DA 上找一点 $Q(2,y)$，使 $|AC|=2|QC|$，则 $y=\dfrac{1+\frac{1}{3}\times 3}{1+\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}$，即 $Q(2,\dfrac{3}{2})$，于是 $|\vec{c}-\vec{a}|+2|\vec{c}-\vec{b}|=|\overrightarrow{AC}|+2|\overrightarrow{BC}|=2(|\overrightarrow{QC}|+|\overrightarrow{BC}|)\geqslant 2|BQ|=2\sqrt{(2-0)^2+(\dfrac{3}{2}-2)^2}=\sqrt{17}$.

例 3 已知平面向量 $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$，$|\vec{x}|=\dfrac{1}{2}|\vec{y}|=|\vec{z}|=\vec{x}\cdot\vec{y}=1$，则 $\left|\dfrac{1}{2}\vec{x}+\vec{z}\right|+\dfrac{1}{2}|\vec{y}-\vec{z}|$ 的取值范围是________.

分析：设 $\vec{x},\vec{y}$ 的夹角为 θ，$|\vec{x}|=\dfrac{1}{2}|\vec{y}|=|\vec{z}|=\vec{x}\cdot\vec{y}=1$，可知 $\cos\theta=\dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|}=\dfrac{1}{2}$，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$. 如图 4，由题可设 $\vec{x}=\overrightarrow{OA}=(1,0)$，

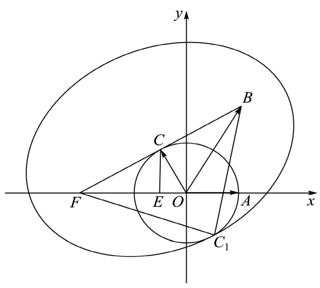

图 4

$\vec{y}=\overrightarrow{OB}=(1,\sqrt{3})$，$\vec{z}=\overrightarrow{OC}$，其中 O 为原点，C 在单位圆上，记 $E\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$，圆 O 与 x 轴交点 $A_1(-1,0)$，$A(1,0)$，设 $F(x_0,0)$ 且 $\dfrac{1}{2}|CF|=|CE|$，把所求的模的和转化成 $\left|\dfrac{1}{2}\vec{x}+\vec{z}\right|+\dfrac{1}{2}|\vec{y}-\vec{z}|=|-\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OC}|+\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{EC}|+\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{CB}|=\dfrac{1}{2}(|CF|+|CB|)$，过点 C 且系数相等的两条线段长度之和，则 $\mu=\dfrac{1-2}{1+2}=-\dfrac{1}{3}$，$x_0=\dfrac{-1-\frac{1}{3}\times 1}{1-\frac{1}{3}}=-2$，所以点 $F(-2,0)$. 于是 $\left|\dfrac{1}{2}\vec{x}+\vec{z}\right|+\dfrac{1}{2}|\vec{y}-\vec{z}|=\dfrac{1}{2}(|CF|+|CB|)\geqslant\dfrac{1}{2}|BF|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(1+2)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{3}$，此时直线 BF 与圆 O 相切，切点即为 C 点. 当 C 在 $C_1(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ 位置时，因为 $|BF|=2\sqrt{3}$，$|C_1B|+|C_1F|=2\sqrt{7}$，且 $2\sqrt{7}>2\sqrt{5}$，由椭圆定义可知，此时 C_1 在以 B,F 为焦点的椭圆上，当 C 在单位圆上其他位置时，C 也在椭圆内部，所以 $(|CB|+|CF|)$ 的最大值为 $|C_1B|+|C_1F|=2\sqrt{7}$，即 $\dfrac{1}{2}(|CF|+|CB|)\leqslant\sqrt{7}$. 所以 $\left|\dfrac{1}{2}\vec{x}+\vec{z}\right|+\dfrac{1}{2}|\vec{y}-\vec{z}|\in[\sqrt{3},\sqrt{7}]$.

从这两个例题可以看到，求两向量的模之和就是求两条线段的长度之和，如果模的系数不等，可以考虑利用阿波罗尼斯圆的逆向问题转化成系数相等，在转化时可以结合图形，合理选择 $|PA|=\lambda|PB|$，还是 $\dfrac{1}{\lambda}|PA|=|PB|$，除了位置互换外，求得 μ 对结果没有影响，却能使后续的计算有直观的几何意义.

逆向思维有利于破除思维定势，有利于认识数学问题的本质，是创新思维的一种形式；从数学核心素养上讲，阿波罗尼斯圆逆向探究是建立新的数学模型，使数学问题从数学抽象，经过数学推理，易于直观想象.

