

“集合的基本运算”类比教学研究

湖北武汉市第二十三中学(430050) 刘逸晴

[摘要] 类比作为重要的数学思想在中学数学教学中有着丰富的应用。以“集合的基本运算”为例,教师可以采用类比教学,在旧知识与新知识之间建立联系,实现纵向的认知推进和横向的知识迁移。

[关键词] 集合;基本运算;类比教学

[中图分类号] G633.6 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1674-6058(2023)11-0016-03

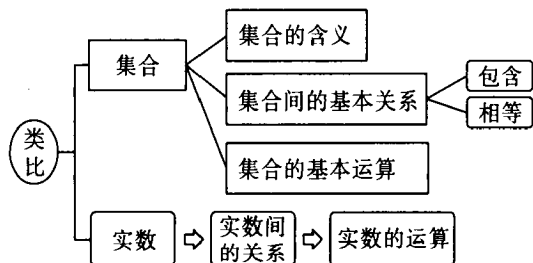
波利亚曾说:“类比的核心是关系上的相似。”从本质上看,类比即类同、类异、类推,借同化、顺应与平衡纳入认知图式,进而探索元素、对象、系统之间的内在关系,实现认知结构的发展和迁移。从思维上看,类比是“从特殊到特殊”或“从一般到一般”的推理。类比作为重要的数学思想在中学数学教学中有着丰富的应用。

一、教学设计

(一)路径类比,集合运算学习的起始点

【教学片段1】

教师:实数有加、减、乘、除等运算,集合是否也有类似的运算?



问题1:类比实数的加法运算,你能得出下列集合之间的关系吗?

(1) $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(2) $A = \{x | x \text{ 是有理数}\}$, $B = \{x | x \text{ 是无理数}\}$, $C = \{x | x \text{ 是实数}\}$.

问题2:你还能列举出类似的三个集合满足上述关系吗?

设计意图: 实数的研究是从含义与表示到大小关系再到四则运算,类比得出“集合的含义与表示→集合的关系→集合的运算”的研究路径。类比实数的四则运算,引入集合的运算,让学生感受探究集合运算的必要性。一般地,问题发现和提出的过程有三种途径:一是根据生产生活的需要,通过设计实际问题让学生在解决问题的过程中发现运算

学习的必要性,从而抽象出集合的运算;二是类比方法迁移,类比实数的运算研究,重现从特殊到一般的归纳以及从一般到特殊的演绎;三是通过法则的逆运算发现新的法则。问题2的举例,建议从数学、生活等不同角度切入,观察分析,丰富实例,以增强学生对抽象概念的直观理解。

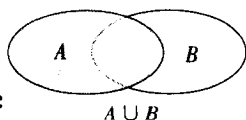
(二)形式类比,概括三种语言的关键点

【教学片段2】

教师:类比前一节“子集的三种语言表述”,你能分别用自然语言、符号语言和图形语言准确表达上述关系吗?

自然语言:一般地,由所有属于集合A或属于集合B的元素组成的集合,称为集合A与B的并集,记作 $A \cup B$ (读作“A并B”)。

符号语言: $A \cup B = \{x | x \in A, \text{ 或 } x \in B\}$ 。



图形语言:

思考:对于一个数学运算,我们会从它的运算对象、运算法则以及运算结果来认识它。那么你能说说并集的运算对象、运算法则以及运算结果吗?

追问1:问题1中的集合关系如何利用符号表示呢?

追问2:如果问题1中的集合 $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,那么 $A \cup B = C$ 依然成立吗?

注意,在求两个集合的并集时,它们的公共元素在并集中只能出现一次。

[例题1] 设 $A = \{4, 5, 6, 8\}$, $B = \{3, 5, 7, 8\}$, 求 $A \cup B$ 。

[例题2] 设集合 $A = \{x | -1 < x < 2\}$, 集合 $B = \{x | 1 < x < 3\}$, 求 $A \cup B$ 。

[基金项目] 本文系2022年度武汉市教育科学规划立项课题“基于高中数学新教材数学文化版块的美育渗透策略研究”的系列研究成果。

思考:下列关系式成立吗?

(1) $A \cup A = A$; (2) $A \cup \emptyset = A$ 。

设计意图:类比子集的三种语言,给出并集的定义及其三种语言表示。类比学习,渗透集合的三种语言,对后面的交集等其他集合运算的规范表述产生正迁移。设置环环相扣的问题串,进一步建构概念,结合实数的符号运算、关联类比,分别从三种表征中掌握并集的运算对象、运算法则和运算结果。整个过程从特殊到一般,从具体到抽象,猜想、探索、归纳形成概念,再从一般到特殊,熟练转换三种语言,引导学生运用并集的概念验证、解释运算规律,自然进行认知体系的再建构、再扩充,感受并集运算的存在性和合理性,达到“既见树木,又见森林”的效果。

(三)过程类比,探究交集运算的接力点

【教学片段3】

教师:实数有加、减、乘、除等多种运算,集合的基本运算除了并集,是否还有其他运算?

