



聚焦思维品质 优化解题教学

福建省上杭县第一中学(364200) 李丽萍

[摘要] 数学解题教学的关键是提高学生的思维能力,而思维品质是思维能力的集中表现。聚焦思维品质,优化数学解题教学,对提升数学解题教学质量大有裨益。

[关键词] 思维品质;解题教学;思维能力

[中图分类号] G633.6 [文献标识码] A [文章编号] 1674-6058(2023)05-0004-03

数学解题教学是指教师以数学问题为载体,引导学生探究问题解决的基本规律,发现解题的一般方法的教学过程。解题教学不能只关注求解的“结果”,应从“教解题”向“教想法”转变,让学生学会思考,提高思维能力。聚焦思维品质,优化解题教学,对提升数学解题教学质量大有裨益。

一、问题驱动,让思维更加深刻

思维的深刻性即思维活动的深广度,是思维品质培养的立足点和突破口。思维的深刻性主要表现在善于透过问题表象,揭示问题的内在本质和规律,成熟而又老练地掌握解决问题的一般方法。在解题教学中,教师可通过设置系列问题驱动学生深入思考。在好问题的引领下,学生的思维会更加深刻。

[例1] 函数 $f(x) = x^3 - 2x + e^x - \frac{1}{e^x}$, 满足 $f(a-1) + f(2a^2) \leq 0$, 求实数 a 的取值范围。

问题1(理解问题):这是一个什么问题?你学过哪些可求实数 a 的取值范围的方法?(该问题有助于学生理解字母 a 是一个有别于常量与变量的参数)

问题2(理解条件):题中给出了哪几个条件?(该问题有助于学生明白哪些条件可用于推理)

问题3(理解关系):求实数 a 的取值范围会受到哪些因素的制约?(该问题有助于学生弄清条件与结论之间的关系)

问题4:函数值怎样限制自变量的取值?(该问题有助于学生分析函数的单调性)

问题5:函数值的限制有何规律?(该问题有助于引导学生研究不等式的性质)

问题6:题中的函数有何特点?(该问题便于引导学生发现确定制约条件的方法)

问题7:你能获得怎样的解题思路?(该问题有

助于引导学生探寻可能的解题路径)

在解题教学中,有些教师常会预设过度,千方百计地让学生按照自己的方法去推理和解题,严重影响了学生思维的深刻性。上述系列问题的设计具有一般思维的特点,不完全是解决某一问题的思维方式,而是一种通用思维,通过反推影响参数范围的各种约束条件,最终让问题获得解决。这种思维的训练,有助于学生掌握分析问题的方法,抓住问题涉及的主要知识和函数的单调性、奇偶性等核心概念,不论解题是否成功,对提高学生思维的深刻性都具有重要的作用。

二、多解多变,让思维更为灵活

思维的灵活性即思维活动的智力灵活程度,是学生创新能力的关键点。思维的灵活性主要表现在善于根据客观条件的发展与变化规律,灵活地改变原有的方法与途径去解决问题。在解题教学中,教师要注意从思维起点、思维过程、思维迁移等角度深入了解学生思考问题的特点及思维发展状况,为学生的思维训练提供合理的素材与良好的条件,让学生的思维更为灵活。

[例2] 在 $\triangle ABC$ 中,角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c , 且 $b^2 - c^2 = a^2 - ac$ 。

(1)求角 B 的值;

(2)当 $b = 2\sqrt{3}$ 时,求 $\sin A + \sin C$ 的取值范围。

解:(1)由余弦定理可得 $B = 60^\circ$ 。

对于(2),有如下解法。

解法一:转化为角,凸显函数思想。将 $\sin A + \sin C$ 表示为关于角 A 的三角函数式,根据角的取值范围,可得 $\sin A + \sin C = \sqrt{3} \sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right)$ 的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right]$ 。

此解法将解三角形问题和三角函数的图象与



性质相结合,这其中函数思想起了关键作用。

解法二:转化为边,体现边角和谐统一。因为 b 与角 B 是对边对角关系,所以通过正弦定理可得 $\sin A + \sin C = \frac{a+c}{4}$,将问题变为“已知 $12 = c^2 + a^2 - ac$ 求 $a+c$ 的取值范围”,利用 $c^2 + a^2 - ac$ 和 $a+c$ 三者之间的关系,根据基本不等式可得 $12 = c^2 + a^2 - ac \geq \frac{(a+c)^2}{4}$,即 $a+c \leq 4\sqrt{3}$,当且仅当 $a=c$ 时取等号,再结合三角形的三边关系定理得 $a+c > 2\sqrt{3}$,从而得 $\sin A + \sin C$ 的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right]$ 。借助基本不等式将等式转化为不等式是此解法的关键。

