格保证不会泄露您的个人信息，也不会影响您的学业成绩，更不会给您的学习和生活带来任何负面影响。问卷答案无对错和好坏之分，希望您能够**认真读题，请不要漏题**！谢谢！**请根据自己的真实情况在每道题的合适选项处打“√”。**

一、基本信息：

- 1.性别： ☐男 ☐女
- 2.年级： ☐高一 ☐高二 ☐高三
- 3.班级： _____
- 4.最近几次高中数学考试（如联考、期末考、期中考、月考等）平均成绩位于分数段：
- ☐131-150 ☐111-130 ☐91-110 ☐71-90 ☐70 及以下
- 5.目前是否担任学生干部： ☐是 ☐否
- 6.您的班主任是：☐数学教师 ☐其他教师
- 7.您对数学的喜爱程度：☐非常喜欢 ☐喜欢 ☐不确定 ☐不喜欢 ☐非常不喜欢

二、请根据自身实际情况作出选择：

注：每一备选答案的含义如下：

非常（不）符合：指**几乎在所有情况**下这一陈述对你来说是（不）符合的；

（不）符合：指在**一般情况**下这一陈述对你来说是（不）符合的；

不确定：指**半数情况**下这一陈述对你来说是符合的。

《高中生数学批判性思维倾向量表》

	题目	非常符合	符合	不确定	不符合	非常不符合
1	面对有争议的问题，我要从不同的见解中选择其一，是非常不容易的。					
2	在数学学习中，当我的想法和其他大多数同学的想法不一样时，我会直接赞同他们的想法。					

	题目	非常符合	符合	不确定	不符合	非常不符合
3	对于一个数学问题，如果我的答案与参考答案不一样时，我会直接以参考答案为准。					
4	解答复杂的数学问题时，我会不知所措。					
5	既然我知道怎样作这决定，我便不会反复考虑其他的选择。					
6	了解别人解决数学问题的想法，对我来说是重要的。					
7	我会从多个角度去思考数学问题，而不仅为了得到答案。					
8	在小组讨论数学问题时，每个人都可以表达自己的想法。					
9	当别人的答案与我不一样时，我会客观反思并寻求该数学问题的结果真相。					
10	一个数学问题的解决方法通常不止一种。					
11	在数学学习中，如果我认为别人的答案时错误的，我就需要提出理由。					
12	我在处理数学难题时，我会对概念、定义等最根本的内容进行思考，从而找到解决问题的突破口。					
13	我发现自己常去思考别人解决数学问题的方法。					
14	我总会先分析数学问题的重点所在，然后再解答它。					
15	我的注意力很容易受到外界环境影响。					
16	遇到数学难题时，我会策划出一套系统的解题步骤去解决问题。					
17	当我看到一个数学问题复杂难懂时，我便放弃解决。					
18	我认为自己拥有良好的数学思维能力。					
19	需要思考而非全凭记忆作答的数学测验比较适合我。					
20	在面对问题时，因为我能作出客观的分析，所以我的同学会找我作决定。					
21	在数学学习中，我敢于表达出富有创新性和独特性的见解。					
22	我害怕在数学课堂上被提问。					
23	当面对一个重要抉择前，我会先尽力搜集一切有关的资料。					
24	我期待去面对富有挑战性的数学难题。					
25	在研究数学问题时，我常常会追寻问题的本质与来龙去脉。					
26	我渴望知道更多的数学知识。					
27	面对数学错题的时候，我很想知道自己错在哪里，正确思路是什么。					
28	所谓事情的真相，就是个人对这件事情的看法。					
29	解决数学难题的最好方法就是向别人问取答案。					
30	学习成绩好的同学所得到的答案便是正确答案。					