一道联考测试题的探究与拓展

福建省宁德市高级中学 (352000) 连其秀

题目 已知圆 $O:x^2+y^2=5$，椭圆 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1,F_2，过 F_1 且垂直于 x 轴被椭圆和圆所截得弦长分别为 1 和 $2\sqrt{2}$. (1) 求椭圆 Γ 的方程；(2) 如图 1，P 为圆 O 上任意一点，过 P 分别作椭圆两条切线切椭圆于 A,B 两点. (i) 若直线 PA 的斜率为 2，求直线 PB 的斜率；(ii) 作 $PQ\perp AB$ 于点 Q，求证：$|QF_1|+|QF_2|$ 为定值.

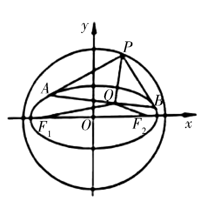

图 1

本题是安徽省六校教育研究会 2021 届高三联考能力测试(理)试题第 20 题，其答案是：(1) 椭圆

Γ 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；(2)(i)直线 PB 的斜率为 $-\frac{1}{2}$；(ii) $|QF|+|QF_2|$ 为定值 $\frac{8}{\sqrt{5}}$. 其中破解(2)的(i)、(ii)的关键步骤分别是求得直线 PA,PB 的斜率之积 $k_1k_2=-1$，及点 Q 的轨迹为与椭圆 Γ 有公共焦点的椭圆 $\frac{5x^2}{16}+5y^2=1$. 观察圆 O：$x^2+y^2=5$ 和椭圆 Γ：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，发现 $5=4+1$.

我们不禁要问：对于一般的圆 O：$x^2+y^2=a^2+b^2$ 和椭圆 Γ：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，直线 PA,PB 的斜率之积 $k_1k_2=$? 点 Q 的轨迹是否为与椭圆 Γ 有公共焦点的椭圆?

经探究，可得如下推论：

结论 1　已知圆 O：$x^2+y^2=a^2+b^2$，椭圆 Γ：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$P$ 为圆 O 上任意一点，过 P 分别作椭圆 Γ 两条切线切 Γ 于 A,B 两点. (1)则 $PA\perp PB$；(2)作 $PQ\perp AB$ 于点 Q，则点 Q 的轨迹为与椭圆 Γ 有公共焦点的椭圆 $\frac{(a^2+b^2)x^2}{a^4}+\frac{(a^2+b^2)y^2}{b^4}=1$.

证明：设 $P(x_0,y_0)$(x_0,y_0 不同时为零)，若切线 PA,PB 的斜率 k_1,k_2 有一个不存在，不妨设 k_1 不存在，则点 P 在圆 O 上 $\Rightarrow x_0^2=a^2,y_0^2=b^2\Rightarrow k_2=0\Rightarrow PA\perp PB$(易知反之也成立)；若 k_1,k_2 均存在，设过点 P 的切线的方程为 $y=k(x-x_0)+y_0$，代入椭圆 Γ 的方程，得 $b^2x^2+a^2(kx+y_0-kx_0)^2-a^2b^2=0$，整理得 $(a^2k^2+b^2)x^2+2a^2k(y_0-kx_0)x+a^2[(y_0-kx_0)^2-b^2]=0$. 其判别式 $\Delta=[2a^2k(y_0-kx_0)]^2-4(a^2k^2+b^2)\cdot a^2[(y_0-kx_0)^2-b^2]=4a^2[a^2k^2(y_0-kx_0)^2-(a^2k^2+b^2)(y_0-kx_0)^2+b^2(a^2k^2+b^2)]=-4a^2b^2[(y_0-kx_0)^2-(a^2k^2+b^2)]=-4a^2b^2[(x_0^2-a^2)k^2-2x_0y_0k+y_0^2-b^2]$，又由 $\Delta=0$ 得 $(x_0^2-a^2)k^2-2x_0y_0k+y_0^2-b^2=0$. 据韦达定理得 $k_1k_2=\frac{y_0^2-b^2}{x_0^2-a^2}$. 则点 P 在圆 O 上 $\Rightarrow x_0^2+y_0^2=a^2+b^2\Rightarrow y_0^2-b^2=-(x_0^2-a^2)\Rightarrow k_1k_2=-1\Rightarrow PA\perp PB$(易知反之也成立). 综上，(1)得证.

