



指向数学运算素养的高中数学教材例习题研究^{*}

华东师范大学教师教育学院 200062 王思凯 徐斌艳

【摘要】 例习题应为学生数学运算素养的发展提供支持.依据普通高中数学课程标准构建数学运算素养分析框架,并选取人教 A 版和沪教版必修第一册的例习题进行研究,发现两版教材的例习题均重视数学运算素养的落实,在素养各维度及其水平、具体指标上呈现出若干鲜明特征,由此得到如何有效落实数学运算素养培养的教学启示.

【关键词】 数学运算;高中数学教材;例习题

1 研究缘起

数学教材作为数学课程标准的具体化,编写以培养学生核心素养为特色的教材,是高中数学课程改革的主要亮点^[1].《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》(以下简称新课标)也强调教材编写应凸显内容和数学学科核心素养的相互融合^[2].当前,依据新课标编写的多版新编高中数学教材已投入使用,在强调以核心素养为抓手落实立德树人根本任务的时代背景下,教材作为发展学生核心素养的重要教学资源,一个值得研究的问题是:高中数学教材是如何体现并落实数学核心素养的.

运算是数学的“童子功”,通过数学运算对学生进行系统的思维训练是数学育人的基本途径之一^[3,4].新课标明确提出数学运算素养,并列为六大数学核心素养之一,强调其在高中数学教学中的重要性.例习题作为教材的重要组成部分,是对课堂教学内容的应用、巩固和深化,对于学生数学学科核心素养的培养不可或缺,应当为学生发展数学运算素养提供平台和支撑.因此对高中数学教材中的例习题的数学运算素养表现情况进行研究,以期为教师深入理解并使用新教材开展教学以落实数学运算素养的培养提供建议.

2 研究设计

2.1 研究对象选取

选择由人民教育出版社出版的普通高中教科书数学必修第一册(A 版)^[5](以下简称人教 A 版)和上海教育出版社出版的普通高中教科书数学必修第

一册^[6](以下简称沪教版),运用文本分析法和统计分析法,探讨两版教材例习题的数学运算素养表现情况.其中,人教 A 版的习题包括练习、习题和复习参考题;沪教版的习题包括练习、习题和复习题;两版教材的例题均以“例”或“例 $X(X$ 表示 1,2,3, …)”呈现.另外,选取的教材内容聚焦必修课程的“主题一 预备知识”和“主题二 函数(不含三角函数)”.具体而言,人教 A 版包括“集合与常用逻辑用语”“一元二次函数、方程和不等式”“函数的概念和性质”“指数函数与对数函数”四章;沪教版包括“集合与逻辑”“等式与不等式”“幂、指数与对数”“幂函数、指数函数与对数函数”“函数的概念、性质及应用”五章.

2.2 数学运算素养分析框架构建

首先,参照新课标关于数学运算素养的内涵描述及水平划分,从情境与问题、知识与技能、思维与表达、交流与反思四个维度初步确立数学运算素养分析的具体指标,同时将每个维度划分为三个水平;接着依据指标内容对随机抽取 15% 左右的例习题进行预编码,根据编码结果与课题组成员商讨,对指标进行调整说明,最终构建数学运算素养的分析框架.

为了便于后续数据编码收集,分别用 $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}(i = 1, 2, 3; j = 1, 2)$ 表示数学运算素养各维度下各个水平的具体表现,例如 B_{12} 表示数学运算素养在知识与技能维度下水平一的第一种表现,具体如表 1 所示.

^{*} 基金项目 上海市教委项目“数学新编教材与核心素养的一致性研究”(14800-412224-20A07/005).