变式一:若 $b = 2\sqrt{3}$, $\triangle ABC$ 为锐角三角形,求 $\sin A + \sin C$ 的取值范围。

变式二:若 $b = 2\sqrt{3}$,求 $a^2 + c^2$ 的最大值。

变式三:若 $b = 2\sqrt{3}$,求 ac 的最大值。

变式四:若 $b = 2\sqrt{3}$,求 $S_{\triangle ABC}$ 的最大值。

变式五:若 $b = 2\sqrt{3}$,求三角形的高 BD 的最大值。

对于同一问题,思维切入方式、思考过程不同,往往会得到不一样的结果,而采用多种思维切入方式能有效促使学生整合知识和发散思维,使学生充分体验问题解决方式的多样性。根据问题编制背景进行一题多变,让学生思维迁移,能开阔学生解决问题的视野,揭示问题精髓,挖掘问题之源,引导学生灵活地掌握知识的纵横联系,培养思维的灵活性。

三、整体感知,让思维更加敏捷

思维的敏捷性即思维活动中表现出来的时间维度,也就是在思考问题时,能周密而迅速地获得结果。思维的敏捷性主要表现为联想的迅速性、操作的快速性、表达的流畅性等。在解题教学中,教师要善于引导学生从整体上思考问题,迅速抓住问题的本质和规律,把握问题类型,形成思想方法。

[例3] 函数 $f(x) = x^3 - 2x + e^x - \frac{1}{e^x}$, 满足 $f(a-1) + f(2a^2) \leq 0$, 求实数 a 的取值范围。

该题如果按例1的问题进行思考和分析,对提高学生思维的深刻性的确有帮助,但难以提高学生思维的敏捷性。若能对此问题进行宏观理解和整

体领悟,那么该问题就呈现为求在约束条件下的参数取值范围问题,便能迅速将条件具体化,形成总体思路。针对形式是两个函数值和的不等式问题,可选择求差法或求导法获解。

解:因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 又 $f(-x) = -x^3 + 2x - e^x + \frac{1}{e^x} = -f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 为奇函数, 又 $f'(x) = 3x^2 - 2 + e^x + \frac{1}{e^x} \geq 3x^2 \geq 0$, 且 $f'(x) = 0$ 不恒成立, 故函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数。由 $f(a-1) + f(2a^2) \leq 0$ 得 $f(a-1) \leq -f(2a^2) = f(-2a^2)$, 即 $a-1 \leq -2a^2$, 所以 $a \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$ 。

上述解法通过整体感知,联想相关概念及原理,不仅快速获解,而且表达简约。让学生抓住问题的本质和规律,用整体思考的方法,是培养学生数学思维品质的好策略。

四、反思总结,提升思维的批判性

思维的批判性即敢于对解题结果或方法发表自己的看法或评价,包括思维过程中洞察、分析和评估的过程。具有思维批判性的学生主要表现为能对自己的思维进行改进,对现有解法进行归纳总结,对已有结论进行验证,对出现的错误进行反思。在解题教学中,要提高学生思维的批判性,就要让学生切实理解数学核心知识,在解题过程的反思中积累基本经验,尤其要对数学思想方法进行深刻体悟。

[例4] 若函数 $f(x) = 4\cos\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)\sin \omega x + \cos 2\omega x (\omega > 0)$ 。

(1) 求函数 $f(x)$ 的值域;

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上为增函数, 求 ω 的最大值。

解:(1) 由已知化简可得 $f(x) = \sqrt{3}\sin 2\omega x + 1$, 因为 $\sin 2\omega x \in [-1, 1]$, 所以函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\right]$ 。

(2) 因为 $f(t) = \sin t$ 的增区间为 $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$, 令 $t = 2\omega x$, 则 $2\omega x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, 求得 $x \in \left[\frac{k\pi}{\omega} - \frac{\pi}{4\omega}, \frac{k\pi}{\omega} + \frac{\pi}{4\omega}\right]$, 由条件可知