设 $Q(x,y)$，由点 $P(x_0,y_0)$，易得直线 AB 的方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$. 当 $x_0y_0\neq 0$ 时，其斜率为 $-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$. 又由 $PQ\perp AB$ 可得直线 PQ 的方程为 $y=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}\cdot(x-x_0)+y_0$. 与直线 AB 的方程联立，可得 $y=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}\cdot(\frac{a^2b^2-a^2y_0y}{b^2x_0}-x_0)+y_0=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}\cdot\frac{b^2(a^2-x_0^2)-a^2y_0y}{b^2x_0}+y_0=\frac{a^2y_0(a^2-x_0^2)}{b^2x_0^2}-\frac{a^4y_0^2y}{b^4x_0^2}+y_0=\frac{a^4+(b^2-a^2)x_0^2}{b^2x_0^2}\cdot y_0-\frac{a^4y_0^2y}{b^4x_0^2}\Rightarrow(1+\frac{a^4y_0^2}{b^4x_0^2})y=\frac{(b^2-a^2)x_0^2+a^4}{b^2x_0^2}\cdot y_0\Rightarrow y=\frac{b^4x_0^2}{b^4x_0^2+a^4y_0^2}\cdot\frac{(b^2-a^2)x_0^2+a^4}{b^2x_0^2}\cdot y_0=\frac{b^2y_0[(b^2-a^2)x_0^2+a^4]}{b^4x_0^2+a^4y_0^2}$. 又由点 $P(x_0,y_0)$ 在圆 O 上 $\Rightarrow x_0^2+y_0^2=a^2+b^2\Rightarrow y_0^2=a^2+b^2-x_0^2\Rightarrow y=\frac{b^2y_0[(b^2-a^2)x_0^2+a^4]}{b^4x_0^2+a^4(a^2+b^2-x_0^2)}=\frac{b^2y_0[(b^2-a^2)x_0^2+a^4]}{(b^4-a^4)x_0^2+a^4(a^2+b^2)}=\frac{b^2y_0}{a^2+b^2}$，代入 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$，可得 $x=\frac{a^2b^2-a^2y_0\cdot\frac{b^2y_0}{a^2+b^2}}{b^2x_0}=\frac{a^2(a^2+b^2-y_0^2)}{(a^2+b^2)x_0}=\frac{a^2x_0^2}{(a^2+b^2)x_0}=\frac{a^2x_0}{a^2+b^2}$. 由此可得 $x_0=\frac{(a^2+b^2)x}{a^2}$,$y_0=\frac{(a^2+b^2)y}{b^2}$. 代入 $x_0^2+y_0^2=a^2+b^2$，得 $\left[\frac{(a^2+b^2)x}{a^2}\right]^2+\left[\frac{(a^2+b^2)y}{b^2}\right]^2=a^2+b^2$，即 $\frac{(a^2+b^2)x^2}{a^4}+\frac{(a^2+b^2)y^2}{b^4}=1$(由 $x_0y_0\neq 0$ 知当 $xy\neq 0$). 这就是当 $x_0y_0\neq 0$ 时点 Q 的轨迹方程. 当 $x_0=0(y_0\neq 0)$ 或 $y_0=0(x_0\neq 0)$ 时，由点 Q 在直线 AB：$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$ 上易知 $Q(0,\frac{b^2}{y_0})$ 或 $Q(\frac{a^2}{x_0},0)$，由于 $\frac{a^2+b^2}{a^4}\cdot 0^2+\frac{a^2+b^2}{b^4}\cdot(\frac{b^2}{y_0})^2=1\Leftrightarrow 0^2+y_0^2=a^2+b^2$(由 $x_0=0$ 知其成立)，$\frac{a^2+b^2}{a^4}\cdot(\frac{a^2}{x_0})^2+\frac{a^2+b^2}{b^4}\cdot 0^2=1\Leftrightarrow x_0^2+0^2=a^2+b^2$(由 $y_0=0$ 知其成立)，故当 $x_0=0(y_0\neq 0)$ 时的 $Q(0,\frac{b^2}{y_0})$ 和 $y_0=0(x_0\neq 0)$ 时的 $Q(\frac{a^2}{x_0},0)$ 均适合上述轨迹方程. 从而得点 Q 的轨迹方程为 $\frac{(a^2+b^2)x^2}{a^4}+\frac{(a^2+b^2)y^2}{b^4}=1$. 又由 $\frac{a^4}{a^2+b^2}-\frac{b^4}{a^2+b^2}=a^2-b^2$，知该方程表示与椭圆 Γ 有公共焦点的椭圆. 综上，

(2)得证.

特别地,当 $a^2=4,b^2=1$ 时,若 $k_1=2$,则 $k_2=-\frac{1}{k_1}=-\frac{1}{2}$. 这就是上述试题(2)(i)的答案;点 Q 的轨迹方程为 $\frac{5x^2}{16}+5y^2=1$,易知其表示的椭圆与椭圆 Γ 有公共焦点,可得 $|QF|+|QF_2|=2\sqrt{\frac{16}{5}}=\frac{8}{\sqrt{5}}$. 这就是上述试题(2)(ii)的答案. 顺便指出,由结论 1(1)的证明过程易知其逆命题也成立. 特别地,当 $a^2=9,b^2=4$ 时,由此逆命题可得圆 O 即点 P 的轨迹方程为 $x^2+y^2=13$. 这就是 2014 年全国高考广东卷(理)20(2)的答案;若动点 P 为椭圆 C:$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 外一点,且点 P 到椭圆 C 的两条切线相互垂直,求点 P 的轨迹方程.