表 1 数学运算素养分析框架

维度	水平	指 标 内 容	编码
情境与问题	水平一	创设熟悉的数学情境,让学生了解运算对象	A_{11}
		让学生从熟悉的数学情境中提出运算问题	A_{12}
	水平二	创设关联的情境,让学生确定运算对象	A_{21}
		让学生从关联的情境中提出运算问题	A_{22}
	水平三	创设综合的情境,让学生确定运算对象和运算法则,明确运算方向	A_{31}
		让学生从综合的情境中提出运算问题	A_{32}
知识与技能	水平一	能够了解运算法则及其适用范围,正确进行运算	B_{11}
		根据问题的特征形成合适的运算思路,解决问题	B_{12}
	水平二	要求学生合理选择运算方法解决问题	B_{21}
	水平三	要求学生构造运算程序解决问题	B_{31}
思维与表达	水平一	在运算过程中体会运算法则的意义和作用(例题为主)	C_{11}
		能够通过运算验证简单的数学结论	C_{12}
		理解运算是一种演绎推理	C_{21}
	水平二	在综合运用运算方法解决问题的过程中,体会程序思想的意义和作用(例题为主)	C_{22}
		用程序思想理解与表达问题	C_{31}
	水平三	理解程序思想与计算机解决问题的联系	C_{32}
交流与反思	水平一	在交流的过程中要求学生用运算的结果说明问题	D_{11}
	水平二	在交流的过程中要求学生借助运算探讨问题	D_{21}
	水平三	在交流的过程中要求学生用程序思想理解和解释问题	D_{31}

2.3 编码及数据收集

第一步,根据表 1 对两版教材的例习题进行编码.若题目包含多道小题,则以小题为单位进行编码;若符合数学运算素养某一维度的某一水平下的某一种表现,则计数为 1,且只对最高水平层次下的表现计数.

第二步,利用 EXCEL 等软件统计编码数据,主要包括各版教材考查数学运算素养的例习题数量、素养各维度各水平下的具体表现的出现次数等.

下面分别以人教 A 版和沪教版的一道题目为例,阐述如何对题目进行编码.

(人教 A 版)8(3):讨论函数 $y = x + \frac{k}{x} (k > 0)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的单调性.

分析 此题是在含参数的函数背景下考查学生对判断函数单调性方法“取值、作差、定号、下结论”的掌握,将函数单调性的证明转化为计算并判断 $f(x_2) - f(x_1)$ 正负性的运算问题.由于运算过程涉及 $x_1x_2 - k$ 的符号判断,需将区间划分为 $(0, \sqrt{k})$ 和 $[\sqrt{k}, +\infty)$,再对每一个区间任取 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$,

通过作差判断 $f(x_2) - f(x_1)$ 与 0 的大小关系来证明函数在相应区间上的单调性.因此,该题在情境与问题维度是水平二的“让学生从关联的情境中提出运算问题”;知识与技能维度是水平二的“要求学生合理选择运算方法解决问题”;思维与表达维度是水平二的“理解运算是一种演绎推理”;没有体现交流与反思维度.

(沪教版)例 6:已知方程 $x^2 + x - 3 = 0$ 的两个根为 x_1, x_2 ,求下列各式的值:

$(1) x_1^2x_2 + x_2^2x_1; (2) |x_1 - x_2|.$

分析 例 6 包含两小题,需对每一小题进行编码.以第(1)小题为例,是在一元二次方程背景下考查学生对韦达定理的掌握和应用,已明确给出数学运算问题:求代数式的值.求解需要先对代数式变形得到 $x_1x_2(x_1 + x_2)$,再应用韦达定理得到 $x_1 + x_2 = -1$ 和 $x_1x_2 = -3$,最后代入求值.因此,例 6 第(1)问在情境与问题维度是水平一的“创设熟悉的数学情境,让学生了解运算对象”,知识与技能维度是水平一的“根据问题的特征形成合适的运算思路,解决问题”,思维与表达维度是水平一的“在运算过程中体

会运算法则的意义和作用”,没有体现交流与反思维度.

为保证编码信度,挑选两位参与分析框架研讨的数学教育方向的研究生,对两版教材中的例习题进行背靠背式的独立编码.两位编码者在正式编码前均接受过根据表 1 分析例习题的培训,对数学运算素养的指标内容有深入的认识和把握.全部编码完成后,采用归类一致性指数和编码信度系数考查编码的信度.其中,归类一致性指数指编码归类相同数占归类总数的百分比,即 $CA = 2 \times S / (T_1 + T_2)$, S 表示两位编码者归类一致数, T_1 、 T_2 表示每人的编码总数.编码信度系数公式为 $R = 2CA / (1 + CA)$ ^[7-8].由

表 2 两版教材考查数学运算素养的例习题比例*

	例题	练习	习题	复习题	总计
人教 A 版	57.75%	55.25%	57.46%	61.47%	57.45%
沪教版	67.53%	61.61%	76.05%	79.31%	71.13%

绘制两版教材中考查数学运算素养的总题数在不同类型题目上的分布图,得到图 1.整体而言,两版教材考查数学运算素养的题数在各类型题目上分布不均,按照习题、练习、例题、复习题的顺序递减.