$\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \subseteq \left[\frac{k\pi}{\omega} - \frac{\pi}{4\omega}, \frac{k\pi}{\omega} + \frac{\pi}{4\omega}\right]$ 对某些 $k \in \mathbb{Z}$ 成

立, 令 $k=0$ 得 $\begin{cases} -\frac{3\pi}{2} \geq -\frac{\pi}{4\omega}, \\ \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4\omega}, \end{cases}$ 所以 $\omega \leq \frac{1}{6}$, ω 的最大

值为 $\frac{1}{6}$ 。

本题可以引导学生从三个角度进行反思总结。从问题理解的角度看, 该题是含参的复合函数问题, 求值域和参数的最大值均能通过函数极值获解。根据三角函数的有界性可知, 极值一定存在, 题中 $\omega > 0$ 让问题变得简单。从求解方法的角度看, 可通过化简利用三角函数的图象与性质求解, 也可以利用导数法获解, 且更有一般性。从过程评价的角度看, 解答过程不够简洁, 若能根据要求直接构建不等关系式, 问题的解答更为自然、合理。通过上述反思, 让学生悟透推理的严谨性和答题的规范性, 了解有无思维回路, 有无简化或变换的途径。尤其要重视学生对错解的反思, 让其知道为什么错, 怎样改正, 不断提升学生思维的批判性。

五、自我调节, 让思维更显独立

思维的独立性即能够依据所求问题信息的变化对思维过程进行自主调节的能力, 是创造性解决问题必须具备的思维品质, 它取决于思维的灵活性。具有思维独立性的学生, 主要表现为具有突破传统解题思维约束的能力善于挖掘问题隐含的内在关系, 发现问题的本质, 能够有的放矢地转化解题方法。在解题教学中, 教师若能从题目解读、方法运用、过程监控和自我反思等方面引导学生进行自我调节, 对提高学生思维的独立性很有帮助。

例如, 针对例4第(2)问的解题过程, 教师可指导学生从以下三个角度进行思维调节。

(一)思路调节

学生解题通常是从自己的最近发展区出发, 寻找问题的突破口, 但最容易想到的解题方法并非是最优的解题方法, 往往需要进行调整。比如有些学生一遇到求极值立刻想到导数法, 然而求导后的代数式变形复杂, 容易出现解题错误, 对此教师有必要引导学生调整为通过三角函数恒等变换的途径

获解, 或者利用数形结合的方法进行值域估算, 再探索特殊解法或验证前面的方法等。

(二)情绪调节

学生在解题时常常会因为问题的抽象性、转化的局限性和运算的复杂性而产生畏难情绪, 因此教师有必要对他们进行情绪上的调节。如该题通常能够利用简化策略来削弱思维障碍对学生情绪的负面作用。先利用数形结合方法作出函数的图象, 促进学生对问题的理解和感悟, 再对函数表达式变形, 以减少条件限制, 让问题得到简化, 接着探究如何解决增加条件后的问题。利用这些方法实现情绪调节目标。

(三)过程调节

解题过程的表达既要有逻辑性, 又要注意简洁性; 既可以利用文字表述, 也可以利用符号表述; 既可以采用归纳推理的方式, 也可以采用演绎推理的方式。如例4第(2)问提供的解题过程是从正弦函数定义出发, 根据函数增区间的要求获得参数需要满足的条件。但这种过程表达涉及三角函数的周期性, 相对比较烦琐, 若直接从问题条件出发, 通过“函数 $f(x)$ 为增函数”与其对应的“导函数 $f'(x) \geq 0$ ”的关系, 则可直接获得参数限制的不等式, 从而大大简化解题过程的表述。在解题过程中, 学生会因各种因素的影响而产生解题偏差, 教师有必要引导学生对自己的解题方向、解题方法、解题方案等进行及时有效的调整。

思维的各种品质是一个密不可分的整体, 它们相互促进、相互补充。学生思维品质的培养不能一蹴而就, 教师要在日常教学实践中, 坚持以学生为主体, 引导学生充分发掘问题内涵, 把问题用活、用深、用够。

[参 考 文 献]

- [1] 李浩然. 在生成性追问中提升学生的数学思维品质[J]. 中学教学研究, 2018(10): 1-4.
- [2] 张彬政. 学科核心素养理念下提升高中生数学思维品质的教学策略[J]. 数学教学通讯, 2022(12): 38-39.

(责任编辑 黄桂坚)