类似地,可得

结论 2　已知圆 $O:x^2+y^2=a^2-b^2$,双曲线 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,$P$ 为圆 O 上任意一点,过 P 分别作双曲线 Γ 的两条切线切 Γ 于 A,B 两点. 则(1) $PA\perp PB$;(2)作 $PQ\perp AB$ 于点 Q,则点 Q 的轨迹为与双曲线 Γ 有公共焦点的椭圆 $\frac{(a^2-b^2)x^2}{a^4}+\frac{(a^2-b^2)y^2}{b^4}=1$.

结论 3　已知直线 $l:x=-\frac{p}{2}$,抛物线 $\Gamma:y^2=2px(p>0)$,P 为直线 l 上任意一点,过 P 分别作抛物线 Γ 的两条切线切 Γ 于 A,B 两点.(1)则 $PA\perp PB$;(2)作 $PQ\perp AB$ 于点 Q,则点 Q 为抛物线 Γ 的焦点 $(\frac{p}{2},0)$.

证明:设 $P(x_0,y_0)$,由点 P 在直线 l 上,易知切线 PA,PB 的斜率 k_1,k_2 均存在. 设过点 $P(x_0,y_0)$ 的切线的方程为 $y=k(x-x_0)+y_0$,代入抛物线 Γ 的方程,得 $(kx+y_0-kx_0)^2-2px=0$,整理得 $k^2x^2+2[k(y_0-kx_0)-p]x+(y_0-kx_0)^2=0$. 其判别式 $\Delta=4[k(y_0-kx_0)-p]^2-4k^2(y_0-kx_0)^2=4p[-2k(y_0-kx_0)+p]=4p(2x_0k^2-2y_0k+p)$. 又由 $\Delta=0$ 得 $2x_0k^2-2y_0k+p=0$. 据韦达定理可得 $k_1k_2=\frac{p}{2x_0}$. 又由点 $P(x_0,y_0)$ 在直线 $l:x=-\frac{p}{2}$ 上 $\Rightarrow x_0=-\frac{p}{2}\Rightarrow k_1k_2=-1\Rightarrow PA\perp PB$.(1)得证.

由点 P 在直线 $l:x=-\frac{p}{2}$ 上,可设 $P(-\frac{p}{2},y_0)$,易知直线 AB 的方程为 $y_0y=p(x-\frac{p}{2})$. 当 $y_0\neq 0$ 时,其斜率为 $\frac{p}{y_0}$. 又由 $PQ\perp AB$ 可得直线 PQ 的方程为 $y=-\frac{y_0}{p}\cdot(x+\frac{p}{2})+y_0$,即 $y=-\frac{y_0x}{p}+\frac{y_0}{2}$. 与直线 AB 的方程 $y_0y=p(x-\frac{p}{2})$ 联立,得 $y_0(-\frac{y_0x}{p}+\frac{y_0}{2})=p(x-\frac{p}{2})\Rightarrow(p+\frac{y_0^2}{p})x=\frac{y_0^2}{2}+\frac{p^2}{2}\Rightarrow x=\frac{p}{2}$,即点 Q 的横坐标 $x=\frac{p}{2}$. 进而可得点 Q 的纵坐标 $y=0$. 故点 Q 为抛物线 Γ 的焦点 $(\frac{p}{2},0)$. 当 $y_0=0$ 即 $P(-\frac{p}{2},0)$ 时,结论显然成立. 综上,(2)得证.

高观点下探寻多边形的内角和与外角和

广东省深圳市南山外国语学校(集团)科华学校　(518000)　叶　莹

三角形的内角和是一个重要的几何量,在欧几里得几何学中,三角形的内角和为 180 度. 在证明这一定理的时候,中学教科书[1]采用的方法是这样的:首先过三角形的某一个顶点作与对边平行的辅助线,再利用内错角相等得到三角形的内角和为 180 度. 而内错角相等需要利用欧几里得几何的两条公理:同位角相等和对顶角相等. 由此可见,为了证明三角形的内角和为 180 度,需要两条公理. 中学课本证明完三角形的内角和为 180 度以后,再利用内角和外角互补的关系,得到外角和为 360 度.

在讲完三角形的内角和与外角和以后,中学教材便开始讲凸多边形的内角和,课本中的讲法通常是这样的:从凸多边形的某个顶点出发,可以作 $(n-3)$ 条对角线,从而把多边形分成了 $(n-2)$ 个三