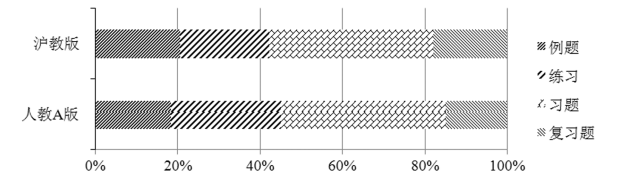


图 1 两版教材考查数学运算素养的题数在各类型题目上的分布图

此计算得到: $CA = 0.911$, $R = 0.953$, 这表明编码具有较好的信度.对于编码不一致的例习题,两位编码者通过协商讨论或征询第三方的意见得到一致同意的编码结果.

3 数据结果

3.1 考查数学运算素养例习题数的统计结果

如表 2 所示,沪教版考查数学运算素养的例习题的比例高于人教 A 版.其中,人教 A 版在例题、练习、习题上考查数学运算素养的比例较均衡,复习题考查数学运算素养的比例最多;沪教版在习题、复习题上考查数学运算素养的比例明显高于其他两类,练习考查数学运算素养的比例最少.

3.2 例习题在素养各维度水平上的分布情况

计算两版教材中考查数学运算素养的例习题在各维度水平上的题数百分比,得到表 3 和表 4.整体来看,两版教材中考查数学运算素养的例习题均涉及情境与问题、知识与技能两个维度,交流与反思维度最少,且各维度以水平一为主,水平三几乎没有.此外,人教 A 版在素养各维度水平一上的比例低于沪教版,但在水平二上的比例高于沪教版,尤其是情境与问题维度.

表 3 人教 A 版例习题在素养各维度水平上的数量百分比(%)

	情境与问题			知识与技能			思维与表达			交流与反思		
	水平一	水平二	水平三	水平一	水平二	水平三	水平一	水平二	水平三	水平一	水平二	水平三
例题	12.64	4.88	0.67	13.53	4.66	0.00	7.98	2.00	0.00	0.44	0.22	0.00
练习	21.51	5.32	0.00	22.84	3.99	0.00	2.44	0.22	0.44	0.22	0.00	0.00
习题	26.61	12.86	0.67	32.82	7.32	0.00	3.10	2.00	0.67	0.89	1.77	0.00
复习题	9.98	4.43	0.44	11.53	3.33	0.00	2.44	0.00	0.44	0.89	0.67	0.00
小计	70.73	27.49	1.77	80.71	19.29	0.00	15.96	4.21	1.55	2.44	2.66	0.00

表 4 沪教版例习题在素养各维度水平上的数量百分比(%)

	情境与问题			知识与技能			思维与表达			交流与反思		
	水平一	水平二	水平三	水平一	水平二	水平三	水平一	水平二	水平三	水平一	水平二	水平三
例题	17.71	2.19	0.63	17.55	2.98	0.00	10.82	0.63	0.00	0.78	0.78	0.00
练习	19.59	2.04	0.00	19.44	2.19	0.00	2.04	0.31	0.31	1.10	0.78	0.00
习题	33.86	5.96	0.00	34.01	5.80	0.00	3.61	0.31	0.16	2.04	0.63	0.00
复习题	13.32	4.70	0.00	13.01	5.02	0.00	1.10	1.25	0.00	0.63	0.31	0.00
小计	84.48	14.89	0.63	84.01	15.99	0.00	17.55	2.51	0.47	4.55	2.51	0.00

* 以“例题”一栏下的数据为例,是将例题中考查数学运算素养的题数除以例题总数,其余类似.



统计两版教材分别考查情境与问题、知识与技能、思维与表达、交流与反思四个维度的例习题数,并计算相应百分比,得到图 2. 总体而言,两版教材例习

题涉及情境与问题、知识与技能两个维度的比例最高且两者同时出现,交流与反思维度很少. 而且,沪教版在各维度上的例习题百分比均高于人教 A 版.

