



对 2023 年高考一道函数与导数压轴题的思考

安徽省太湖中学 246400 李昭平 陈俊国

【摘要】 函数与导数中的参数范围问题一直是高考考查的热点题型,并常常居于压轴题的位置.现对 2023 年高考一道函数与导数压轴题进行思考,通过试题分析、提炼结论、运用升华来强化理解、拓展思维、发展能力.

【关键词】 2023 高考题;简捷解法;总结规律;学以致用

1 试题分析

(1) 证明:当 $0 < x < 1$ 时, $x - x^2 < \sin x < x$;

(2) 已知函数 $f(x) = \cos ax - \ln(1 - x^2)$.

若 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点,求实数 a 的取值范围.

(2023 年全国新高考 II 卷第 22 题)

本题第(1)问利用两次构造函数,通过研究新函数的单调性获证,为第(2)问准备,比较常规.第(2)问则是“函数 $f(x) = \cos ax - \ln(1 - x^2)$ 在 $x = 0$ 为极大值点的条件下,求实数 a 的取值范围”,跳出了常见的复合型函数,而以三角函数和对数函数的复合形式出现,给人以耳目一新之感.由于含有三角函数的导数比较复杂,且 $f'(0) = 0$ 对任意实数 a 恒成立,导函数符号难以判断,参变分离法、一分为二法都失效,绝大部分学生解题陷入困境.

计算观察发现, $f'(0) = 0$, 加上条件“在 $x = 0$ 附近的左侧, $f'(x) > 0$; 在 $x = 0$ 附近的右侧, $f'(x) < 0$ ”,数形结合可知必有 $f''(0) \leq 0$. 由此出发获得下述简捷解法,称之为过定点法(数形结合法):

因为 $f'(x) = \frac{2x}{1-x^2} - a \sin ax$, 所以 $f'(0) = 0$. 又

因为 $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点,所以在 $x = 0$ 附近的左侧, $f'(x) > 0$; 在 $x = 0$ 附近的右侧, $f'(x) < 0$. 数形结合可知必有 $f''(0) \leq 0$. 因为 $f''(x) = \frac{2x^2 + 2}{(1-x^2)^2} - a^2 \cos ax$, 所以 $f''(0) = 2 - a^2 \leq 0$, $a \leq -\sqrt{2}$ 或 $a \geq \sqrt{2}$.

① 当 $a = \pm\sqrt{2}$ 时, $f'(x) = \frac{2x}{1-x^2} - \sqrt{2} \sin \sqrt{2}x$. 由

第(1)问的结论知,当 $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $\sin \sqrt{2}x < \sqrt{2}x$,

$-\sqrt{2} \sin \sqrt{2}x > -2x$.

于是 $f'(x) = \frac{2x}{1-x^2} - \sqrt{2} \sin \sqrt{2}x > \frac{2x}{1-x^2} - 2x =$

$2x \left(\frac{1}{1-x^2} - 1 \right) > 0$, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 内单增,这与 $x =$

0 是函数 $f(x)$ 的极大值点矛盾,所以 $a \neq \pm\sqrt{2}$.

② 当 $a < -\sqrt{2}$ 或 $a > \sqrt{2}$ 时, $f''(0) < 0$. 由于

$f''(x) = \frac{2x^2 + 2}{(1-x^2)^2} - a^2 \cos ax$ 在 $x = 0$ 附近连续,所以

存在 $\delta \in (0, 1)$, 使得当 $x \in (-\delta, \delta)$ 时, $f''(x) < 0$.

当 $x \in (-\delta, 0)$ 时, $f'(x) > f'(0) = 0$; 当 $x \in (0, \delta)$ 时, $f'(x) < f'(0) = 0$. 满足 $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点.

综上所述,实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

2 提炼结论

对于某些函数的单调性、极值、最值或恒成立不等式中的参数范围问题,若函数 $f(x)$ (或 $f'(x)$, $f''(x)$ 等) 满足 $f(m) = 0$ (或 $f'(m) = 0$, $f''(m) = 0$ 等),即函数 $f(x)$ (或 $f'(x)$, $f''(x)$ 等) 的图象恒过 x 轴上的定点 $(m, 0)$, 再利用其他条件往往可以数形结合确定 $f'(m)$ (或 $f''(m)$, $f'''(m)$ 等) 的符号(非负或非正),由此来确定参数 a 的取值范围(必要条件),然后验证这个“必要条件”也是“充分条件”或验证这个“必要条件的一个子集”是“充分条件”,如此就会避免一些繁杂的运算和讨论,快速实现解题目标.我们常常戏称此为“函数具有过定点 $(m, 0)$ 情结”,利用这种解题思路,具有较高的思维价值、实用价值和速度价值^[1].