《高中生数学元认知量表》

	题目	非常符合	符合	不确定	不符合	非常不符合
1	我知道自己的数学学习能力，相信自己有解决各类数学问题的能力。					
2	我能正确地判断自己在哪一高中数学知识模块存在漏洞。					
3	我知道自己的数学学习目标或任务。					
4	我能够掌握课堂上学习的数学知识（如概念，公式、定理等）。					
5	我知道自己的数学学习目标或任务。					
6	我可以判断自己对一些数学知识的理解程度（如理解透彻、一般或不理解）。					
7	我对数学的基本类型（如开放的、封闭的、代数的、几何的等）有一个清晰认识。					
8	在阅读数学问题时，我对问题的已知条件、未知条件有一个清晰的认识。					
9	我会采用多种方法来解决数学问题。					
10	对于不同的数学内容，我会采用不同的学习方法。					
11	我能灵活运用常用的数学解题方法（如公式法、换元法、反证法等）。					
12	我清楚各种数学方法或数学定理公式的使用条件（如直线方程的截距式只能在截距都不为0时才能使用）。					
13	我常能将新学习的数学概念或定理与类似的知识相联系。					
14	在数学学习过程中，我多次注意到自己的错误后，这些错误出现的次数就会变少。					
15	我能清晰地判断高中阶段所学习的数学知识对我来说是否存在困难。					
16	在解题时，一看到某些题目我就有一种困难或容易的感觉。					
17	对我来说，成功解决数学问题会使我高兴。					
18	每当我不能成功地解决数学问题时，我会沮丧不安，放弃继续解决问题。					
19	完成数学作业后，我会觉得有成就感。					
20	对我来说，成功解决数学问题会使我高兴。					
21	在开始解题之前，我会把题目的意思弄清，明确目标后，再动手解题。					
22	在解题时，我对先做什么，后做什么，如何去做有一个大致的计划。					
23	在解题后，我会认真总结出知识间的内在联系，加深对知识的理解。					

	题目	非常符合	符合	不确定	不符合	非常不符合
24	数学考试前，我会有计划的复习数学内容（如先整体复习常考知识点，再重点复习易错知识点或掌握不牢固的内容等）。					
25	一种方法不能解决数学问题时，我会及时改换其他策略。					
26	解题过程中，我会常提醒自己要注意问题的条件或者结论。					
27	在解题时，我能意识到自己心情的好坏，并有意识地调整自己的情绪以免干扰解题。					
28	数学学习过程中，如果忘记了要用的公式，我就重新推导它（如三角函数的诱导公式等）。					
29	学习数学时，我会反思有哪些内容还没掌握好。					
30	一段时间的数学学习后，我会通过某种方式（如考试）对自己的学习效果进行评价。					
31	对于有多种解法的题目，我会比较求解过程的优缺点。					
32	我会对曾经解过的习题进行回顾、验证和反思（如题目类型、解题思路等）。					
33	解题后，我会检查我的解题方法是否正确。					
34	当我解决一个数学问题时，我会想，我是否解决了问题的关键部分。					
35	学完新的数学知识后，我会用它来解决一些相关问题，来检验自己是否已经理解所学知识。					
36	在解题后，我会思考运用了哪些数学知识和数学思想方法。					
37	我会记住一些数学解题技巧（例如借助数形结合来解答二次函数的零点问题或三角函数的求值问题等）。					
38	在学习完某一章节的数学知识后，我会认真归纳总结出知识间的内在联系，加深对知识的理解（比如学习完初等函数后，我会将指数函数、对数函数、幂函数等知识点加以总结）。					
39	学习数学新知识时，我会将其概念进行分解，以便更好地记忆（如学习函数的概念时，将其分解成定义域、值域和对应法则进行记忆）。					
40	我从来没有做错过数学题。					

调查结束！再次感谢您的认真填写！

附录 2

高中生数学批判性思维倾向和数学元认知的调查问卷（正式卷）

亲爱的同学：

您好！非常感谢您帮忙填写这份问卷。该问卷主要调查你对一些问题的看法，仅为教育研究提供重要信息，严格保证不会泄露您的个人信息，也不会影响您的学业成绩，更不会给您的学习和生活带来任何负面影响。问卷答案无对错和好坏之分，希望您能够**认真读题，请不要漏题**！谢谢！**请根据自己的真实情况在每道题的合适选项处打“√”。**