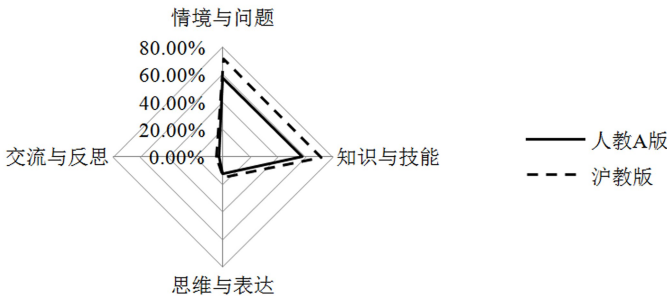


图 2 两版教材考查素养各维度的例习题百分比

3.3 例习题在素养指标上的分布情况

如图 3 所示,两版教材中考查数学运算素养的例习题在素养各指标上的分布主要集中在 A_{11} 、 B_{11} 、 B_{12} , 其次是 A_{12} 、 A_{21} 、 B_{21} , 其他指标较少或几乎没有.

沪教版考查数学运算素养的例习题在 A_{11} 、 B_{12} 、 D_{11} 指标上的题数百分比高于人教 A 版,但在 A_{12} 、 A_{21} 、 A_{22} 、 B_{11} 、 B_{21} 指标上低于人教 A 版;其他指标上两版教材没有明显差异.

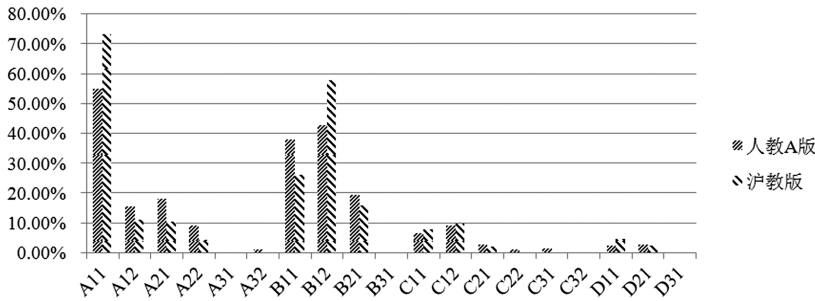


图 3 两版教材考查素养各指标的例习题百分比

4 研究结论

4.1 两版教材注重数学运算素养的落实,关注学生运算素养基础性的发展

教材的例题和课后习题设计部分是数学运算素养实现的主要依托^[9]. 两版教材设置大量考查数学运算素养的例习题,以等式与不等式内容为例,借助等式或不等式的性质求解方程(组)和不等式(组),为学生数学运算素养的发展提供充足的机会,一方面重视数学或实际情境的创设要求学生理解运算对象和问题,另一方面强调学生对运算法则的掌握应用、运算思路的形成和运算方法的选择. 另外,水平一和水平二分别是高中毕业和高考的要求,水平三是作为大学自主招生的参考^[2]. 根据新课标关于课程内容的设置,高中数学必修第一册的知识以预备知识和函数主题为主,是整个高中数学课程学习的基础. 两版教材的例习题对素养各维度的考查水平的分布符合新课标对高中毕业生的素养发展要求在水平一、二上的建议,大多以水平一为主,重在为学生运算素养的发展打基础.

4.2 两版教材重视学生对运算对象的识别把握,提升数学运算问题的转化能力

数学运算素养包含两方面含义,一是用“数”或“量”表示研究对象的状态、水平、指标等;二是通过数学运算具体地解决问题^[10]. 前者是对运算对象的理解认识,后者的关键在于能将所要解决的问题转化为数学运算问题. 高中阶段的运算对象由以往的数、式拓展到集合、函数等,两版教材要求学生从具体情境中识别运算对象的题数比均在 70% 以上,以此帮助学生充分体验并认识运算对象的含义. 例如对于集合的运算,两版教材赋予集合中的元素以表示直线上的点、三角形或幸福农场的汽车等数学或现实意义,学生须在把握集合所表示的具体含义的基础上实现集合的交并补运算. 数学运算问题指向运算目标,对运算思路的形成、运算方法的选择等起引领作用. 两版教材均安排一定数量的例习题(人教 A 版 26.16%; 沪教版 15.83%),提升学生数学运算问题的转化能力和意识,例如将数式的大小比较转化为作差问题,将函数奇偶性判断转化为 $f(x)$ 和



$f(-x)$ 的计算和比较,以此帮助学生积累从具体情境中将一般问题转化为数学运算问题的经验.