3 运用升华

3.1 处理函数的单调性问题

例 1 (2016 全国 I 卷第 12 题) 若函数 $f(x) =$



$x - \frac{1}{3}\sin 2x + a\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调递增, 则实数 a 的取值范围是().

- A. $[-1, 1]$
- B. $\left[-1, \frac{1}{3}\right]$
- C. $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$
- D. $\left[-1, -\frac{1}{3}\right]$

解析 因为 $f(0)=0$, 且在 $(-\infty, +\infty)$ 内 $f(x)$ 单调递增, 所以 $f'(0) \geq 0$.

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{3}\cos 2x + a\cos x, f'(0) = 1 - \frac{2}{3} + a \geq 0, a \geq -\frac{1}{3}.$$

立即排除 A, B, D, 故选 C.

注 利用函数 $f(x)$ 过定点 $(0, 0)$, $f(0)=0$, $f'(0) \geq 0$, 这比解恒成立不等式“ $f'(x) = 1 - \frac{2}{3}\cos 2x + a\cos x \geq 0$ ”求参数 a 的范围简单得多.

例 2 (2023 年南昌市模考题) 若函数 $f(x) = x + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\sin 2x + a\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调递增, 则实数 a 的取值范围是().

- A. $[-2, 2]$
- B. $\left[-2, \frac{4}{3}\right]$
- C. $\left[-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right]$
- D. $\left[-2, -\frac{4}{3}\right]$

解析 $f'(x) = 1 - \frac{2}{3}\cos 2x - a\sin x$. 因为 $f(-\frac{\pi}{2})=0$, 且在 $(-\infty, +\infty)$ 内 $f(x)$ 单调递增, 所以 $f'(-\frac{\pi}{2}) \geq 0$, 即 $1 + \frac{2}{3} + a \geq 0, a \geq -\frac{5}{3}$. 立即排除 A, B, D, 故选 C.

注 利用函数 $f(x)$ 过定点 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 情结, $f(-\frac{\pi}{2})=0, f'(-\frac{\pi}{2}) \geq 0$, 这比解恒成立不等式“ $f'(x) = 1 - \frac{2}{3}\cos 2x - a\sin x \geq 0$ ”求参数 a 的范围简单得多.

3.2 处理函数的极值问题

例 3 (2022 年武汉市模考题) 设函数 $f(x) = (2 + ax)\ln(1 + x) - 2x (a \in \mathbf{R})$.

(1) 令 $g(x) = f'(x)$, 试讨论函数 $g(x)$ 的单调性;

(2) 若 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点, 求 a 的取值范围.

解析 (1) 略去;

(2) 易知 $g(0)=0$, 且由题意知, 在 $x=0$ 附近的左侧, $g(x) < 0$; 在 $x=0$ 附近的右侧, $g(x) > 0$. 所以 $g'(0) \geq 0$.

$$\text{因为 } g(x) = a\ln(1+x) + \frac{(a-2)x}{1+x}, g'(x) = \frac{a}{1+x} + \frac{a-2}{(1+x)^2} = \frac{ax+2a-2}{(1+x)^2}.$$

$$\text{所以 } g'(0) = \frac{0+2a-2}{(1+0)^2} \geq 0, \text{ 解得 } a \geq 1.$$

$$\text{① 当 } a=1 \text{ 时, } f'(x) = g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}.$$

$$\text{由 } \ln x \leq x-1 \text{ 得, } \ln \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+x} - 1,$$

$$\ln(1+x) \geq \frac{x}{1+x}, \text{ 所以 } f'(x) \geq 0.$$

显然 $x=0$ 不是函数 $f(x)$ 的极小值点, 因此 $a \neq 1$.

② 当 $a > 1$ 时, $g'(0) > 0$. 由于 $g'(x) = \frac{ax+2a-2}{(1+x)^2}$ 在 $x=0$ 附近连续, 所以存在 $\delta \in (0, 1)$, 使得当 $x \in (-\delta, \delta)$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $x \in (-\delta, 0)$ 时, $g(x) < g(0)=0$, 当 $x \in (0, \delta)$ 时, $g(x) > g(0)=0$, 满足 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点.

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $(1, +\infty)$.

注 利用函数 $g(x) (f'(x))$ 过定点 $(0, 0)$ 情结, $g(0)=0 (f'(0)=0), g'(0) \geq 0 (f''(0) \geq 0)$, 且 $a > 1$ 是充分条件.