一、基本信息：

- 1.性别： ☐男 ☐女
- 2.年级： ☐高一 ☐高二 ☐高三
- 3.班级： _____
- 4.最近几次高中数学考试（如联考、期末考、期中考、月考等）平均成绩位于分数段：
☐131-150 ☐111-130 ☐91-110 ☐71-90 ☐70 及以下
- 5.目前是否担任学生干部： ☐是 ☐否
- 6.您的班主任是：☐数学教师 ☐其他教师
- 7.您对数学的喜爱程度：☐非常喜欢 ☐喜欢 ☐不确定 ☐不喜欢 ☐非常不喜欢

二、请根据自身实际情况作出选择：

注：每一备选答案的含义如下：

非常（不）符合：指**几乎在所有情况**下这一陈述对你来说是（不）符合的；

（不）符合：指在**一般情况**下这一陈述对你来说是（不）符合的；

不确定：指**半数情况**下这一陈述对你来说是符合的。

《高中生数学批判性思维倾向量表》

	题目	非常符合	符合	不确定	不符合	非常不符合
1	在数学学习中，当我的想法和其他大多数同学的想法不一样时，我会直接赞同他们的想法。					
2	对于一个数学问题，如果我的答案与参考答案不一样时，我会直接以参考答案为准。					

	题目	非常符合	符合	不确定	不符合	非常不符合
3	当我看到一个数学问题复杂难懂时，我便放弃解决。					
4	解决数学难题的最好方法就是向别人问取答案。					
5	学习成绩好的同学所得到的答案便是正确答案。					
6	在小组讨论数学问题时，每个人都可以表达自己的想法。					
7	当别人的答案与我不一样时，我会客观反思并寻求该数学问题的结果真相。					
8	一个数学问题的解决方法通常不止一种。					
9	在数学学习中，如果我认为别人的答案时错误的，我就需要提出理由。					
10	我会从多个角度去思考数学问题，而不仅为了得到答案。					
11	我在处理数学难题时，我会对概念、定义等最根本的内容进行思考，从而找到解决问题的突破口。					
12	我发现自己常去思考别人解决数学问题的方法。					
13	我总会先分析数学问题的重点所在，然后再解答它。					
14	遇到数学难题时，我会策划出一套系统的解题步骤去解决问题。					
15	解答复杂的数学问题时，我会不知所措。					
16	我认为自己拥有良好的数学思维能力。					
17	需要思考而非全凭记忆作答的数学测验比较适合我。					
18	在面对数学问题时，因为我能作出客观的分析，所以我的同学会找我询问数学思路。					
19	在数学学习中，我敢于表达出富有创新性和独特性的见解。					
20	我害怕在数学课堂上被提问。					
21	当面对一个重要抉择前，我会先尽力搜集一切有关的资料。					
22	在研究数学问题时，我常常会追寻问题的本质与来龙去脉。					
23	我渴望知道更多的数学知识。					
24	面对数学错题的时候，我很想知道自己错在哪里，解题的正确思路是什么，从而了解自己哪一部分的知识点较为薄弱。					

《高中生数学元认知量表》

	题目	非常符合	符合	不确定	不符合	非常不符合
1	我知道自己的数学学习能力，相信自己有解决各类数学问题的能力。					
2	我能正确地判断自己在哪一高中数学知识模块存在漏洞。					
3	我知道自己的数学学习目标或任务。					
4	我能够掌握课堂上学习的数学知识（如概念，公式、定理等）。					
5	我知道自己的数学学习目标或任务。					
6	我可以判断自己对一些数学知识的理解程度（如理解透彻、一般或不理解）。					
7	我对数学的基本类型（如开放的、封闭的、代数的、几何的等）有一个清晰认识。					
8	在阅读数学问题时，我对问题的已知条件、未知条件有一个清晰的认识。					
9	我会采用多种方法来解决数学问题。					
10	对于不同的数学内容，我会采用不同的学习方法。					
11	我能灵活运用常用的数学解题方法（如公式法、换元法、反证法等）。					
12	我清楚各种数学方法或数学定理公式的使用条件（如直线方程的截距式只能在截距都不为0时才能使用）。					
13	我常能将新学习的数学概念或定理与类似的知识相联系。					
14	在数学学习过程中，我多次注意到自己的错误后，这些错误出现的次数就会变少。					
15	我能清晰地判断高中阶段所学习的数学知识对我来说是否存在困难。					
16	对我来说，成功解决数学问题会使我高兴。					
17	每当我不能成功地解决数学问题时，我会沮丧不安，放弃继续解决问题。					
18	解决数学难题或者完成数学作业的后，我会觉得有成就感。					
19	对我来说，成功解决数学问题会使我高兴。					
20	在开始解题之前，我会把题目的意思弄清，明确目标后，再动手解题。					
21	在解题时，我对先做什么，后做什么，如何去做有一个大致的计划。					

