从函数观念到函数思想：代数式的结构化整体性教学 *

刘志昂　（江苏省苏州市高新区第五初级中学校　215151）

摘　要　代数式的学习始于用字母表示数．字母可以像数一样进行运算和推理，进而得到一般性的结论．在代数式的学习中，应渗透函数观念，用函数思想去理解和学习代数式，构建代数式、方程、不等式和函数之间的内在关联，形成结构化的整体性教学．

关键词　函数观念；函数思想；结构化；整体性教学

文章编号　1004-1176(2023)08-0032-05

1　函数观念与函数思想

观念是指思想意识，函数观念即函数的思想意识．函数观念是指数学学习中，在没有学习函数概念及相关性质之前，用函数的对应关系、定义域和值域及函数的性质等去理解、感悟一些潜在的函数关系，加深对数学知识的理解，是函数思想的渗透．

函数思想是人类在长期的社会实践及理论推理中得出来的现实世界与数学公式之间的关系，是学习了函数的概念和性质后，根据生活实际或者数学问题中的变量间的对应关系，构建函数模型，再运用函数知识解决问题．函数思想是解决数学问题最重要、最基本的思想方法之一．

2　结构化整体性教学

《义务教育数学课程标准（2022 年版）》（下称《课标 2022》）指出：教学内容是落实教学目标，发展学生核心素养的载体．在教学中要重视对教学内容的整体分析，帮助学生建立能体现数学学科本质、对未来学习有支撑意义的结构化的数学知识体系．一方面了解数学知识的产生与来源、结构与关联、价值与意义，了解课程内容和教学内容的安排意图；另一方面强化对数学本质的理解，关注数学概念的现实背景，引导学生从数学概念、原理及法则之间的联系出发，建立起有意义的知识结构．通过合适的主题整合教学内容，帮助学生学会用整体的、联系的、发展的眼光看问题，形成科学的思维习惯，发展核心素养．[1]85

数学结构化整体性教学强调数学知识之间的内在关联，探寻结构化的知识体系，重视“通性通法”的教学．引导学生在学习的过程中从整体上把握学习内容，积累学习的一般方法和基本思维经验，并迁移到后续的学习中，达到问题解决的目的．

3　基于函数观念的代数式结构化整体性教学

数与代数是数学知识体系的基础之一，是学生认知数量关系、探索数学规律、建立数学模型的基石，可以帮助学生从数量的角度，清晰准确地认识、理解和表达现实世界[1]53．

用字母表示数，拉开了代数式学习的序幕．在代数中，用字母表示数意味着字母可以像数一样进行运算和推理而得到一般性的结论，进而用字母来表示数学中最基本的数量关系（相等关系和不等关系）以及两个变量之间的关系，从而进行代数式、方程、不等式和函数的学习．

代数中的用字母表示数，连接了各类代数式、方程、不等式和函数之间的内在关联，形成结构，因而教学中更应关注数学的整体性和运算的一致性．

3.1　代数式教学中函数观念的渗透

3.1.1　用字母表示数的教学

用基本运算符号（基本运算包括加、减、乘、除、乘方和开方）把数或表示数的字母连接起来的式子叫做代数式．由此可见，用字母表示数是代

* 本文系江苏省教育科学“十四五”规划 2021 年度课题“从事实到结构：初中生数学学习力培养的实践研究”（E-c/2021/22）的阶段性研究成果．

数式学习的基石.

《课标 2022》对第三学段(5～6 年级)数量关系的学业要求中指出:能在具体情境中,探索用字母表示事物的关系、性质和规律的方法,感悟用字母表示的一般性[1]25.对第四学段(7～9 年级)数与式的内容要求中指出:借助现实情境了解代数式,能进一步理解用字母表示数的意义[1]55.

在用字母表示数的教学中,许多版本的教材都选用了从特殊到一般的生活实例来引入.