例 4 (2023 年石家庄市质检题) 设 $f(x) = x\ln x - ax^2 + (2a-1)x, a \in \mathbf{R}$.

(1) 令 $g(x) = f'(x)$, 求 $g(x)$ 的单调区间;

(2) 已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值, 求 a 的取值范围.

解析 (1) 略去;

$$(2) f'(x) = \ln x + 1 - 2ax + (2a-1) = \ln x - 2a(x-1).$$

因为 $f'(1)=0$, 函数 $f'(x)$ 的图象经过点 $(1, 0)$, 且由题意知在 $x=1$ 附近的左侧 $f'(x) > 0$, 在 $x=1$ 附近的右侧 $f'(x) < 0$, 所以 $f''(1) \leq 0$, 即 $1-2a \leq 0$,

$$a \geq \frac{1}{2}.$$



① 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) = \ln x - (x - 1) \leq 0$.

$f(x)$ 在 $x = 1$ 处没有极大值, 因此 $a \neq \frac{1}{2}$.

② 当 $a > \frac{1}{2}$ 时, $f''(1) < 0$. 由于 $f''(x) = \frac{1}{x} - 2a$

在 $x = 1$ 附近连续, 所以存在 $\delta \in (0, 1)$, 使得当 $x \in (1 - \delta, 1 + \delta)$ 时, $f''(x) < 0$.

当 $x \in (1 - \delta, 1)$ 时, $f'(x) > f'(1) = 0$; 当 $x \in (1, 1 + \delta)$ 时, $f'(x) < f'(1) = 0$. 满足 $f(x)$ 在 $x = 1$ 取得极大值.

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

注 利用函数 $f'(x)$ 过定点 $(1, 0)$, $f'(1) = 0$, $f''(1) \leq 0$, 且 $a > \frac{1}{2}$ 是充分条件.

3.3 处理恒成立不等式问题

例 5 (2023 年苏州市模考题) 已知函数 $f(x) = \ln(1+x) - \frac{ax}{x+2}$. 若 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

解析 因为 $f(0) = 0$, 且 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$, 所以 $f'(0) \geq 0$.

$$f'(x) = \frac{(x+2)^2 - 2a(x+1)}{(x+1)(x+2)^2}, f'(0) = \frac{4-2a}{4}$$

$$\geq 0, a \leq 2.$$

$$\text{此时 } f'(x) = \frac{(x+2)^2 - 2a(x+1)}{(x+1)(x+2)^2} \geq \frac{(x+2)^2 - 4(x+1)}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} \geq 0.$$

$f(x)$ 在 $x \geq 0$ 时单增, 因此 $f(x) \geq f(0) = 0$, 满足条件.

故 a 的取值范围是 $(-\infty, 2]$.

注 本题是常见的分式函数与对数函数的复合型函数, 考查学生熟悉的恒成立不等式问题. 学生往往运用参变分离法或一分为二法处理, 其实这两种解法都比较复杂. 利用函数 $f(x)$ 过定点 $(0, 0)$ 情结, $f(0) = 0$, $f'(0) \geq 0$, 且 $a \leq 2$ 也是充分条件, 简单快捷. 对于选择题和填空题我们还是倡导小题小做.

例 6 (2023 年皖江联盟联考) 已知函数 $f(x) = a\left(x - \frac{1}{x}\right) - \ln x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$. 若当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 _____.

解析 $f'(x) = a\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x} = \frac{ax^2 - x + a}{x^2}$,

$x > 1$. 因为 $f(1) = 0$, 函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(1, 0)$, 且 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$ 恒成立, 所以 $f'(1) \geq 0$, 即 $2a - 1 \geq 0$, $a \geq \frac{1}{2}$.

$$\text{此时 } f'(x) = \frac{ax^2 - x + a}{x^2} \geq \frac{\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}}{x^2} = \frac{(x-1)^2}{2x^2} > 0, f(x) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 内单增.}$$

因此当 $x > 1$ 时, $f(x) > f(1) = 0$, 满足条件. 故实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

注 利用函数 $f(x)$ 过定点 $(1, 0)$, $f(1) = 0$, $f'(1) \geq 0$, 且 $a \geq \frac{1}{2}$ 也是充分条件.