	题目	非常符合	符合	不确定	不符合	非常不符合
22	解题后，我会认真总结出知识间的内在联系，加深对知识的理解。					
23	数学考试前，我会有计划的复习数学内容（如先整体复习常考知识点，再重点复习易错知识点或掌握不牢固的内容等）。					
24	一种方法不能解决数学问题时，我会及时改换其他策略。					
25	解题过程中，我会常提醒自己要注意问题的条件或者结论。					
26	在解题时，我能意识到自己心情的好坏，并有意识地调整自己的情绪以免干扰解题。					
27	数学学习过程中，如果忘记了要用的公式，我就重新推导它（如三角函数的诱导公式等）。					
28	学习数学时，我会反思有哪些内容还没掌握好。					
29	一段时间的数学学习后，我会通过某种方式（如考试）对自己的学习效果进行评价。					
30	对于有多种解法的题目，我会比较求解过程的优缺点。					
31	我会对曾经解过的习题进行回顾、验证和反思（如题目类型、解题思路等）。					
32	解题后，我会检查我的解题方法是否正确。					
33	当我解决一个数学问题时，我会想，我是否解决了问题的关键部分。					
34	学完新的数学知识后，我会用它来解决一些相关问题，来检验自己是否已经理解所学知识。					
35	在解题后，我会思考运用了哪些数学知识和数学思想方法。					
36	我会记住一些数学解题技巧（例如借助数形结合来解答二次函数的零点问题或三角函数的求值问题等）。					
37	在学习完某一章节的数学知识后，我会认真归纳总结出知识间的内在联系，加深对知识的理解（比如学习完初等函数后，我会将指数函数、对数函数、幂函数等知识点加以总结）。					
38	学习数学新知识时，我会将其概念进行分解，以便更好地记忆（如学习函数的概念时，将其分解成定义域、值域和对应法则进行记忆）。					
39	我从来没有做错过数学题。					

调查结束！再次感谢您的认真填写！

致谢

书叠青山，灯如红豆，春花秋月，几度春秋。转眼间，我的研究生生活即将走到终点。在这美好而艰难的两年岁月里，有幸遇到良师益友相伴一路。此刻的我窝在宿舍里，听着窗外的鸟叫声，细数着我在师大的点点滴滴，一时间百感交集，纵有万般不舍，但仍旧心怀感恩。

饮水思源，感念吾师。感恩遇见我的导师——卢家宽老师，我何其有幸能够成为您的学生。还记得第一次师门聚会，您和师母为我们准备了丰盛的家常菜，大家其乐融融的氛围与您无微不至的关怀让我感受到了家的温暖。在之后的相处中，您那严谨治学的科研精神、严于律己宽以待人的工作态度和幽默风趣的品格都深深地感染着我，感谢您让我成为更好的自己。在毕业之际，感谢您的无私帮助与支持，助我找到心仪的工作，给予我追逐理想的勇气。感激之情，心中无可磨灭，愿您万事顺遂，桃李芬芳。

桃李不言，下自成蹊。感恩遇见我的指导老师——彭刚老师。感谢彭老师不厌其烦地回答我那些现在看来都“不是问题”的问题，鼓励着我的每一次进步；感谢彭老师以渊博的专业知识与丰富的实践经验对我悉心指导与帮助，为我的小论文和毕业论文提出了许多宝贵的意见，每一次的交谈都让我受益匪浅；感谢彭老师设身处地的关心与开导，在我遇到困难时会主动分享自己的经历，指引着我走出阴霾。