人教版教材在章头引言中给出这样的实例与问题进行引入:

例 1　青藏铁路线上,在格尔木到拉萨之间有一段很长的冻土地段.列车在冻土地段、非冻土地段的行驶速度分别是 100 km/h 和 120 km/h,请根据这些数据回答下列问题:

(1)列车在冻土地段行驶时,2 h 行驶的路程是多少? 3 h 呢? t h 呢? [2]53

在《2.1 整式》的开始部分,给出如下的内容:

我们来看本章引言中的问题(1).

列车在冻土地段的行驶速度是 100 km/h,根据速度、时间和路程之间的关系“路程等于速度乘以时间”,列车 2 h 行驶的路程(单位:km)是 $100\times2=200$,列车 3 h 行驶的路程(单位:km)是 $100\times3=300$,列车 t h 行驶的路程(单位:km)是 $100\times t=100t$ ①.

在式子①中,我们用字母 t 表示时间,用含有字母 t 的式子 $100t$ 表示路程.[2]54

在教学中,教师会引导学生列出如上的算式,然后强调是一个从特殊到一般的过程,用字母来表示一个个具体的数.

再如苏科版教材中有如下的一个问题:

例 2　用同样大小的两种不同颜色的正方形纸片,按图 1 的方式拼成正方形.

第(1)个图形中有一个小正方形.

第(2)个图形比第(1)个图形多 ______ 个小正方形.

第(3)个图形比第(2)个图形多 ______ 个小正方形.

第(4)个图形比第(3)个图形多 ______ 个小正方形.

第(10)个图形比第(9)个图形多几个小正方形? 第(100)个图形比第(99)个呢? 第(n)个图形比第($n-1$)个呢? [3]66-67

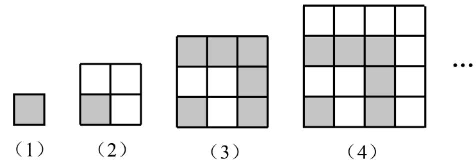

图 1

在教学中,教师同样会引导学生解答上述问题,然后强调这是一个从特殊到一般的过程,用字母来表示数和数量关系.

但是,如上的教学是不够的.

上述的两个例子中,都是从特殊的、具体的实例到一般的、抽象的用字母表示,这是一个非常典型的数学抽象.可是我们的教学不能仅仅停留在此,应该渗透函数观念.

我们知道,例 1 中的 $100t$ 是 t 的函数,第 2 个例子中 n^2 是 n 的函数.建议例 1 的教学应形成如下的表格:

时间	…	2	3	…	t
路程	…	200	300	…	$100t$

然后设计如下的追问:

1.路程和时间之间有什么样的数量关系?(路程是时间的 100 倍,如果路程用 s 表示,则 $s=100t$)

2.时间的变化对路程有什么影响?(路程随时间的变化而变化,路程随时间的增大而增大)

如上的设计,既明确了两个变量(路程和时间)之间的对应关系(路程随时间的变化而变化),渗透了函数的概念,又明确了路程随着时间的增大而增大,渗透了函数的单调性.

例 2 的教学应形成如下的表格:

图形序号	1	2	3	4	…	9	10	…	$n-1$	n
小正方形个数	1	4	9	16	…	81	100	…	$(n-1)^2$	n^2

然后设计如下的追问:

1.小正方形的个数与图形序号之间有什么样数量关系?(小正方形的个数是图形序号的平方,如果第 n 个图形中小正方形的个数用 m 表示,则 $m=n^2$)

2.图形序号的变化对小正方形的个数有什么影响?(小正方形的个数随图形序号的变化而变化,小正方形的个数随图形序号的增大而增大)

3.相邻两个大正方形,后一图形中的小正方形个数减去前一图形中小正方形的个数,其结果与图形序号之间有什么样的数量关系?图形序号的变化对结果有什么影响?

教学中,教师可以引导学生通过图形的拼接与算式的规律探究,还可以概括出第(n)个图形比第($n-1$)个图形多$2n-1$个小正方形.

如上的设计,依然明确了两个变量之间的对应关系,渗透了函数的概念,又明确了两个变量之间的变化规律,渗透了函数的单调性.

当然,上面的两个例子还可以从数列的视角进行渗透与教学,而数列则是建立在自然数集上的特殊的函数,依然是函数观念的渗透.