问题3:观察实例,你能否得出以下集合之间的关系?

(1) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, B = \{3, 5, 8, 12\}, C = \{8\}$;

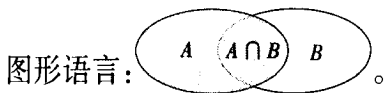
(2) $A = \{x|x \text{ 是我校 } 2022 \text{ 级女生}\}, B = \{x|x \text{ 是我校 } 2022 \text{ 级 } 8 \text{ 班学生}\}, C = \{x|x \text{ 是我校 } 2022 \text{ 级 } 8 \text{ 班女生}\}$ 。

问题4:你还能列举出类似的三个集合满足上述关系吗?

追问1:你能分别用自然语言、符号语言和图形语言准确表达上述关系吗?

自然语言:一般地,由所有属于集合A且属于集合B的元素组成的集合,称为集合A与B的交集,记作 $A \cap B$ (读作“A交B”)。

符号语言: $A \cap B = \{x|x \in A, \text{ 且 } x \in B\}$ 。



教师:对于一个数学运算,我们会从它的运算对象、运算法则以及运算结果来认识它。那么你能说说交集的运算对象、运算法则以及运算结果吗?

追问2:问题3如何利用符号表示呢?

追问3:如果集合 $A = \{1, 2\}, B = \{3\}$,求 $A \cap B$ 。

注意,当两个集合A、B没有公共元素时,不能说它们没有交集, $A \cap B = \emptyset$ 。

教师:下列关系式成立吗?

(1) $A \cap A = A$; (2) $A \cap \emptyset = \emptyset$ 。

设计意图:类比并集的学习路径,学生独立思

考、交流讨论,得到交集的定义以及符号语言、图形语言等多元表征。层层设问,引导学生对定义的合理性和唯一性进行解释,揭示其中蕴含的类比思想。让学生充分经历运算的建构过程,其中交集定义是核心,丰富实例是重点,运算法则是难点。

(四)结构类比,辨析比较两者的不同点

【教学片段4】

教师出示交集、并集的对应关系,如下表所示:

并集、交集的对应关系		
并	$\cup$	或
交	$\cap$	且

练习(几何画板实验操作):集合 $A = \{x|2 \leq x < 4\}, B = \{x|x \geq 3\}$,求 $A \cup B, A \cap B$ 。

变式:集合 $A = \{x|2 \leq x < 4\}, B = \{x|x \geq 2\}$,求 $A \cup B, A \cap B$ 。

设计意图:比较两种集合运算的记法,辨析“并”“或”与记号“ $\cup$ ”之间的对应关系,以及“交”“且”与记号“ $\cap$ ”之间的对应关系。练习及其变式,通过简单的变化,将学生的思维引向深入,实现不同情形的转化。将零散的、具有内在联系的、易混淆的概念和定义等归类,类同也类异,深刻揭示知识间的联系与区别,在辨析中加深理解,在对比中强化记忆,达到提质增效的目的。

(五)思想类比,补集运算学习的探究点

【教学片段5】

问题5:你是否能求出方程 $(x - 2)(x^2 - 3) = 0$ 在有理数范围和实数范围内的解集?

追问1:你还能列举出类似的三个集合满足上述关系吗?

(有理数集、无理数集与实数集)

追问2:全集和补集之间是什么关系呢?

(补集是相对全集而言的,全集不同,补集一般不同。补集是全集的子集)

教师:对于一个数学运算,我们会从它的运算对象、运算法则以及运算结果来认识它。那么你能说说补集的运算对象、运算法则以及运算结果吗?

设计意图:类比并集、交集的研究过程,补集的学习采用“具体问题→共同特征→抽象概念→概念表示→概念应用”的研究路径,以学生熟悉的实例为切入点,由此自然引入全集与补集。运用横向类比的方式,以并集、交集为基础,为学生搭建自主探究的平台,完善学生原有的认知结构,促进学生对所学新知的内化。需要注意的是,类比学习要避免表面化和形式化,相对于并集与交集,补集是较难



理解的,教学中教师需启发学生深入本质去思考问题,培养辨析思维,多借助韦恩图的直观性帮助学生理解。

(六)归纳类比,数学思想方法的延伸点

【教学片段6】

问题6:回顾本单元的学习内容,并回答以下问题。

(1)什么是集合?如何研究集合?