4.3 两版教材强调学生对运算法则的理解应用,而且融数学思想于运算素养之中

运算通常被定义为运用相应的法则和公式对具体运算对象进行变形的演绎过程^[11],这不仅凸显运算法则在运算中的地位,而且强化化归、推理等数学思想在运算中的应用.两版教材关于应用运算法则正确计算、体会法则意义和作用的例题比例将近三分之一,对于 n 次方根、指数幂等运算法则,先以例题呈现法则的应用过程,让学生体会其意义和作用,再借助习题、练习等巩固学生对运算法则的理解和应用.数学运算是特殊的逻辑推理,两版教材约有 12% 的例题要求学生借助运算验证数学结论或证明命题真伪,在运算过程中渗透演绎推理的思想.而且从 B_{12} 和 B_{21} 指标来看,两版教材重视学生根据问题的特征探究解决问题的运算步骤,强调数学思想对运算思路设计和运算方法选取的指导作用.例如,沪教版“习题 2.1”B 组第 3 题可将 $a - b + c$ 视作整体,再对 x 赋值为 0 直接求解代数式的值,较之根据等式恒成立的条件先求解 a, b, c 的值更简便,体现了数学整体思想对运算过程的优化.

4.4 两版教材注重运算过程的程序化,关注信息技术在运算中的运用

运算程序是运算方法的具体化,是解决一类问题可操作的步骤,也是借助计算机和外界力量解决问题的路线图^[12].从 B_{21} 和 C_{31} 指标来看,两版教材均设置一定数量的例题,要求学生应用或化用已有的解决一类问题的运算步骤解决问题,在问题解决过程中感悟程序思想的意义和作用(C_{22} 指标),例如用函数方法,借助一元二次函数图象的直观,求解一元二次不等式.而且沪教版会在题干表述上直接点明用函数的观点解不等式,明确突出程序思想方法在运算过程中的应用.另外,信息时代的到来为学生数学学习方式的变革提供了可能,新课标也强调信息技术与课程内容的深度融合.两版教材在程序化的运算过程中关注计算机等技术工具对运算的辅助作用,学生可以借助信息技术完成具体的运算过程,重在掌握算法思想在数学运算中的运用.以二分法求函数零点的近似值为例,关键在于运用二分法的设计如何求函数零点的一系列步骤,对于具体自变量的函数值可利用计算工具求解.

5 教学启示

5.1 加强运算法则由来及其应用的过程性教学,促

进学生建构对算理的精准理解

运算法则是实施运算的基础,学生对数学公式、定理、性质等运算法则的理解直接制约着其数学运算能力的发展.有调查表明,超过一半的学生能记忆运算法则但不能在新情境中识别应用^[13],很大程度上就在于学生没有获得对运算法则的本质理解,即法则背后蕴含的算理.运算法则是关乎算什么以及怎么算的回答,而算理是关于为什么要这样算以及怎样算得好的回答^[14].两者分别是对运算“知其然”和“知其所以然”层面的揭示,运算法则的掌握是理解算理的前提.学生对算理的认识必须回到对运算法则在“知何由以知其所以然”层面的解释,即对运算法则由来的推导梳理.数学概念是数学运算的前提和基础,运算法则建立在相应的数学概念之上^[15].学生只有完整经历概念的建构过程才能获得对运算法则的精准理解.以指数幂的运算性质为例,保持运算性质不变是指指数幂拓展的合理性的关键,教师应引导学生经历从整数指数幂到有理数指数幂,再到实数指数幂的拓展过程,建立实数指数幂的概念,从而类比得出指数幂的运算性质.另外,法则应用的教学应置于具体教学场景之中,教师通过创设情境,以问题驱动学生思考什么情况下需要运用哪些法则,运用法则能对运算起到怎样的效果,如此学生才能将法则迁移到新的情境中探索运算思路,切忌以解问题训练代替算理分析讲解^[16].

5.2 重视数学思想对运算的指导作用,在感悟通性通法中培养学生的计算思维

数学思想是运算之魂,是解决运算合理性的基本策略的源泉,是优化运算过程和选择运算方法的指导原则^[17].教师应超越运算在“术”层面的操作学习,即运算技能的训练,引导学生体验运算在“道”层面的深度思考,即运算过程所反映的数学思想,促使运算教学由技能传授走向素养习得,真正实现“道”与“术”的有机统一.运算思路的探究分析是数学运算教学的核心环节,教师带领学生在明确运算对象的基础上,经历执果索因、由因导果双向循环的探究过程,充分发挥数学思想对运算的指导作用.具体而言,教师可以设计问题(串)驱动学生的思考过程,诸如:已知条件有哪些?得到结论需要什么条件?与已知条件是什么关系?条件和结论如何转化?解决主要途径有哪些?等等^[18],在探寻运算方向的过程中体会转化与化归思想的导向功能,在选择运算方法并形成运算思路的过程中感悟数形结合、分类讨论、整体化归等思想方法的指引作用.此