上述两个变量之间对应关系(函数关系)的存在与成立,不仅仅是表示特定情境中的实际问题,还可以表示其他的实际问题与数学问题,所以人教版数学教材七年级上册中明确指出:用字母表示数后,同一个式子可以表示不同的含义.其本质上说明两个变量之间的对应关系(函数关系)可以赋予不同的实际情境来表示不同的实际问题.因而这样的数学抽象的符号阶段,可以摆脱具体的情境而去表示所有的具有同类特征的数学关系.正如史宁中教授所言:符号的表达必须摆脱具体内容,否则这种表达将不具有一般性,在这种表述基础上的计算和推理,也将不具有普适性[4].

正是学习了用字母表示数(包括函数观念的渗透),才使得代数式表示数与数量关系更具有抽象性、一般性与普适性,为其他代数式(整式、分式与二次根式等)的学习奠定了基础.

3.1.2 "列代数式"的教学

《课标2022》对第四学段(7～9年级)数与式的内容要求中指出:分析具体问题中的简单数量关系,并用代数式表示[1]55.这是对列代数式的要求.各个版本的教材均没有单独的列代数式的章节,大多散落在用字母表示数或代数式的内容之中,故在教学中容易不被重视而一带而过.

在实际教学中,应该重视列代数式的教学,它与列方程、不等式和函数表达式一样,可以描述实际生活问题或者其他数学问题中的数量关系,是最基础、最简单、最一般的,与列方程、不等式和函数表达式有着内在的关联.

如沪科版数学教材中有这样一道例题:

例3　用代数式表示:把a本书分给若干名学生,若每人5本,尚余3本,求学生数[5]60.

解决此例的方法是寻找实际问题中数量间的相等关系:学生数=(书本总数－余下的3本)÷5本,进而列出代数式$\frac{a-3}{5}$.这是解决此类问题的通法,构建了一个解决这类问题的模式(能够认识或者解决一类数学问题的方法称为模式[6]),可以迁移到用方程、不等式、函数解决实际问题,是结构化的整体性教学.

在后续的教学中,若给出具体的学生数求a的值,则转化为列方程解决问题;若给出学生数的范围,则转化为列不等式解决实际问题;若给出学生数为x,则转化为a与x之间的函数关系.

所以这个问题本质上是书本总数a与学生数x两个变量之间的对应关系,根据实际问题的不同表述,既可以是a随着x的变化而变化($a=5x+3$),也可以是x随着a的变化而变化$\left(x=\frac{a-3}{5}\right)$,显然,这是函数关系(函数与反函数).具体的教学中,不妨让学生感受到两者之间的对应关系与变化关系以及a与x的取值限定,初步感悟函数的三要素:函数的对应关系、定义域和值域,这是函数观念的渗透.

3.1.3 "求代数式的值"的教学

用数值代替代数式里的字母,按照代数式中的运算关系计算得出的结果叫作代数式的值.《课标2022》对第四学段(7～9年级)数与式的内容要求中指出:会把具体数代入代数式进行计算[1]55.这是对求代数式的值的要求.许多版本的教材有专门的代数式的值的章节.

如沪科版教材部分内容如下:

一项调查研究显示:一个10～50岁的人,每天所需的睡眠时间t h与他的年龄n之间的关系式为$t=\frac{110-n}{10}$.

例如30岁的人每天所需的睡眠时间为$t=\frac{110-30}{10}=8(\text{h})$.

算一算,你每天需要多少睡眠时间?[5]65

这里的关系式表示的是睡眠时间与年龄这两个变量之间的对应关系,是它们之间的函数关系表达式,而求30岁人的睡眠时间则是已知自变量的值($n=30$)求对应的函数值(t),是对函数对应

关系的渗透.

后面的算一算,由于学生的年龄会存在着差异,所以计算时自变量的值会有不同,因而计算的结果也会有所差别,说明“对于 x 的每一个值,y 都有唯一确定的值与它对应”,又是函数对应关系的渗透.