(2)在研究集合的过程中,你学到了什么数学思想方法?

(3)用联系的观点看问题,可以使我们更深刻地理解数学知识。本章中我们类比数与数的关系和运算研究了集合与集合的关系和运算。你认为这样的类比对发现和提出集合的问题有什么意义?

(4)你能类比数的减法运算给出集合的减法运算吗?

引入一个新的数学对象后,需思考所需要研究的内容和途径等有哪些。由两个对象的某些相同或相似的性质,推断它们在其他性质上也有可能相同或相似的推理形式称为类比。类比是数学研究的一种重要思维方法。

设计意图:集合学习遵循“含义与表示→基本关系→基本运算”的图式研究规律,实现纵向类比,形成可复制、可推广、可引申的研究路径,为高中数学的学习做进一步的铺垫。整体支架下总结本单元的学习内容,形成单元知识框架,体现数学的整体性、逻辑的连贯性、思想的一致性、方法的普适性以及思维的系统性。以问题的形式提炼研究方法以及数学思想,鼓励学生学以致用。实际上,类比作为一种思维工具,利用已知生发出新知的增长点,能进行丰富的再创造工作,例如思想类比、归纳类比,以此得出数学思想方法的普适性。

二、教学反思

“集合的基本运算”处于集合章节的最终篇,也是开启逻辑用语的起始篇。教材里的内容并不多,部分教师在教授本节内容时容易照本宣科,忽略对类比思想的应用。倘若基于类比组织教学,就能在原有内容的基础上有所提升,不仅引出集合的研究内容和研究方法,还能让学生掌握研究一类问题的基本途径,为学生自主研究差集等集合运算提供理论支持,也为后续其他章节内容的学习奠定基础。

(一)三条主线:明线、暗线、反思线

认知心理学认为,围绕主线对同一类概念进行多元联系表示,有利于揭示概念的本质。本节课中,教学明线是集合的基本运算,主要围绕并集、交

集和补集三种集合的运算展开循序渐进的教学。穿插其中的教学暗线是数学思想方法的渗透,类比实数的研究路径,定位集合的运算研究;类比子集的形式化语言,得出并集的三种语言表述;类比并集的研究过程,呈现交集的运算特征;类比并集和交集的运算,分类辨析两者的异同点;类比并集和交集的研究思路,探究全集和补集的概念要义;类比归纳知识体系,总结迁移至其他数学问题。“类比是一个伟大的领路人”,凸显了数学思想在问题解决中的应用价值。第三条主线是反思线。问题是数学的心脏,教学过程中教师通过层层设问,引导学生不断反思、重构。课堂小结以问题的形式启发思维,从知识技能层面上升到过程方法层面,串点成线,明晰知识之间的纵横联系,深度挖掘,促进学习正向迁移。

(二)三轮类比:类同、类异、类推

类比迁移是指用熟悉的方法去解决陌生的问题的一种策略,通过分析、概括和综合源问题而获得一种图式规则,并成功地把这一图式规则运用于靶问题。本节课中,引导学生充分经历从实数到集合的“类同”、从并集到交集的“类异”、从并集交集到全集补集的“类推”等多元过程,不断引发学生数学思维的同化与顺应,使学生多次感受“研究对象变化,而研究方式不变、数学思想不变”的本质属性,一隅三反,丰富学生的数学学习体验和提升学生的数学思维能力。

(三)三个阶段:感性类比阶段、理性类比阶段、再感性类比阶段

第一阶段是“感性类比阶段”,感性类比是一种相对简单的类比,例如路径类比、形式类比就属于感性类比。在感性类比阶段,学生往往可以通过自己的观察比较发现新旧事物的相似之处,进而得到初步的迁移规律,产生新的类比结论,但这类结论往往停留于文字变动的机械替换,学生对规律本质的理性思考仍然存在不足。第二阶段是“理性类比阶段”,如过程、结构的类比均属于理性类比,理性类比阶段是类比学习最为关键的阶段,在这一阶段中,学生逐步发现和理解类比规律背后的本质特征,从“形似”过渡到“神似”。第三阶段是“再感性类比阶段”,在这个阶段主要是进行更为深入的类比规律应用,以及丰富的再创造,比如进行思想类比、归纳类比,类比的宝贵之处也恰恰体现在这一阶段,需要针对不同对象,分时段地、长期地渗透。

(责任编辑 黄桂坚)