数学运算素养的习得不以片面追求运算速度为目的,而应在“算得对”的基础上从“算得快”走向“算得好”,关注运算过程中思维的训练与经验的生成。事实上,学生数学运算素养的发展是四个维度共同作用的结果,其中“思维与表达”反映的是数学的认知活动,帮助学生学会数学地思考;“交流与反思”涉及数学素养的元认知和情感层面,要求学生主动监控、检验、调整和评估自己的思维过程^[11]。然而两版教材中例习题的数学运算素养在上述两个维度体现不够,相关研究也表明学生在测试中表现出较弱的思维与表达^[20]。这就要求教师在运算教学中时刻强化学生对运算过程的监控,以问题导向帮助学生及时调整运算策略,寻求过程最优化的运算方法。运算问题的解决并不意味着运算思维活动的结束^[17],对运算结果的检验是数学运算必不可少的环节。虽然教材中例习题涉及交流与反思很少,但教师可以设计学生展示、同伴交流等课堂活动,在借助运算及其结果阐释问题的过程中促使学生深入思考运算过程及结果的合理性和严谨性。经验的积累是学习体验获得结构化改造的过程,学生只有亲身经历完整的运算活动,及时监控与反思运算过程及结果,才能逐渐积累运算经验并不断修正再生,内化为数学运算素养。

- [1] 章建跃.高中数学教材落实核心素养的几点思考[J].课程·教材·教法,2016,36(07):44-49.
- [2] 中华人民共和国教育部制定.普通高中数学课程标准:2017年版2020年修订[M].北京:人民教育出版社,2020.5:90-91.
- [3] 谢永清.高中生“数学运算”素养的落地之策[J].当代教育与文化,2018,10(03):81-84.
- [4] 人民教育出版社,课程教材研究所,中学数学课程教材

- [5] 人民教育出版社,课程教材研究所,中学数学课程教材研究开发中心编著.普通高中教科书·数学·必修第一册:A版[M].北京:人民教育出版社,2019.6:1-161.
- [6] 上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会组织编写.普通高中教科书·数学·必修第一册[M].上海:上海教育出版社,2020.1:1-143.
- [7] 徐建平,张厚粲.质性研究中编码者信度的多种方法考察[J].心理科学,2005(06):152-154.
- [8] 董奇.心理与教育研究方法(修订版)[M].北京:北京师范大学出版社,2004.8(2016.7重印):271.
- [9] 韩琪.当前高中数学教材对于数学运算素养支持情况调查研究[D].济南:山东师范大学,2020.
- [10] 石志群.对数学核心素养几个问题的思辨[J].教育研究与评论(中学教育教学),2016(11):15-21.
- [11] 郭玉峰,段欣慰,孙艳.数学运算素养的理解与商榷[J].中国数学教育,2019(20):3-8.
- [12] 史宁中,王尚志主编;教育部基础教育课程教材专家工作委员会组织编写.普通高中数学课程标准(2017年版)解读[M].北京:高等教育出版社,2018.5:127,263.
- [13] 辛民.高三学生数学运算能力的现状调查、分析、思考与建议[J].中学数学,2017(21):29-32.
- [14] 张夏雨.从PME视角看数学运算素养及其培养[J].教育研究与评论(中学教育教学),2017(02):25-29.
- [15] 李昌官.数学运算素养及其培养[J].数学通讯,2019(18):1-5.
- [16] 杭毅,侯正永.基于质量监测的初中学生数学运算发展状况的调查研究[J].数学教育学报,2017,26(01):25-27.
- [17] 周承贵.浅谈运算能力及其培养[J].广西大学学报(哲学社会科学版),1999(S2):64-66.
- [18] 来丽莹.正确认识,深刻理解,训练有“素”,方可滋“养”——对“数学运算”核心素养的思考[J].中学数学,2019(21):6-7.
- [19] 王尚志,吕世虎,胡凤娟.普通高中课程标准(2017年版2020年修订)教师指导:数学[M].上海:上海教育出版社,2020.9:169.
- [20] 闫佳洁,郭玉峰,张定强.基于测试的高中生数学运算素养水平现状调查[J].教育理论与实践,2021,41(05):56-58.

26