例 7 (2022 年哈师大附中高三诊断) 已知函数 $f(x) = (x+1)\ln x - a(x-1)$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = 4$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

解析 (1) 略去;

(2) $f'(x) = \ln x + 1 + \frac{1}{x} - a$, $x > 0$. 因为 $f(1) = 0$, 函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(1, 0)$, 且 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$ 恒成立, 所以 $f'(1) \geq 0$, 即 $2 - a \geq 0$, $a \leq 2$.

因为 $f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} > 0$, 显然 $f'(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内单增. 所以当 $x > 1$ 时, $f'(x) > f'(1) \geq 0$, 即 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内单增, 因此 $f(x) > f(1) = 0$ 恒成立, 满足条件.

故实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 2]$.

注 利用函数 $f(x)$ 过定点 $(1, 0)$ 情结, $f(1) = 0$, $f'(1) \geq 0$, 且 $a \leq 2$ 也是充分条件.

例 8 (2023 年合肥市模考题) 设函数 $f(x) = ax^2 - \ln x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$. 试确定 a 的所有可能取值, 使得 $f(x) > \frac{1}{x} - e^{1-x} + a$ 在区间 $x \in (1, +\infty)$ 内恒成立 (e 为自然对数的底数).



解析 原不等式等价于 $f(x) - \frac{1}{x} + e^{1-x} - a > 0$ 在 $x \in (1, +\infty)$ 内恒成立.

令 $g(x) = f(x) - \frac{1}{x} + e^{1-x} - a = ax^2 - \ln x - \frac{1}{x} + e^{1-x} - a$. 只需 $g(x)$ 在 $x \in (1, +\infty)$ 上恒大于 0 即可.

因为 $g(1)=0$, 且 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g(x) > 0$ 恒成立, 所以 $g'(1) \geq 0$.

由 $g'(x) = 2ax - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - e^{1-x}$ 得, $g'(1) = 2a - 1 + 1 - 1 = 2a - 1 \geq 0, a \geq \frac{1}{2}$.

(法 1) 此时, $g''(x) = 2a + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + e^{1-x} \geq 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + e^{1-x} = \frac{x^3 + x - 2}{x^3} + e^{1-x}$.

因为 $x \in (1, +\infty)$, 所以 $x^3 + x - 2 > 0$.

又 $e^{1-x} > 0$, 所以 $g''(x)$ 在 $a \geq \frac{1}{2}$ 时恒大于 0.

所以当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $g'(x)$ 在 $x \in (1, +\infty)$ 内单调递增, $g'(x) > g'(1) = 2a - 1 \geq 0$, $g(x)$ 在 $x \in (1, +\infty)$ 内单调递增. 所以 $g(x) > g(1) = 0$, 即 $g(x)$ 在 $x \in (1, +\infty)$ 内恒大于 0.

故实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

(法 2) $g'(x) = 2ax - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - e^{1-x} \geq x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-1+1} = x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2} = \frac{(x-1)(x^2 + x - 1)}{x^2} > 0$, 以下同法 1.

注 利用函数 $g(x)$ 过定点 $(1,0)$ 情结, $g(1) = 0, g'(1) \geq 0$, 且 $a \geq \frac{1}{2}$ 也是充分条件.

不难发现, 数学新高考正在加大对考生思维能力、运算能力和推理能力的考查力度, 在高度上、深度上、广度上抬高了标杆. 这既体现了数学学科的重要地位, 又体现了时代对优秀人才的需求. 因此, 对于一些具有代表性、典型性、示范性和拓展性的好高考题或好模考题, 教师要学会思考、学会发掘、学会研究, 沟通联系、变式探究、深化思维、提炼规律, 并在课堂教学中恰当运用, 不断提高学生的解题能力和数学素养^[2].

参考文献

[1] 李昭平. 函数搭台 导数唱戏[J]. 中学数学杂志, 2020 (03): 31-34.
[2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准 (2017 版 2020 年修订)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.

作者简介 李昭平 (1963—), 中学正高级教师 (3 级), 安徽省数学特级教师; 安庆市数学学会副理事长, 安庆市城镇卓越理科班导师; 曾获得安徽省“教坛新星”、安庆市数学学科带头人、安庆市先进教研个人、安庆市名师、市优秀教师、省市优秀科技辅导教师等荣誉称号, 2006 年、2014 年、2020 年获安庆市市长奖, 享受安徽省人民政府特殊津贴, 2019 年被评为安庆市首届科技英才; 发表教育教学论文 570 余篇, 在省内外进行名师交流讲座 190 多场.

陈俊国 (1986—), 中学一级教师; 安庆市数学学科带头人, 多次获省市数学优质课大赛等级奖; 发表教育教学论文 20 余篇.