苏科版教材在相应位置设置了如下的一个探究过程:

填表:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$2x-1$							
$-3x$							
x^2							

根据所填表格,讨论下列问题:

(1)当 x 为何值时,代数式 $2x-1$ 的值等于 -1?

(2)随着 x 的值的增大,代数式 $2x-1$,$-3x$ 的值怎样变化?

(3)随着 x 的值的增大,代数式 x^2 的值怎样变化?[3]75

如上的探究活动中,(1)是对函数对应关系的渗透,(2)和(3)则是对函数单调性的渗透.接着教材中明确指出:一般的,代数式的值随着代数式中字母取值的变化而变化.教学时,教师应该带着学生深刻理解它的数学内涵,用函数观念去分析、理解它,厘清代数式与函数之间的内在关联,形成结构化的整体性教学.

3.2　代数式教学中函数思想的统领

3.2.1　用代数式的知识促进对函数的理解

函数主要研究变量之间的关系,探索事物变化的规律.函数概念的获得是一个概念形成的过程,而具体函数的概念的获得则是概念同化的过程.如初中阶段学习一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$、反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq0)$ 和二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 时,都是先根据生活实例得到诸多例证(表示某一变量的代数式),再归纳出这些代数式共同特征和共同属性,从而得到具体函数的概念,随后再逐步认同.这是一个抽象的过程.抽象是认识事物的本质、掌握事物内在规律的方法,是从许多事物中舍弃个别的、非本质的属性,抽出共同的本质属性[7].一次函数表达式 $y=kx+b(k\neq0)$ 的共同本质属性为代数式 $kx+b$ 是关于自变量 x 的一次整式;二次函数表达式 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$ 的共同本质属性为代数式 $ax^2+bx+c(a\neq0)$ 是关于自变量 x 的二次整式;反比例函数表达式 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq0)$ 的共同本质属性为代数式 $\dfrac{k}{x}(k\neq0)$ 是关于自变量 x 的分式,且 x 与 y 成反比例关系.

学习了函数之后,已知函数表达式和自变量的值求对应的函数值,就是将自变量的确定值代入解析式求代数式的值;求函数值等于零、大于零或小于零时的自变量的值或取值范围,可以将函数表达式(代数式)大于零、等于零和小于零转化为方程或者不等式来求解.从这个角度来说,代数式是构成函数的基本单位,是连接函数与方程、不等式的纽带.用代数式的知识促进对函数的理解也是一种结构化的整体性教学.

3.2.2　用函数的思想促进对代数式的理解

学习了函数之后,学生便具备了函数思想.在复习,尤其是总复习时,对于代数式便可以明确地说,代数式的值与代数式所含字母是变量之间的对应关系,代数式的值是代数式所含字母的函数,它随着字母取值的变化而变化.此时,教师带着学生用函数的思想重新审视学习过的代数式内容,加深学生对代数式的理解,有利于他们高阶思维的形成.

至此,在代数式、方程和不等式中渗透函数观念,以及用函数思想统领代数式、方程和不等式的学习,便构建了如图2的一个学习结构.

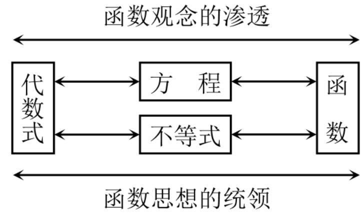

图2

用函数的思想统领代数式的学习,关联着方程和不等式的相关知识,将初中阶段学习的数与式内容连成一体,让学生感悟一般的思维策略和学习策略,促进学生的深度学习.

4　结束语

代数式教学中函数观念的渗透和函数思想的统领,使代数式、方程、不等式和函数组成了结构化的有机体,有利于从整体上认识数学知识及其内在关联,形成知识结构与知识体系.利用数学对象的发生发展过程和相互联系而使学生认识它的

内容,利用内容的各种表现形式及其运动变化,而使学生深刻理解并掌握数学知识的精神实质和数学思想方法,是数学教学中提高数学课堂教学质量的根本保证[8].