一朝沐杏雨，一生念师恩。感恩遇见和蔼可亲的周莹老师、唐剑岚老师、罗荔龄老师、梁鑫老师、晏振老师等，感谢老师们在专业课上的循循教导、倾囊相授。同时，感谢暖心负责的唐翼老师在实习期间对我的耐心指导和帮助，感谢吴茜老师、尹旺莉老师、唐淑霖老师、熊慧芳老师、何静老师等老师为我在问卷调查数据上提供的帮助。正是各位老师耐心的指导和帮助，我才得以顺利完成毕业论文。

父母之爱子，则为之计深远。感谢始终支持我的爸爸妈妈，谢谢你们对我的悉心爱护、培育，谢谢你们在生活中给予我无限的包容和理解，总是为我遮风挡雨，把最好的一切都给了我，让我可以无所顾忌地追求理想。感谢爷爷奶奶含辛茹苦地把我抚养长大，一直视我为心中的宝贝，向他人提起我时总是满脸自豪。养育之恩无以为报，惟愿父母和爷爷奶奶身体安康，福寿延绵，希望我可以一直成为你们的骄傲。

愿岁并谢，与友长兮。感谢我亲爱的同门和师兄师姐，谢谢你们在生活和学业上给予的照顾与帮助。感谢三位“小彭友”——徐群妃、陈映彤、苏春梅，正是因为有你们与我同行，我的求学之路才会充满欢乐。感谢我那相见恨晚的好朋友俞卓君，谢谢你陪伴我度过每一个艰难时刻，白日的嬉笑打闹、深夜的走心安慰都是最美好的回忆。感谢我的挚友石雨欣，在我最需要的时候你都会出现，是你让我在师大的日子多姿多彩。最后，感谢我的闺蜜钟颖怡，你的暖心疏导是我度过难关的动力，你的乐观

心态是我最欣赏的人生态度，希望我们一直都是最默契的娱乐搭档。愿此去前程似锦，再相逢依旧如故。

初见乍惊欢，久处亦怦然。感谢我的男孩赵林峰，在相恋的七年里，一年拼搏，四年异地，两年读研，好在都有你的陪伴，庆幸我们互相坚定地选择了对方。谢谢你的幽默，总能给我带来一份份的快乐；谢谢你的耐心，帮我一字字地录入问卷数据；谢谢你的陪伴，伴我度过一个个难过、崩溃的艰难时期；谢谢你的包容，能够接纳我一次次的坏情绪……更感谢的是你能出现在我的生命里。愿可共白首，余生常相伴。

海压竹枝低复举，风吹山角晦还明。感谢这些年努力的自己，尽管多次怀疑和否定自己，但仍然坚持了下来，继续热爱着这个世界。愿未来的日子有趣有盼，每一岁都能在热爱的事业上发光发热。

最后，感谢审稿、答辩专家的辛劳付出，向专家们致以诚挚的谢意。

行文至此，落笔为终，虽是拙笔，聊以表情。

余姗姗

2023 年 4 月于广西师大容园

论文独创性声明

本人郑重声明：所提交的学位论文是本人在导师的指导下进行的研究工作及取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含其他个人或机构已经发表或撰写过的研究成果。对本文的研究作出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人承担本声明的法律责任。

研究生签名：余珊珊 日期：2023.6.6

论文使用授权声明

本人完全了解广西师范大学有关保留、使用学位论文的规定。本人授权广西师范大学拥有学位论文的部分使用权，即：学校有权保留本人所送交学位论文的复印件和电子文档，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文；学校有权向国家有关部门或机构送交学位论文的复印件和电子版。本人电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。除在保密期内的保密论文外，允许论文被查阅和借阅，可以公布（包括刊登）论文的全部或部分内容。论文的公布（包括刊登）授权广西师范大学学位办办理。

本学位论文属于：

☐ 保密，在 年 月 日解密后适用本授权书。

☐ 延迟公开，申请延迟至 年 月 日后公开。

☒ 公开。

论文作者签名：余珊珊 日期：2023.6.6

指导教师签名：李永贵 日期：2023.6.6