郑毓信教授认为:"(数学)深度教学"的主要含义是数学教学必须超越具体知识和技能深入到思维的层面,由具体的数学方法和策略过渡到一般的思维策略与思维品质的提升[9].由此,从函数观念到函数思想的代数式的结构化整体性教学是深度教学.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准(2022年版)[M].北京:北京师范大学出版社,2022.
[2] 人民教育出版社课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心.义务教育教科书·数学(七年级上册)[M].北京:人民教育出版社,2012.
[3] 杨裕前,董林伟.义务教育教科书·数学(七年级上册)[M].南京:江苏凤凰科学技术出版社,2012.
[4] 史宁中.数学思想概论——数量与数量关系的抽象[M].长春:东北师范大学出版社,2008:7.
[5] 新时代数学编写组.义务教育教科书·数学(七年级上册)[M].上海:上海科学技术出版社,2013.
[6] 史宁中.核心问题——小学数学教学中的基本概念与运算法则[M].北京:高等教育出版社,2020:6.
[7] 徐利治,王光明.数学方法论选读[M].北京:北京师范大学出版社,2019:35.
[8] 章建跃.章建跃数学教育随想录[M].杭州:浙江教育出版社,2017:276.
[9] 郑毓信.数学深度教学的理论与实践[M].南京:江苏凤凰教育出版社,2020:12.

(上接第21页)

出心率的变化规律.这些现象在实验过程中都是常见的,有的学生可能为了数据的"完美"而去编造一些数据,这是不可取的.

教师在参与学生活动过程中可以引导学生思考:数据不符合预期可能是哪里出现了问题?能否改进实验方案或多次测试?等等.但要坚持让学生使用真实的实验数据.对于不可避免的实验误差,可以测量多组数据,使用平均值来减少误差.要促使学生养成实事求是的研究习惯,为学生今后的科学研究打好基础.

值得说明的是,综合实践活动的研究成果往往没有标准答案,最终呈现的结果并不是看上去越完美越好.活动的重点在于研究过程,在于学生遇到困难后的群策群力,在于学生能否运用学科思维尝试解决问题.特别是初中阶段,学生刚刚接触这种自主探究活动,教师要引导学生养成正确的科研观,切忌为了得到想要的结果而编造数据.

3.4 坚持过程完整

在跨学科综合实践活动中,教师应坚持让学生体验完整的项目化研究流程,不能因为课时限制而对项目实施环节随意删减.项目开始,学生查找资料,分享查找资料的结果,根据查找的资料开题.开题过程中又需要组织学生选择具体研究对象与子课题,然后学生以小组为单位撰写开题报告,详细叙述要研究的实际问题、研究的意义、研究的方法、研究过程中可能遇到的困难及解决办法、研究人员的安排,等等.接着是做题,学生在做题过程中要进行数学实验,搜集、整理、分析实验数据,根据数据改进实验,形成研究结论,等等.最后是结题,学生汇总研究成果,制作PPT课件展示交流研究成果,撰写结题报告,等等.这一系列的流程可能需要"消耗"较多上课时间,但坚持让学生经历完整的课题研究过程,从而熟悉研究实际问题的一般方法,正是跨学科综合实践活动的重要目的之一.

参考文献

[1] 王浩,王可,胡少臣."项目学习:体育运动与心率"教学设计[J].中国数学教育,2022(17):15-20.
[2] 王浩.初中数学跨学科实践活动的教学案例与反思——以"减速带间距的设计"为例[J].中学数学教学参考,2022(35):59-61.
[3] Heyl A.Fostering engagement for students from low-socioeconomic status backgrounds using project-based mathematics[D].University of California,2008.
[4] Markham T,Larmer J,Ravitz J.Project based learning handbook:A guide to standards-focused project based leaming[M].California:Buck Institute for Education,2003:10.
[5] 苏洪雨,吴周伟.数学中的项目活动设计探究——澳大利亚的案例简介及启示[J].数学通报,2009,48(4):24-28.
[6] 夏涛,罗祖兵.项目学习——中小学数学教学的应然选择[J].现代教育科学,2011(12):102-104.